

# 基于紧支径向基函数的流固交互作用数据传递

韩向科<sup>1</sup>, 钱若军<sup>1</sup>, 苏波<sup>2</sup>, 袁行飞<sup>3</sup>

(1. 同济大学 建筑工程系, 上海 200092; 2. 江苏大学 理学院, 江苏 镇江 212013; 3. 浙江大学 建筑工程学院, 浙江 杭州 310027)

**摘要:** 根据界面能量守恒原理, 将紧支径向基函数(compactly supported radial basis function, CRBF)引入流固交互作用分析领域, 提出了基于CRBF插值的流固交互界面数据传递(CRBF/FSI). 推导了界面位移传递矩阵 $\mathbf{H}$ , 并根据CRBF/FSI算法编制了相应的界面信息传递的计算程序. 以三维交互界面的位移信息传递为例, 将数值计算结果和解析解进行了对比分析, 结果表明, CRBF/FSI算法计算效率高, 计算结果准确, 是一种适合处理大型复杂交互界面的流固信息传递方法, 具有良好的工程应用前景.

**关键词:** 流固交互作用; 数据传递; 紧支径向基函数; 能量守恒

中图分类号: TU 398

文献标识码: A

## Data Exchange Method for Fluid-structure Interaction Based on Interpolation Algorithm Adopting Compactly Supported Radial Based Function

HAN Xiangke<sup>1</sup>, QIAN Ruojun<sup>1</sup>, SU Bo<sup>1,2</sup>, YUAN Xingfei<sup>3</sup>

(1. Department of Building Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, China; 2. Faculty of Science, Jiangsu University, Zhenjiang 212013, China; 3. College of Building Engineering, Zhejiang University, Hangzhou 310027, China)

**Abstract:** Based on principle of conservation of energy, a method adopting compactly supported radial basis function (CRBF) is proposed to perform fluid-structure interaction (FSI) analysis. The displacement transfer matrix  $\mathbf{H}$  is deduced and a corresponding program by CRBF/FSI algorithm is developed. Example of displacement exchange with 3D interface is studied. The numerical solution by CRBF/FSI method is compared with analytical solution. The result shows that CRBF/FSI method is efficient and accurate. It is suitable for FSI data exchange with complicated interface and has a bright future in project application.

**Key words:** fluid-structure interaction; data exchange; compactly supported radial based function; energy conservation

流固交互作用(fluid-structure interaction, FSI)是目前很多领域研究的热点和难点之一, 其关键在于如何有效地进行流体域和固体域之间的数据传递. 通常情况下计算流体动力学(computational fluid dynamics, CFD)要求的网格密度比计算结构动力学(computational structure dynamics, CSD)大得多, 由此产生交互界面上两套非匹配网格之间的数据传递, 在数学上是一个双向插值问题<sup>[1]</sup>. 对此, 研究者提出了许多不同的方法, 总体上可以分为局部插值法<sup>[2]</sup>, 如映射插值法<sup>[1,3-4]</sup>、加权余量法<sup>[5-6]</sup>、常体积转换法(CVT)<sup>[7]</sup>和整体插值法<sup>[3]</sup>, 如样条函数法<sup>[8-10]</sup>, Shepard方法<sup>[11-12]</sup>. 局部插值法是目前较多使用的方法, 也是最直接的方法, 但应用局部插值法不可避免地涉及到映射点的搜寻问题, 这需要一定算法, 特别是对于具有复杂几何外形的界面, 更加难以处理, 直接影响到计算精度. 整体插值法是从全局出发, 域内任意一点物理量可由物理场(固体或流体)其他点的信息计算得到. 整体插值法实际上已经摒弃了网格的概念, 因此更容易处理流固接触界面间的不匹配网格问题, 且数学公式简单, 计算结果更为准确. 但与局部插值法相比, 计算时间较长. 到目前为止, 对于具有复杂交互界面的三维流固交互作用问题, 寻求一种既精确又高效的数据传递方法仍然是一个巨大挑战.

近些年来, 数学界对以径向基函数(radial basis function, RBF)为基础的近似方法做了大量的研究工作<sup>[13-15]</sup>, 有力地推动了径向基函数插值法的应用, 并得到了令人满意的结果<sup>[16]</sup>. 最初RBF是散乱

收稿日期: 2009-09-04

基金项目: 国家自然科学基金(50638050, 50708092); 浙江省自然科学基金(R1080363); 江苏大学高级专业人才科研启动基金(10JDG047)

第一作者: 韩向科(1982—), 男, 工学博士, 主要研究方向为空间结构、流固耦合. E-mail: hanxiangke@126.com

通讯作者: 钱若军(1945—), 男, 教授, 博士生导师, 主要研究方向为空间结构、流固耦合. E-mail: prjq@126.com

数据插值的一种方法,具有计算格式简单、节点配置灵活、计算工作量小、精度相对较高等优点,越来越引起人们的关注,应用面不断拓宽.在径向基函数的基础上,Wendland<sup>[17]</sup>提出的改进的紧支径向基函数受到了越来越多的重视.

本文充分利用紧支径向基函数特性,根据能量原理将 CRBF 引入流固交互作用分析领域,使界面信息传递方法兼具了局部插值法和整体插值法的优点.可以根据具体问题的不同情况,选用合适的紧支半径,更有利于大型问题的求解,以满足不同的计算效率和计算精度的要求.并根据所提出的 CRBF/FSI 算法编制了相应的计算程序,对三维交互界面上的位移信息传递进行了计算分析.

## 1 CRBF 插值函数及其定解条件

### 1.1 CRBF 插值函数

径向基函数是一类特殊的函数,它以空间距离  $r$  为基本变量,其定义如下<sup>[13]</sup>:

$$s(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N \alpha_i \phi(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|) + p(\mathbf{x}) \quad (1)$$

式中: $s(\mathbf{x})$  为  $\mathbf{x}$  点处的未知函数值; $N$  为数据点总数; $\alpha_i$  为相应于第  $i$  个数据点的待求系数; $\phi$  为选用的径向基函数;函数  $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|$  为欧几里得距离; $\mathbf{x}$  为未知点坐标  $(x, y, z)$ ;  $\mathbf{x}_i$  为第  $i$  个已知数据点坐标  $\mathbf{x}_i(x, y, z)$ ;  $p(\mathbf{x})$  为低阶  $d$  维多项式,对于  $\leq 2$  阶的有条件正定基函数,  $p(\mathbf{x})$  可以采用以下线性多项式<sup>[13]</sup>表示:

$$p(\mathbf{x}) = \gamma_0 + \gamma_x x + \gamma_y y + \gamma_z z \quad (2)$$

式中: $\gamma_i$  为系数.

而具有紧支特性的径向基函数(又称紧支径向基函数),在计算中求解矩阵呈稀疏、带状分布,因此更有利于大型问题的求解<sup>[18-19]</sup>.Wendlan<sup>[17]</sup>定义紧支径向基函数形式如下:

$$\phi(R) = \begin{cases} (1-R)^n P(R) & 0 \leq R \leq 1 \\ 0 & R > 1 \end{cases} \quad (3)$$

式中: $n$  为正整数; $p(R)$  为关于  $R$  的多项式; $R = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\| / r_i$ ,  $r_i$  为紧支域半径.

### 1.2 RBF 插值函数的定解条件

式(1)中的系数  $\alpha_i$  和  $p(\mathbf{x})$  可以根据式(4)和式(5)的定解条件求得

$$s(\mathbf{x}_i) = g_i \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (4)$$

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i q(\mathbf{x}) = 0 \quad (5)$$

式中:多项式  $q(\mathbf{x})$  为满足  $\deg(q(\mathbf{x})) \leq \deg(p(\mathbf{x}))$  的所有多项式; $g_i$  为点  $\mathbf{x}_i$  上的标量值.

## 2 界面数据传递能量守恒原理

交互界面的能量守恒原理是指在交互作用过程中,交互界面上流体荷载(外力)、固体力(内力)在界面位移上所做的虚功相等<sup>[5,20-21]</sup>,即

$$\delta W = \delta \mathbf{u}_s^T \mathbf{f}_s = \delta \mathbf{u}_f^T \mathbf{f}_f \quad (6)$$

式中: $\delta \mathbf{u}_s, \delta \mathbf{u}_f$  分别为交互界面上固体、流体虚位移; $\mathbf{f}_s, \mathbf{f}_f$  分别为交互界面上固体、流体表面力.

交互界面上流体、固体的虚位移之间关系可以用下式表示:

$$\delta \mathbf{u}_f = \mathbf{H} \delta \mathbf{u}_s \quad (7)$$

式中: $\mathbf{H}$  为界面位移传递矩阵, $\mathbf{H}$  可由不同计算方法得到,本文采用基于 CRBF 插值的计算方法.将式(7)代入式(6)可得以下传递计算公式:

$$\mathbf{f}_s = \mathbf{H}^T \mathbf{f}_f \quad (8)$$

## 3 界面位移传递矩阵 $\mathbf{H}$ 的计算

设在流固交互界面上,固体域和流体域分别存在  $N_s$  和  $N_f$  个节点

$$\mathbf{x}_{si} = (x_{si}, y_{si}, z_{si}) \in \mathbf{R}^3, \quad i = 1, 2, \dots, N_s \quad (9)$$

$$\mathbf{x}_{fi} = (x_{fi}, y_{fi}, z_{fi}) \in \mathbf{R}^3, \quad i = 1, 2, \dots, N_f \quad (10)$$

交互界面上固体和流体节点的位移矢量分别为  $\mathbf{u}_s(\mathbf{x}_{si}), \mathbf{u}_f(\mathbf{x}_{fi})$ .将式(9)代入式(4),并结合式(5),经过简单的计算,  $N_s$  个固体节点位移  $\mathbf{u}_s$  在  $x$  向的位移分量  $u_{sx}$  可用下式表示:

$$\mathbf{U}_{sx} = \mathbf{C}_{ss} \mathbf{a}_x \quad (11)$$

式中:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_{sx} &= [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad u_{sx}]^T; \\ \mathbf{a}_x &= [\gamma_0^x \quad \gamma_x^x \quad \gamma_y^x \quad \gamma_z^x \quad \alpha_{s1}^x \quad \dots \quad \alpha_{sN_s}^x]^T; \\ \mathbf{C}_{ss} &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{P} \\ \mathbf{P}^T & \mathbf{M} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (12)$$

其中,

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_{s1} & x_{s2} & \dots & x_{sN_s} \\ y_{s1} & y_{s2} & \dots & y_{sN_s} \\ z_{s1} & z_{s2} & \dots & z_{sN_s} \end{bmatrix}; \\ \mathbf{M} &= \begin{bmatrix} \phi_{s1s1} & \phi_{s1s2} & \dots & \phi_{s1N_s} \\ \vdots & \vdots & \phi_{si sj} & \vdots \\ \phi_{N_s s1} & \phi_{N_s s2} & \dots & \phi_{N_s N_s} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (13)$$

其中  $\phi_{ij}$  为 CRBF 函数, 本文取<sup>[17]</sup>

$$\phi(R) = (1 - R)_+^6 (35R^2 + 18R + 3) \quad (14)$$

式中:  $R$  为紧支域半径.

根据式(11), 即可求得系数  $a_x$  为

$$a_x = C_{ss}^{-1} U_{sx} \quad (15)$$

为确定流体表面节点的位移, 首先建立如下点位矩阵  $A_{fs}$ :

$$A_{fs} = \begin{bmatrix} 1 & x_{f1} & y_{f1} & z_{f1} & \phi_{f1s1} & \phi_{f1s2} & \cdots & \phi_{f1sN} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{fN} & y_{fN} & z_{fN} & \phi_{fNs1} & \phi_{fNs2} & \cdots & \phi_{fNsN} \end{bmatrix} \quad (16)$$

流体表面节点的位移  $u_{fx}$  可以表示为

$$u_{fx} = A_{fs} a_x = A_{fs} C_{ss}^{-1} U_{sx} \quad (17)$$

经过简单的矩阵运算可得到如下形式:

$$u_{fx} = A_{fs} \begin{bmatrix} M_p P M^{-1} \\ M^{-1} - M^{-1} P^T M_p P M^{-1} \end{bmatrix} u_{sx} \quad (18)$$

式中:  $M_p = (P M^{-1} P^T)^{-1}$ .

由式(18)可直接写出传递矩阵  $H$  为

$$H = A_{fs} \begin{bmatrix} M_p P M^{-1} \\ M^{-1} - M^{-1} P^T M_p P M^{-1} \end{bmatrix} \quad (19)$$

类似地, 流体表面  $y, z$  方向的节点位移  $u_{fy}, u_{fz}$  也由固体表面  $y, z$  方向的节点位移  $u_{sy}, u_{sz}$  左乘以传递矩阵  $H$  求得. 得到传递矩阵  $H$  后, 根据能量守恒原理即可编制相应的计算程序, 对流固交互界面位移、速度、压力等物理量进行传递.

#### 4 三维壳体交互界面的位移传递

假定界面位移场可由以下解析式表示<sup>[22]</sup>:

$$d_x(x, y) = 3.0 \times [1 + \cos((x - 0.5)\pi)] \times [1 + \cos((y - 1.0)\pi)] \times [1 + \cos((z - 1.0)\pi)] + 0.5 \quad (20)$$

计算域取  $0 \leq x \leq 1, 0.5 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 2$ . CSD, CFD 界面均为三角形单元, 考虑 4 种不同网格密度形式<sup>[23]</sup>, 如图 1 所示, 其中 Mesh1 为  $10 \times 20$ ; Mesh2 为  $20 \times 40$ ; Mesh3 为  $30 \times 40$ ; Mesh4 为  $40 \times 80$ . 根据式(20)可求得流体界面网格点在  $x$  向的位移解析解  $u_{fx}^A$ ; 根据 CRBF/FSI 算法可求得流体界面网格点在  $x$  向的数值解  $u_{fx}^N$ . 计算流体界面每个网格点解析解和数值解, 并进行相关分析.

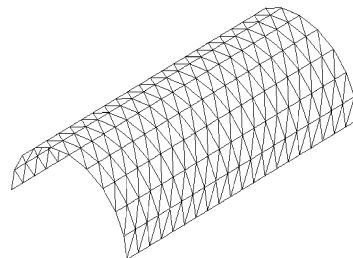


图 1 网格划分示意图

Fig.1 Meshing schemes

考虑一般情况下 CFD 的网格密度大于 CSD 网格密度, 如表 1 所示, 利用主频为 1.73 GHz 的 CPU, 内存为 512 MB 的 PC 作三组界面网格计算, 组 1(G1)为 Mesh1-Mesh2; 组 2(G2)为 Mesh2-Mesh3; 组 3(G3)为 Mesh3-Mesh4. 同时在网格密度不变的情况下, 对于 CRBF/FSI 算法取紧支半径为流固交互界面上单元的最大尺寸的整数倍, 分别取 2—8 倍. 列出每组的 CRBF/FSI 和 RBF/FSI<sup>[23]</sup> 求解用时和相关系数. 紧支半径对相关系数和求解用时的影响如图 2 和图 3 所示.

表 1 位移传递计算分组、求解用时及相关系数

Tab.1 Groups of displacement exchange, solution time and relevant coefficients

组合方式	用时/s							
	RBF/FSI	CRBF/FSI						
		2 倍	3 倍	4 倍	5 倍	6 倍	7 倍	8 倍
G1	5.027 9	0.884 7	1.010 2	1.344 1	1.930 4	2.772 8	3.500 5	4.134 0
G2	1 763.111 2	17.813 6	19.165 4	23.275 7	30.555 5	44.817 2	71.558 7	106.632 8
G3	9 464.592 2	54.791 0	58.230 0	66.009 0	78.730 8	108.909 0	161.377 0	243.842 2
组合方式	相关系数							
	RBF/FSI	CRBF/FSI						
		2 倍	3 倍	4 倍	5 倍	6 倍	7 倍	8 倍
G1	0.999 987 9	0.9788 532 8	0.999 862 52	0.999 948 23	0.999 984 75	0.999 994 95	0.999 998 11	0.999 999 24
G2	0.999 999 3	0.9999 841 0	0.999 989 23	0.999 996 92	0.999 998 97	0.999 999 61	0.999 999 83	0.999 999 92
G3	0.999 038 7	0.9999 278 4	0.999 979 96	0.999 995 15	0.999 998 54	0.999 999 47	0.999 999 78	0.999 999 90

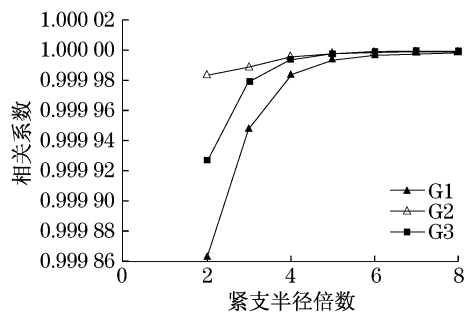


图 2 紧支半径对相关系数的影响

Fig.2 Compact radius-relevant coefficient curves

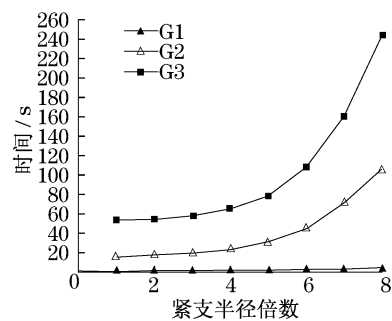


图 3 紧支半径对求解时间的影响

Fig.3 Compact radius-solution time curves

从表 1 和图 2 可以看出,对于计算分组 G1,G2,随着计算网格密度的增大,相关系数随之增大,这说明计算精度随网格密度的增大而增大.理论上讲,

随着网格密度的增加,网格面逐渐趋近于壳体几何面,因此计算精度随之增加是合理的.但对比计算分组 G2,G3 可以看出,随着网格密度的增加,计算精度并没有增加,相反略有降低.分析其原因在于,虽然分组 G3 的网格密度最大,但可以看出,分组 G3 的固体网格节点数与流体网格节点数之比  $\lambda_r$  却较分组 G2 有所下降,分别为  $\lambda_{r3} = 1\,271/3\,321 = 0.382\,71$  和  $\lambda_{r2} = 861/1\,271 = 0.677\,41$ ,这意味着在单位紧支域内,分组 G3 中已知信息节点数(固体网格节点数)相对于未知信息节点数(流体网格节点数)有所降低,因此其精度略低于分组 G2 是合理的.若在网格密度增大的同时保持  $\lambda_r$  不变,即在 G3 中 Mesh4 节点数减小为 1 845 ( $40 \times 44$ ), $\lambda_{r3} = 11\,271/1\,845 = 0.688 \approx \lambda_{r2}$ ,计算后相关系数见表 2.

由于 Mesh4 网格节点数减小,导致  $\lambda_{r3}$  增加,因此在同样的紧支半径倍数下精度增加,但增幅并不明显.由表 1 和图 2,3 还可以看出,随着紧支半径的增大,相关系数随之增大,但当紧支半径约为单元最大尺寸的 6 倍时,这时相关系数与 RBF/FSI 算法大致相等,但相关系数增加显著减缓;此外,求解用时随着网格密度的增加而增加,也随着紧支半径的增大相应增加,网格密度越大,求解用时随紧支半径的增大显著增加.

表 2 分组 G3(Mesh4;节点数=1 845)位移传递相关系数

Tab.2 Relevant coefficients of displacement exchange of Group 3 with Mesh 4:nodes=1 845

紧支半径倍数	2 倍	3 倍	4 倍	5 倍	6 倍	7 倍	8 倍
相关系数	0.999 984 81	0.999 990 38	0.999 997 36	0.999 999 17	0.999 999 66	0.999 999 83	0.999 999 91

综上所述,在合理网格级配的前提下,大的紧支半径和高密度的网格使得计算精度提高,但同时求解用时大幅增加,计算精度和求解用时不能同时得到满足.实际分析中,应将紧支半径和网格密度控制在一个合理的范围之内.同 RBF/FSI 相比,CRBF/FSI 算法求解用时大幅度降低,当紧支半径控制在一定范围时,精度也高于 RBF/FSI.这说明 CRBF/FSI 算法更加适合大型复杂交互界面的数据传输计算.

## 5 结语

本文给出了进行界面信息传递的 CRBF/FSI 理论和方法.根据能量守恒原理,通过引入 CRBF 插值,建立传递矩阵,从而可实现界面位移、速度、压力等信息的传递.CRBF/FSI 算法允许 CSD,CFD 采用任意网格形式,因此在 CSD 和 CFD 计算程序之间可

以开发独立的界面信息传递的接口程序,很容易实现交互作用分析,具有良好的工程应用前景.算例分析表明,CRBF/FSI 算法比 RBF/FSI 算法<sup>[2]</sup>更适合大型复杂交互界面的数据传输计算,可以根据不同情况,选用合适的紧支半径和网格密度,以满足不同的计算效率和计算精度的要求.

## 参考文献:

- [1] Bathe Klaus-Jürgen, Zhang Hong, Ji Shanhong. Finite element analysis of fluid flows fully coupled with structural interactions [J]. Computers & Structures, 1999, 72: 1.
- [2] 苏波. 流固交互作用理论方法研究[D]. 上海: 同济大学土木工程学院, 2009.  
SU Bo. Study on the theory and method of fluid-structure interaction problems [D]. Shanghai: Tongji University. College of Civil Engineering, 2009.
- [3] Dettmer W, Perić D. A computational framework for fluid-rigid

- body interaction; finite element formulation and applications [J]. Comput Mechods Appl Mech Engrg, 2006, 195: 1633.
- [4] Dettmer W, Perić D. A computational framework for fluid-structure interaction: finite element formulation and applications [J]. Comput Methods Appl Mech Engrg, 2006, 195: 5754.
- [5] de Boer A, van Zuijlen A H, Bijl H. Review of coupling methods for non-matching meshes [J]. Comput Methods Appl Mech Engrg, 2007, 196: 1515.
- [6] Keith Stein, Richard Benney, Vinay Kalro, et al. Parachute fluid-structure interactions; 3-D computation [J]. Comput Methods Appl Mech Engrg, 2000, 190: 373.
- [7] Goura G S L, Badcock K J. A data exchange method for fluid-structure interaction problems [J]. The Aeronautical Journal, 2001, 105: 215.
- [8] Robert L Harder, Robert N Desmarais. Interpolation using surface splines [J]. Journal of Aircraft, 1972, 9(2): 189.
- [9] Yu Z W. Surface interpolation from irregularly distributed points using surface splines with Fortran program [J]. Computers & Geosciences, 2001, 127: 877.
- [10] Appa K. Finite-surface spline [J]. Aircraft, 1989, 26(4): 495.
- [11] Shepard D. A two dimensional interpolation function for regularly spaced data [C] // Proc 23d National Conf of the Association for Computing Machinery. Princeton: ACM, 1968: 517 - 524.
- [12] WU Zongmin. The model, theory and method of scattered data approximation [M]. Beijing: Science Press, 2007.
- [13] Martin D Buhmann. Radial basis functions: theory and implementations [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2004.
- [14] Wu Z M. Multivariate compactly supported positive definite radial functions [J]. Advances in Computational Mathematics, 1995, 4: 283.
- [15] 吴宗敏. 径向基函数、散乱数据拟合与无网格偏微分方程数值解 [J]. 工程数学学报, 2002, 19(2): 1.
- WU Zongmin. Radial basis function scattered data interpolation and the meshless method of numerical solution of PDEs [J]. Journal of Engineering Mathematics, 2002, 19(2): 1.
- [16] Frank R. Scattered data interpolation: tests of some methods [J]. MathComp, 1982, 38: 191.
- [17] Wendland H. Piecewise polynomial, positive definite an compactly supported radial basis functions of minimal degree [J]. Adv Comput Math, 1995, 4: 389.
- [18] Kojekine N, Hagiwara I, Savchenko V. Software tools using CSRBFs for processing scattered data [J]. Computer & Graphics, 2003, 27(2): 311.
- [19] Ohtake Y, Belyaev A, Seidel H P. 3D scattered data approximation with adaptive compactly supported radial basis functions [C] // Proceedings of the Shape Modeling International. [S. L.]: IEEE Computer Society, 2004: 1 - 9.
- [20] Farhat C, Lesoinne M, LeTallech P. Load and motion transfer algorithms for fluid/structure interaction problems with non-matching discrete interfaces: momentum and energy conservation, optimal discretization and application to aeroelasticity [J]. Comput Methods Appl Mech Engrg, 1998, 157: 95.
- [21] Jaiman R K, Jiao X, Geubelle P H, et al. Conservative load transfer along curved fluid-solid interface with non-matching meshes [J]. Journal of Computational Physics, 2006, 218: 372.
- [22] Juan Raul Cebal. Loose coupling algorithms for fluid-structure interaction [D]. Fairfax County: George Mason University. Institution for Computational Sciences and Informatics, 1996.
- [23] 苏波, 钱若军, 袁行飞, 等. 利用能量守恒和径向基函数插值的流固交互界面数据传递方法 [J]. 西安交通大学学报, 2009, 43: 114.
- SU Bo, QIAN Ruojun, YUAN Xingfei, et al. Data exchange method for fluid-structure interaction based on energy conservation and interpolation algorithm adopting radial based function [J]. Journal of Xi'an Jiaotong University, 2009, 43: 114.