

# 完整指数函数拟合单桩荷载-沉降曲线的分析

赵春风<sup>1,2</sup>, 李尚飞<sup>1,2</sup>, 鲁 嘉<sup>1,2</sup>, 甘爱明<sup>1,2</sup>

(1. 同济大学 岩土及地下工程教育部重点实验室, 上海 200092; 2. 同济大学 地下建筑与工程系, 上海 200092)

**摘要:** 不同于以往确定完整指数函数参数的方法, 提出了确定完整指数函数参数的差分形式最小二乘法; 然后结合现场试验, 对完整指数函数拟合荷载-沉降曲线的规律进行分析, 探讨用指数函数最大曲率点判定桩的极限承载力及其相应沉降的合理性; 最后针对未加载至破坏的单桩竖向静载荷试验, 研究用完整指数函数预测竖向荷载作用下单桩的极限承载力及其相应桩顶沉降的可行性, 提出了预测单桩极限承载力的条件和预测单桩破坏时桩顶沉降的合理性和局限性。

**关键词:** 单桩; 竖向静载荷试验; 荷载-沉降(Q-S)曲线; 完整指数函数; 极限承载力; 预测

**中图分类号:** TU 473

**文献标识码:** A

## Analysis of Fitting Loading-settlement Curves of Single Piles by Integrated Exponential Function

ZHAO Chunfeng<sup>1,2</sup>, LI Shangfei<sup>1,2</sup>, LU Jia<sup>1,2</sup>, GAN Aiming<sup>1,2</sup>

(1. Key Laboratory of Geotechnical and Underground Engineering of the Ministry of Education, Tongji University, Shanghai 200092, China; 2. Department of Geotechnical Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, China)

**Abstract:** Different from previous solution, least square model solution of difference form of integrated exponential functional model is put forward to determine parameters of integrated exponential function. Combining with field test, an analysis is made of the feature of fitted Loading-settlement curve right by integrated exponential functional model. Then, the paper presents a discussion of the reason of determining ultimate bearing capacity of single piles by the largest curvature point of integrated exponential function. Finally, for no broken single piles in field test, a research is made of the feasibility of predicting ultimate bearing capacity of single piles and its top settlement by the largest curvature point of Loading-settlement curve, conditions of predicting ultimate bearing capacity and limitations of predicting top settlement of

no damaging single piles are obtained.

**Key words:** single piles; vertical static load test; loading-settlement(Q-S) curve; integrated exponential function; ultimate bearing capacity; prediction

确定单桩竖向承载性能的方法很多, 有荷载传递法、弹性理论法、剪切位移法、数值分析法、灰色系统理论法、神经网络理论法、最优化理论法、试验方法等, 不管是何种方法, 都必须通过试验来验证其方法的准确性。目前研究桩基承载性能试验主要有室内试验和现场试验, 室内试验有测定不同土类、不同条件下土的荷载传递函数的直剪仪试验、三轴剪力仪试验、模型试验和离心机试验等; 现场试验主要包括单桩静载试验及桩身应力测试试验。现场试验中的静载荷试验是目前研究单桩承载性能及单桩 Q-S (荷载-沉降) 特性最常用的手段。

典型的单桩竖向静载荷破坏试验荷载-沉降曲线如图 1 所示。可分为 3 段: ①直线段(弹性阶段), 在小荷载作用下, 桩土体系呈弹性状态。②曲线段(弹塑性阶段), 随荷载增加, 桩土体系进入弹塑性阶段, 桩顶变形呈曲线状, 直至第 2 拐点(所谓第 2 拐点即为陡降段的起始点)。③塑性破坏阶段, 过第 2 拐点后, 桩身出现急剧下沉, 荷载趋于稳定。一般认为, 当桩过第 2 拐点后, 桩剧烈或不停滞沉降, 认为桩处于破坏状态。相应于第 2 拐点的荷载, 称为极限荷载(即极限承载力)。

而实际工程中由于种种原因, 部分试桩未能加载至破坏, 这给如何确定桩的极限承载力带来难度。对此, 国内外学者进行了大量的研究, 提出不少确定承载力的方法, 大都先对桩的荷载-沉降曲线假定某一数学模型, 然后利用已获得的试验数据确定该数学模型中的各个参数, 再根据某种极限承载力判定

收稿日期: 2009-05-19

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(40972180); 上海市重点学科建设资助项目(B308)

作者简介: 赵春风(1964—), 男, 教授, 博士生导师, 工学博士, 主要研究方向为岩土工程的理论及应用. E-mail: tjzhchf@sohu.com

准则外推或预估出单桩极限荷载.显然,这种预估极限荷载的准确与否与数学模型的精度有关.

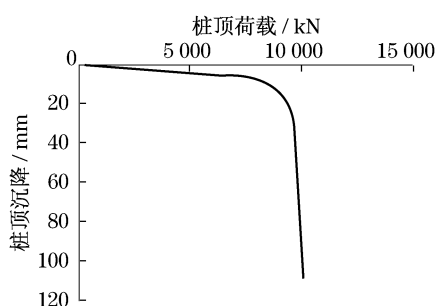


图1 典型的荷载-沉降曲线

Fig.1 Typical loading-settlement curve

目前能预测这种破坏规律的典型数学模型有双曲线函数模型<sup>[1]</sup>、调整双曲线函数模型<sup>[2]</sup>、普通指数函数模型<sup>[3]</sup>、完整指数模型<sup>[4]</sup>、幂函数模型<sup>[3]</sup>等.文献[5]用各种数学模型对天津地区67根钻孔灌注桩荷载-沉降进行预测,证实完整指数函数模型拟合天津地区灌注桩的极限承载力较好.

笔者在前人研究基础上,首先分析完整指数函数的适应性,提出便于工程应用的求解完整指数函数参数的差分形式最小二乘法;然后结合现场静载荷试验实测数据,用完整指数函数的最大曲率点判定单桩的极限承载力,证实判定结果与静载荷试验结果较符合;并通过逐级预测的方法,形成图示,观察预测单桩极限承载力随级数增多的变化规律,进而指出预测单桩极限承载力的条件;并就用完整指数函数最大曲率点对预测单桩的破坏沉降进行探讨.

## 1 完整指数函数模型的物理意义及其参数的差分形式最小二乘法求解

### 1.1 完整指数函数的意义

完整指数模型的数学表达式<sup>[4]</sup>为

$$P = a(1 - e^{-bS}) \quad (1)$$

式中: $P$ 为荷载; $a$ 为极限荷载, $a = P_m$ , $P_m$ 即为当桩沉降量 $S$ 趋于无穷大时 $P$ 的极值; $b = \frac{K_m}{P_m}$ ,其中 $K_m$ 为初始斜率,可由式(1)导出,对式(1)求导得 $P' = abe^{-bS}$ ,当 $S$ 趋于零时 $K_m = P' = ab = P_m b$ ,即 $b = \frac{K_m}{P_m}$ ,所以式(1)可写为

$$P = P_m(1 - e^{-\frac{K_m}{P_m}S}) \quad (2)$$

式(2)是基于桩静载破坏试验的三段论提出的指数函数模型,把式(2)展成幂级数形式,即

$$P = P_m \left[ \frac{K_m S}{P_m} - \frac{\left(\frac{K_m S}{P_m}\right)^2}{2!} + \frac{\left(\frac{K_m S}{P_m}\right)^3}{3!} - \dots \right] = P_m \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \frac{\left(\frac{K_m S}{P_m}\right)^i}{i!}$$

可知当桩沉降量 $S$ 较小时, $\frac{K_m S}{P_m} \ll 1$ ,上式可简化为 $P \approx K_m S$ ,可见 $S$ 很小时方程为通过原点的直线,与单桩竖向静载试验弹性阶段符合;当 $S$ 增大到一定程度时, $e^{-\frac{K_m S}{P_m}}$ 趋于零,则桩的极限荷载 $P = P_m(1 - e^{-\frac{K_m S}{P_m}}) \approx P_m$ ,与单桩竖向静载试验弹塑性末段较符合;中间则为弯曲段.

### 1.2 求解完整指数函数参数的差分形式最小二乘法

相比双曲线模型参数、调整双曲线模型参数、普通指数模型参数,求解完整指数模型参数 $a, b$ 较难,文献[4]用变尺度优化法(DEP法)确定 $a, b$ ;文献[6]假定不同的理论极限承载力 $a$ ,然后对试验数据采用最小二乘法回归分析,再与实测曲线相比较,以确定模型参数;文献[7]在文献[6]基础上采用遗传算法工具箱来优化参数 $a, b$ ,使其取得最佳值等.但上述的方法均较复杂,对于设计和研究人员要求较高,需要大量的时间.笔者把指数函数式(1)转化为差分的形式,然后对差分方程进行最小二乘法求解,最终确定参数 $a, b$ .

已知 $P = a(1 - e^{-bS})$ 是微分方程 $y' = ab - by$ 的解<sup>[8]</sup>,把微分方程变换成如下差分形式:

$$\frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} = ab - by_{i-1}$$

令 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ 得

$$y_i = y_{i-1} - b\Delta x_i y_{i-1} + ab\Delta x_i \quad (3)$$

式(3)即为估算值 $\hat{y}_i$ ,求实测 $y_i$ 与预测 $\hat{y}_i$ 残差平方和 $L(a, b)$ 为

$$L(a, b) = \sum_{i=2}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 = \sum_{i=2}^n (y_i - y_{i-1} + b\Delta x_i y_{i-1} - ab\Delta x_i)^2$$

令 $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$ 得

$$L(a, b) = \sum_{i=2}^n (\Delta y_i + b\Delta x_i y_{i-1} - ab\Delta x_i)^2 \quad (4)$$

对  $a, b$  分别求偏导

$$\begin{cases} \partial L(a, b)/a = 0 \\ \partial L(a, b)/b = 0 \end{cases} \quad (5)$$

求解式(5)可得

$$\begin{aligned} \hat{a} &= \left( \sum_{i=2}^n \Delta x_i \Delta y_i y_{i-1} \sum_{i=2}^n \Delta x_i^2 y_{i-1} - \sum_{i=2}^n \Delta x_i^2 y_{i-1}^2 \sum_{i=2}^n \Delta x_i \Delta y_i \right) \cdot \\ &\quad \left( \sum_{i=2}^n \Delta x_i \Delta y_i y_{i-1} \sum_{i=2}^n \Delta x_i^2 - \sum_{i=2}^n \Delta x_i^2 y_{i-1} \sum_{i=2}^n \Delta x_i^2 y_{i-1} \sum_{i=2}^n \Delta x_i \Delta y_i \right)^{-1} \\ \hat{b} &= \sum_{i=2}^n \Delta x_i \Delta y_i \left( \sum_{i=2}^n \hat{a} \Delta x_i^2 - \sum_{i=2}^n \Delta x_i^2 y_i \right)^{-1} \quad (6) \end{aligned}$$

把实测数据  $(x_i, y_i)$  代入式(6), 即求得  $(a, b)$  的近似值  $(\hat{a}, \hat{b})$ . 令  $a = P_m, b = K_m/P_m$  代入式(1), 即可得完整指数函数曲线模型  $P = P_m(1 - e^{-\frac{K_m}{P_m}S})$ .

## 2 灌注桩竖向静载荷试验及完整指数函数对实测荷载-沉降曲线的拟合

笔者结合常州高架一期工程, 现场设计了4根灌注桩静载荷试验, 静载前对试桩进行超声波和低应变测试, 结果显示桩身完整, 为I类桩. 据钻探资料, 试桩所在地基土体物理力学性质指标如表1所示.

表1 地基土体物理力学性质指标

Tab.1 Physical and mechanical properties of the soil

层号	土层名称	层厚/m	重度 $\gamma/(\text{kN} \cdot \text{m}^{-3})$	天然湿度 $w/\%$	孔隙 $e$	容许承载力/ kPa	压缩模量 $E_{s1-2}/\text{MPa}$
(1)	填土	2.5					
(3)	黏土	4.4	20.2	23.4	0.676	350	10.0
(4)	亚黏土夹砂土	1.7	19.3	28.2	0.794	320	8.0
(5) <sub>1</sub>	粉砂夹亚砂土	3.4	18.7	31.7	0.877	150	10.3
(5) <sub>2</sub>	粉砂	8.5	19.0	30.5	0.826	200	13.0
(5) <sub>3</sub>	粉砂夹亚黏土	4.6	18.8	31.6	0.860	150	9.5
(9) <sub>2</sub>	粉砂夹亚砂土	13.3	18.9	30.9	0.841	200	10.3
(11) <sub>1</sub>	亚黏土	9.8	19.2	29.4	0.818	200	6.4
(11) <sub>2</sub>	亚黏土	5.5	19.0	30.2	0.824	200	6.9

试验根据现场条件采用锚桩横梁反力加载装置, 反力装置由主梁、次梁、钢帽、锚桩和焊接钢筋组成. 加载装置由油压千斤顶、油管、油泵和自动加载仪组成. 试验通过安设位移传感器的方式来测读其竖向变形, 同时在锚桩顶安装大量程百分表以测读其上拔位移量. 4根试桩均以其设计的极限承载力为依据进行分级加载, 对5-1号、5-2号、5-3号三试桩均分9级进行加载, 第1级加载量为各自设计极限值的2/10, 以后加载每级按极限值的1/10递增; 5-4号试桩分10级加载, 每级都按设计极限值的1/10递增. 本试验加载方式采用慢速维持荷载法. 试验过

程中仪器可自动补载, 尽可能保证在每级荷载下稳压. 加载方法、加载稳定判定标准和终止加载条件严格按《JGJ106—2003 建筑基桩检测技术规范》执行. 桩的尺寸和静载荷试验结果如表2. 现场实测的单桩竖向静载荷试验  $Q-S$  曲线和用完整指数函数拟合的曲线如图2所示.

从图2可以看出完整指数函数对4根单桩静载荷试验  $Q-S$  曲线拟合情况, 前7级荷载吻合均很好, 第8级荷载作用下指数函数拟合的沉降量稍大, 在最后一级荷载即第9级荷载作用下, 实测  $Q-S$  曲线和完整指数函数拟合  $Q-S$  曲线分离. 总体来看完

表2 试桩尺寸及其极限承载力

Tab.2 Message and ultimate bearing capacity of test piles

桩号	桩径/mm	桩长/m	长径比	设计极限值 $Q_s/\text{kN}$	实测极限值 $Q_c/\text{kN}$	$Q_c$ 对应的桩顶 沉降 $S_c/\text{mm}$
5-1	1 200	48.2	40.2	10 600	9 540	14.67
5-2	1 200	51.2	42.7	11 000	9 900	9.24
5-3	1 200	45.2	37.9	10 500	8 400	19.09
5-4	1 200	54.5	45.2	12 000	>12 000	>16.58

整指数函数拟合  $Q-S$  曲线在静载荷试验实测  $Q-S$  曲线内侧,同样的荷载作用下通过完整指数函数拟合得到的桩顶沉降要比实测值稍大,两曲线发展变化的规律相符. 是否可以用完整指数函数判定单桩竖向荷载作用下的极限承载力和相应桩顶沉降,将在 3.1 节进行探讨.

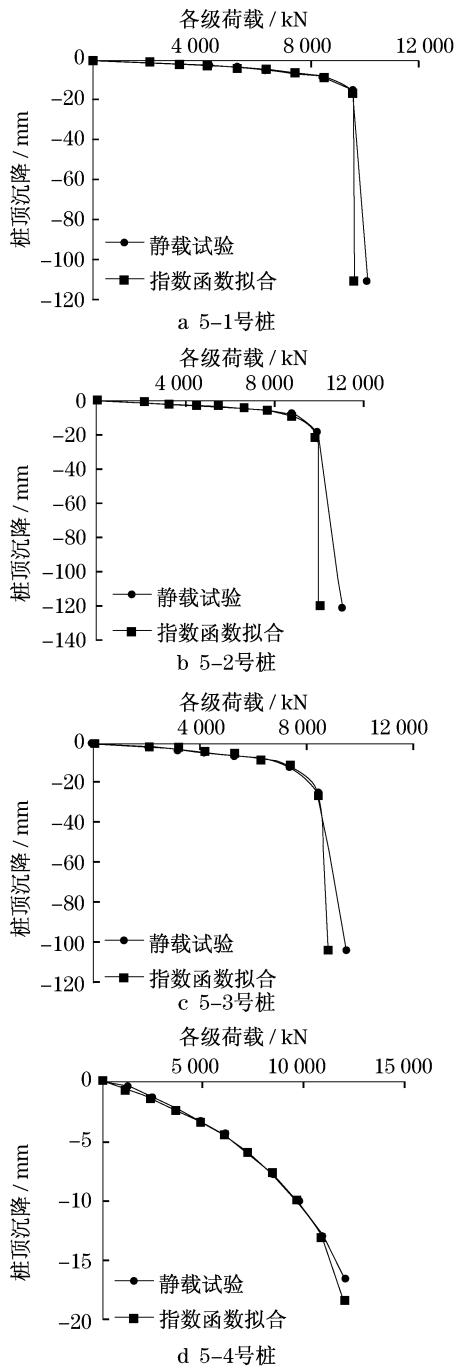


图2 5-1~5-4号桩荷载-沉降曲线

Fig.2 Loading-settlement curves of Pile 5-1~Pile 5-4

静载荷试验中, $Q-S$  曲线陡降段起始点被认为是试验单桩的极限承载力,将静载荷试验实测的  $Q-S$

$S$  曲线陡降段起始点的沉降与在此级荷载作用下通过完整指数函数拟合得到的桩顶沉降进行比较,由实测知 5-1 号、5-2 号、5-3 号三试桩的陡降段起点皆为第 8 级荷载;5-4 号桩分 10 级荷载施加,最终未达到破坏,这里分析 5-4 号桩最后 3 级沉降变化. 实测沉降和完整指数函数拟合沉降及其两者间的误差分析如表 3,其中  $S$  为实测沉降, $\hat{S}$  为拟合沉降.

由表 3 知拟合误差最大为 5-1 号试桩,在第 8 级荷载作用下误差为 25.6%,比静载荷试验实测的沉降多 3.76 mm. 误差最小的为 5-3 号试桩,在第 8 级荷载作用下误差仅为 8.8%,比静载荷试验实测的沉降多 2.09 mm. 这比之按总沉降量判定缓变型  $Q-S$  曲线的单桩抗压极限承载力准则<sup>[9]</sup> 40 mm 小很多,可认为实测曲线和拟合曲线吻合较好. 用完整指数曲线拟合实测单桩竖向静载荷试验的  $Q-S$  曲线,在工程意义上讲是可行的.

表3 试桩沉降分析  
Tab.3 Settlement analysis of test piles

荷载	$S/\text{mm}$	$\hat{S}/\text{mm}$	$\frac{ S-\hat{S} }{S} \times 100$
5-1 号桩第 8 级荷载	14.67	18.43	25.61
5-2 号桩第 8 级荷载	18.31	22.68	23.90
5-2 号桩第 8 级荷载	24.03	26.12	8.73
5-4 号桩第 8 级荷载	10.07	9.98	0.91
5-4 号桩第 9 级荷载	12.94	13.09	1.22
5-4 号桩第 10 级荷载	16.58	18.39	10.91

5-4 号桩静载荷试验第 10 级荷载为 12 000 kN,已达到设计极限承载力,但试桩未达破坏,由表 3 知第 8 级和第 9 级误差不大,分别为 0.9% 和 1.2%,比较接近,而第 10 级误差突然增大,为 10.9%,由差分原理知在第 10 级荷载作用下 5-4 号试桩  $Q-S$  曲线斜率变化很大,已接近弹塑性段末期,接近破坏,误差变大是合理的.

### 3 用完整指数函数判定、预测单桩的极限承载力及其相应沉降

#### 3.1 用最大曲率点对单桩竖向极限承载力及其相应桩顶沉降的判定

由 1.1 节分析知指数函数数学模型可由初始的最大斜率  $K_m$  和  $S$  趋无限大时的极限值  $P_m$  进行确定,而达到  $P_m$  时, $S$  理论上为无限大,与实际破坏荷载和其对应沉降值不一致,因此无法用极限值来预

测单桩的极限承载力及其相应桩顶沉降. 规范<sup>[10]</sup>规定把静载荷试验实测  $Q-S$  曲线陡降段的起始点或缓变性  $Q-S$  曲线桩顶沉降  $S$  达 40 mm 的承载力作为工程上的极限承载力. 寻找一个指数模型的特征点来判定破坏点位置, 有很多学者也在这方面进行了探讨<sup>[1-5]</sup>, 最大曲率点是完整指数函数上唯一的特征点, 本节就对以此特征点判定及预测竖向荷载作用下单桩的极限承载力及其相应桩顶沉降的可行性进行了探讨.

从图 2、表 3 可知, 设计的 5-1 号试桩、5-2 号试桩、5-3 号试桩静载荷试验因在破坏前荷载分级太少, 导致在弹塑性阶段的误差稍大, 而 5-4 号试桩荷载在破坏前分级较多却没能达到破坏; 文献[4]中 S2 号试桩的静载试验荷载分级较多, 相比上面 4 根试桩, 较合适用来验证 1.2 节确定完整指数函数参数  $a, b$  的差分形式最小二乘解法, 并可验证最大曲率点判定单桩竖向荷载作用下的极限承载力及其相应桩顶沉降量的可行性.

S2 号试桩长 10 m, 桩径 300 mm  $\times$  300 mm. 实测  $Q-S$  曲线和拟合  $Q-S$  曲线如图 3 所示.

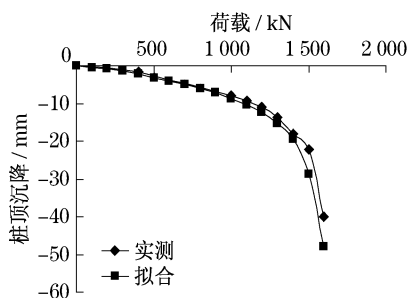


图 3 S2 号桩荷载-沉降曲线

Fig. 3 Loading-settlement curve of Pile S2

由图 3 可见, 实测的 S2 号试桩  $Q-S$  曲线和拟合的  $Q-S$  曲线吻合较好, 可知用完整指数函数的差分形式最小二乘法确定的指数函数参数是足够精确的, 可用于实际工程, 能反映出  $Q-S$  曲线变化的规律. S2 号试桩的实测桩顶沉降和拟合桩顶沉降及它们之间误差分析如表 4 所示, 误差较大点主要发生在第 1 级荷载附近以及第 15 级荷载和第 16 级荷载处, 沉降误差第 1 级为 29.4%, 第 15 级为 29.9%, 第 16 级为 20.1%. 第 1 级的荷载影响因素很多, 有些学者建议拟合时把最初的几点删除, 本文中分析结果显示这样的建议是合理的; 而第 15 级荷载是静载试验做到破坏时陡降段的起始点, 即静载试验判定极限承载力的点, 根据差分计算的原理分析, 此处受斜率变化的影响较大, 因此导致此处误差较大, 进

而知晓指数函数最大曲率点应在第 15 级荷载附近. 第 6 级到第 14 级指数函数拟合沉降误差较小, 均在 14% 之内, 且有持续增加的趋势, 到第 15 级变化最大, 可见  $Q-S$  曲线的最大曲率点在此处是合理的. 对指数函数式(1)进行求导计算, 推导出最大曲率点对应式(9).

表 4 S2 号桩沉降分析  
Tab. 4 Settlement analysis of Pile S2

各级荷载/kN	实测沉降 $S/\text{mm}$	拟合沉降 $\hat{S}/\text{mm}$	$\hat{S} - S$	$\frac{ \hat{S} - S }{S} \times 100$
0	0	0	0	0
100	0.34	0.44	0.10	29.4
200	0.67	0.81	0.14	20.9
300	1.02	1.23	0.21	20.6
400	1.68	1.89	0.21	12.5
500	2.74	3.25	0.51	18.5
600	3.81	4.08	0.27	7.2
700	4.59	5.01	0.42	9.2
800	5.70	6.06	0.36	6.2
900	6.85	7.25	0.40	5.8
1 000	7.91	8.64	0.73	9.3
1 100	9.22	10.32	1.10	11.9
1 200	11.09	12.42	1.33	12.0
1 300	13.68	15.23	1.55	11.3
1 400	18.18	20.63	2.45	13.5
1 500	22.15	28.78	6.63	29.9
1 600	39.98	48.00	8.02	20.1

知曲率公式

$$k = \frac{|y''|}{[1 + (y')^2]^{\frac{3}{2}}} \quad (7)$$

将式(1)的一阶导数和二阶导数代入式(7)得

$$k = \frac{ab^2e^{-bx}}{(1 + a^2b^2e^{-2bx})^{3/2}} \quad (8)$$

求解  $k$  的最大值, 并把  $a = P_m, b = \frac{K_m}{P_m}$  代入即得荷载-沉降曲线最大曲率点坐标值  $P_u$

$$P_u = P_m \left[ 1 - \frac{1}{\sqrt{2} K_m} \right], \quad S_u = \frac{P_m}{K_m} \ln(\sqrt{2} k_m) \quad (9)$$

把拟合结果  $P_m, S_m$  代入式(9)可得拟合破坏点位置:  $P_u = 1\,543\text{ kN}, S_u = 47.98\text{ mm}$ . 与实测极限承载力和相对应桩顶沉降值  $P_c = 1\,500\text{ kN}, S_c = 22.15\text{ mm}$  比较, 最大曲率点在第 15 级荷载与第 16 级荷载之间, 最大曲率点荷载比静载试验实测极限承载力大 2.9%, 但拟合  $Q-S$  曲线在实测曲线  $Q-S$  内侧, 可认为用最大曲率点荷载判定极限承载力是精确

的,且从总体看,偏于保守,有利于工程安全;完整指数函数最大曲率点沉降比静载实测极限承载力(即试验第15级荷载)对应桩顶沉降大116.61%,与第16级荷载作用下的桩顶沉降比较,大于第16级荷载作用下桩顶沉降20.01%,说明第15级荷载到第16级荷载之间已很陡峭,可能已经过渡到塑性段,因此产生较大误差.用式(9)判定第2节中的4根桩的静载试验的极限承载力,结果如表5所示.

表5 试桩极限承载力分析

Tab.5 Ultimate bearing capacity analysis of test piles

桩号	实测极限承载力/kN	拟合极限承载力/kN	相对误差/%	荷载分级带来的相对误差/%
5-1	9 540	9 580	0.4	11.1
5-2	9 900	9 953	0.5	12.5
5-3	8 400	8 488	10.5	11.1
5-4	>12 000	12 541		

由表5可知用曲率最大点判定桩的极限承载力,5-1号、5-2号、5-3号三桩的拟合值均比静载得到的极限承载力大,最大的为5-3号桩,大于实测值10.5%,但仍小于荷载分级带来的误差11.1%,即小于下级的荷载,说明用完整指数最大曲率点判定的极限承载力在陡降段内,用完整指数函数的最大曲率点判定单桩的极限承载力是合理的.

用最大曲率点判定单桩破坏时桩顶沉降如表6,除5-4号试桩没有测出破坏时桩顶沉降而不能比较外,5-1号、5-2号、5-3号三桩拟合得到的破坏荷载所对应的沉降均在陡降段内,这是合理的.以5-1号桩为例,拟合所得最大曲率点沉降比实测陡降段起始点沉降大170.6%,比实测陡降段终点沉降小66.4%,可知,用最大曲率点判定竖向荷载作用下单桩的破坏桩顶沉降具有合理性,但其精确度较差.

表6 试桩的破坏沉降分析

Tab.6 Broken settlement analysis of test piles

桩号	实测陡降段起始点沉降/mm	实测陡降段终点沉降/mm	最大曲率点拟合沉降/mm
5-1	14.67	110.06	37.0
5-2	10.74	120.20	44.6
5-3	24.03	103.00	57.9

### 3.2 用最大曲率点对单桩竖向极限承载力及其相应桩顶沉降的预测

面对现实静载试验受到种种条件的限制而未能实测出单桩的极限承载力的情况,预测单桩竖向极限承载力及其相应桩顶沉降就显得必要,上述5-4号桩由于反力梁不足以提供反力而不能达到破坏就

属于这样一个特例.

又从第3.1节的分析知,斜率的变化对判定单桩的极限承载力至关重要,而最大曲率点是斜率变化最大点,能用于判定单桩的竖向极限承载力,因此可尝试用最大曲率点位置预测单桩静载荷试验的极限承载力及其相应桩顶沉降.函数的差分形式最小二乘法受荷载分级多少的影响,特别是破坏的弹塑性段,只有分级足够多才能描述出此阶段斜率变化,进而精确预测塑性破坏阶段的曲线形状,拟合结果才能更好地逼近真实值.S2号试桩静载荷试验分级较多,可逐步观察预测极限承载力的变化情况,因此这里将以S2号试验为基础进行分析.S2号试桩静载荷试验荷载分16级,从前4级荷载开始预测,接着用前5级荷载进行预测,⋯,直至用前16级荷载预测;逐步预测的单桩的极限承载力和最大斜率如图4所示,横坐标表示的为预测所用的前几级荷载.

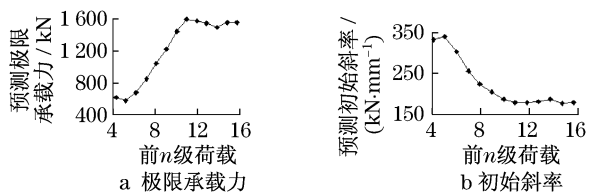


图4 S2号桩极限承载力和初始斜率预测

Fig.4 Prediction of ultimate bearing capacity and beginning slope of Pile S2

从图4a可以看出从前11级荷载开始,预测的极限承载力逐渐趋于稳定,从图4b可以得到相同的结论,从11级荷载预测的Q-S最大斜率才趋于稳定.从图3可见,第11级荷载为弹塑性的初始段,在第15级荷载处静载试验达到破坏.因此假如静载试验没能加载至弹塑性变形段,预测桩的极限承载力是难以达到目标的.基于上述分析,对本试验5-4号桩的Q-S曲线进行拟合预测,如图5.

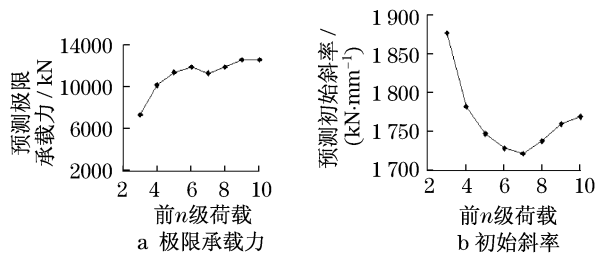


图5 5-4号桩极限承载力和初始斜率预测

Fig.5 Prediction of ultimate bearing capacity and beginning slope of Pile 5-4

从图5可以看出最后2次的预测基本稳定.从图2可见,5-4号桩第9级荷载、第10级荷载作用下 $Q-S$ 曲线明显弯曲,显然已进入了弹塑性变形段,认为用前10级测点预测单桩的极限承载力是合理的.同样可由式(9)计算出其最大曲率点坐标值 $P_u = 12\,541\text{ kN}$ ,  $S_u = 55.5\text{ mm}$ ,其作为5-4号桩的预测极限承载力和相应桩顶沉降值.  $S_u = 55.5\text{ mm}$ 远大于实测第10级荷载作用下累计的沉降量 $16.58\text{ mm}$ ,与表6中加载至破坏的3根试桩类比,与破坏荷载作用下的沉降远大于前一级荷载沉降的规律一致,但相对误差偏大.

## 4 结论

(1) 用完整指数函数的差分形式最小二乘法求解完整指数函数的参数是可信的,便于工程人员使用.与实测极限承载力相比,预测的平均相对误差为3.8%,略大于文献[5]用完整指数函数对67根灌注桩拟合的平均相对误差2.3%,但依然很小,可认为完整指数函数模型可用于常州地区大直径深长灌注桩 $Q-S$ 曲线拟合及其极限承载力预测.

(2) 用最大曲率点判定桩的极限承载力,所得结果相对较保守,有利于工程安全;可以用最大曲率点判定相应桩顶沉降,但误差偏大.

(3) 用完整指数函数可以预测静载荷试验未达破坏情况下的单桩极限承载力,但前提条件要有部分实测点在第2阶段即弹塑性段,且在弹塑性段分级越多预测越精确.建议对可能做不到破坏的单桩竖向静载荷试验在弹塑性段要尽可能多次分级加载,以便预测.

(4) 用完整指数函数预测单桩的极限承载力所对应的桩顶沉降具有一定的合理性,但不够精确,可为研究提供参考,此方面的工作有待进一步完善.

## 参考文献:

[1] 高笑娟,朱向荣.用双曲线法预测挤扩支盘桩的极限承载力[J].岩土力学,2006,27(9):1596.  
GAO Xiaojuan, ZHU Xiangrong. Forecasting ultimate bearing capacity of single squeezed branch pile by hyperbola method

[J]. Rock and Soil Mechanics, 2006, 27(9): 1596.  
[2] 赵明华,胡志清.预估试桩极限承载力的调整双曲线法[J].建筑结构,1995(3):47.  
ZHAO Minghua, HU Zhiqing. Adjusted hyperbola method of forecasting ultimate bearing capacity of test pile[J]. Journal of Building Structures, 1995(3): 47.  
[3] 蒋忠信.单桩荷载-位移曲线曲率极值点的数学描述[J].勘察科学技术,2002(3):3.  
JIANG Zhongxin. Mathematical description of curvature extremum on load deformation curve for single pile[J]. Science and Technology of Exploration, 2002(3): 3.  
[4] 修朝英,李大展.单桩垂直静载试验 $P-S$ 曲线的数学描述和极限承载力的预测[J].岩土工程学报,1988,10(6):64.  
XIU Chaoying, LI Dazhan. Mathematical description of vertical static loading test  $P-S$  curve of single pile and prediction of its ultimate bearing capacity[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 1988, 10(6): 64.  
[5] 邓志勇,陆培毅.几种单桩竖向极限承载力预测模型的对比如分析[J].岩土力学,2002,23(4):428.  
DENG Zhiyong, LU Peiyi. Comparison and analysis of several predicating models of ultimate bearing capacity of single pile [J]. Rock and Soil Mechanics, 2002, 23(4): 428.  
[6] 张怡权,夏柏如.多分支承载力盘桩单桩竖向静载试验极限承载力的判定[J].探矿工程,2007(5):27.  
ZHANG Yiquan, XIA Bairu. Determination of the multi-branch pile limit bearing capacity on the basis of vertical static loading test[J]. Exploration Engineering Mechanics, 2007(5): 27.  
[7] 王庆云.指数曲线模型用于支盘桩单桩极限承载力预测[J].山西建筑,2008,34(4):127.  
WANG Qingyun. Exponential curve model for prediction of ultimate bearing capacity of the branch single pile [J]. Shanxi Architecture, 2008, 34(4): 127.  
[8] 同济大学数学教研室.高等数学[M].北京:高等教育出版社,1996.  
Teaching and Research Section of Mathematics of Tongji University. Advanced mathematics [M]. Beijing: Higher Education Press, 1996.  
[9] 中国建筑科学研究院. JGJ 106—2003 建筑基桩检测技术规范[S].北京:中国建筑工业出版社,2003.  
Ministry of House and Urban-Rural Development of the People's Republic of China. JGJ 106—2003 Technical code for testing of building foundation piles [S]. Beijing: China Architecture and Building Press, 2003.  
[10] 中华人民共和国住房和城乡建设部. GB 50007—2002 建筑地基基础设计规范.北京:中国建筑工业出版社,2002.  
Ministry of House and Urban-Rural Development of the People's Republic of China. GB 50007—2002 Code for design of building foundation [S]. Beijing: China Architecture and Building Press, 2002.