

# 挡土墙主动和被动土压力的统一解

杨敏<sup>1,2</sup>, 刘斌<sup>1,2</sup>, 周建武<sup>1,2</sup>

(1. 同济大学 地下建筑与工程系, 上海 200092; 2. 同济大学 岩土及地下工程教育部重点实验室, 上海 200092)

**摘要:** 针对墙背倾斜、地表倾斜、墙后填土为粘性土、地表作用超载的挡土墙土压力计算问题, 基于平面滑裂面假定和极限平衡原理, 结合微分层解析法和图解法, 推导了挡土墙主动土压力和被动土压力的统一解, 可计算土压力沿墙身的分布、土压力合力及其作用点位置以及滑裂面土反力, 经典库仑和朗肯土压力为其特例. 提出了分层土土压力实用计算模型, 可以考虑墙背倾斜和粘性土的作用, 该模型可简化为现行以朗肯土压力理论为基础的分层土土压力计算方法. 通过与相关文献算法的比较验证了本文方法的合理性.

**关键词:** 挡土墙; 土压力; 平面滑裂面; 极限平衡原理; 分层土

**中图分类号:** TU 476<sup>+</sup>.4

**文献标识码:** A

## Unified Solution of Active and Passive Earth Pressure on Retaining Wall

YANG Min<sup>1,2</sup>, LIU Bin<sup>1,2</sup>, ZHOU Jianwu<sup>1,2</sup>

(1. Department of Geotechnical Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, China; 2. Key Laboratory of Geotechnical and Underground Engineering of the Ministry of Education, Tongji University, Shanghai 200092, China)

**Abstract:** Based on the plane failure surface hypothesis and the limit equilibrium theory, a unified solution for the distribution, total force, location of the resultant active and passive earth pressures on retaining walls and the reacting force on failure surfaces was derived using differential slice method and graphic method. The solution was applied to the case with a battered wall, inclined ground surface, cohesive backfill and distributed surcharge on the ground surface. The Coulomb's and Rankine's theories of earth pressures could be considered as the special cases of the unified solution. The practical calculation model of earth pressures for stratified soils was established under the condition of battered walls and cohesive backfills. This model could be reduced to the

current solution of earth pressures for stratified soils according to the Coulomb's theory of earth pressures. By contrast with earlier methods in the literature, the validity of the present solution was verified.

**Key words:** retaining wall; earth pressure; plane failure surface; limit equilibrium theory; stratified soil

经典库仑与朗肯土压力理论因概念明确、计算简便而被普遍应用, 但库仑土压力只适用于非粘性土, 朗肯土压力仅限于墙背竖直光滑、地面水平的情况. 如何求解一般情况下的挡土墙土压力, 诸多学者给予关注. 就粘性土的广义库仑解, 等值内摩擦角算法应用广泛, 但存在较多异议<sup>[1]</sup>, 直接考虑土体和墙土间的粘聚力, 顾慰慈<sup>[2]</sup>基于极限平衡原理推导了粘性土主动土压力的精确解, 但对超载和开裂的处理比较复杂, 胡晓军<sup>[3]</sup>对该精确解进行了改进, 林智勇等<sup>[4]</sup>进一步应用微分层解析法得到了粘性土主动土压力的解析解, 但文中采用朗肯土压力理论的土体开裂深度, 未考虑墙背倾斜和墙土间粘聚力的影响, 特别当采用微分层解析法时, 还会因未能详尽考虑土体开裂区域, 引起土压力分布值、合力值及作用点位置计算结果的偏差.

笔者以上述研究为基础, 结合微分层解析法和图解法推导了一般情况下挡土墙主动和被动土压力的统一计算公式, 改进了现有计算方法的不足, 明确了土压力的分布特征、合力作用点位置以及土体开裂区域, 并提出了分层土土压力实用计算模型, 适用于墙背倾斜、水平分层粘性土以及考虑墙土间粘聚力的情况, 最后通过算例将本文方法与相关文献算法进行了比较.

收稿日期: 2009-11-10

基金项目: 国家自然科学基金(40972179)

第一作者: 杨敏(1960—), 男, 教授, 博士生导师, 工学博士, 主要研究方向为桩基础、深基坑、软土地基变形控制设计理论以及土木工程信息技术. E-mail: Yangmin@tongji.edu.cn

通讯作者: 刘斌(1981—), 男, 博士生, 主要研究方向为地基处理和深基坑工程. E-mail: liubin163mail@163.com

## 1 土压力计算公式

微分层解析法又称薄层单元法, M. E. Karah 于 1960 年采用该方法对土压力沿墙身的非线性分布形态进行了计算, 随后诸多学者<sup>[5-6]</sup>对这一计算过程进行了分析, 并与库仑土压力进行比较, 验证了微分层解析法可解决库仑土压力分布值的问题. 笔者将该方法用于一般情况下挡土墙土压力计算(图 1). 基本假定: ①按照平面问题考虑; ②墙体为刚体, 墙高

$H$ , 墙背倾角为  $\alpha$ , 考虑墙土间的摩擦角  $\delta$  和粘聚力  $k$ ; ③填土倾角为  $\beta$ , 土体重度  $\gamma$ 、内摩擦角  $\varphi$  和粘聚力  $c$ , 土体剪切强度  $\tau$  满足库仑公式  $\tau = \sigma \tan \varphi + c$ ,  $\sigma$  为总应力; ④墙体发生偏离或挤向土体的位移, 墙后土体达到主动或被动极限状态, 形成楔形滑裂刚体,  $BD$  平面为滑裂面, 与水平方向夹角为  $\theta$ . 此外, 地表作用超载  $q_0$ . 沿深度  $z$  取平行于地表微分土层  $dz$ , 微分土层  $abed$  在重力  $dG$ 、土压力  $p$ 、土反力  $r$ 、土体粘聚力  $c$ 、墙土粘聚力  $k$  以及相邻上下微分土层间的土压力  $q$  和  $q + dq$  作用下处于平衡状态.

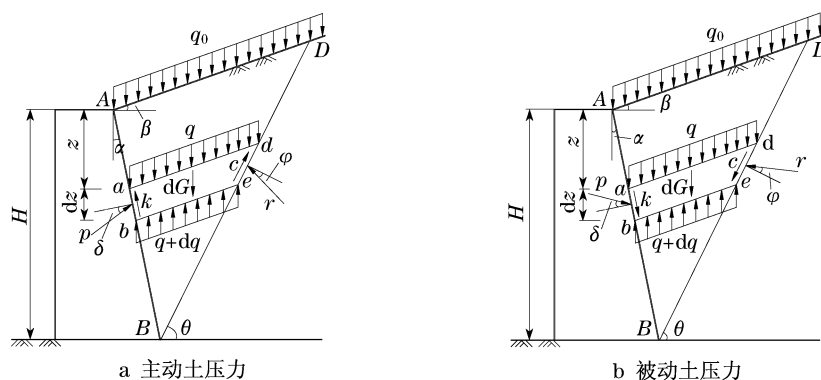


图 1 微分层解析法计算模型

Fig. 1 Differential slice analytical model

考虑图 1 中主动土压力与被动土压力计算模型的区别, 土压力  $p$  与土反力  $r$  在主动和被动情况下, 与作用面法线夹角的方向相反; 土体粘聚力  $c$  和墙土粘聚力  $k$  在主动和被动情况下, 作用方向也相反. 故以下主要对主动土压力进行推导, 当计算被动土压力时, 将主动情况下的  $\delta, \varphi, c$  和  $k$  分别变换为  $-\delta, -\varphi, -c$  和  $-k$  即可.

由水平方向力的平衡条件  $\sum X = 0$ , 可得

$$[p \cos(\alpha + \delta) - k \sin \alpha] l_{ab} - [r \sin(\theta - \varphi) - c \cos \theta] l_{de} = 0 \quad (1)$$

式中:  $l$  为线段的长度, 下标为该线段的名称,  $l_{ab} = dz / \cos \alpha$ ,  $l_{de} = [\cos(\alpha - \beta) dz] / [\cos \alpha \sin(\theta - \beta)]$ .

由竖直方向力的平衡条件  $\sum Y = 0$ , 可得

$$dG + q l_{ad} - (q + dq) l_{be} - [p \sin(\alpha + \delta) + k \cos \alpha] l_{ab} - [r \cos(\theta - \varphi) + c \sin \theta] l_{de} = 0 \quad (2)$$

式中:  $l_{ad} = (H - z) \cos(\alpha - \theta) / [\cos \alpha \sin(\theta - \beta)]$ ,  $l_{be} = (H - z - dz) \cos(\alpha - \theta) / [\cos \alpha \sin(\theta - \beta)]$ . 取微分土层  $abed$  在  $ed$  边上的中点为简化中心, 根据静力平衡条件  $\sum M = 0$ , 可得

$$q l_{ad} (l_{ad} \cos \beta / 2 - l_{de} \cos \theta / 2) - (q + dq) l_{be} \cdot (l_{be} \cos \beta / 2 + l_{de} \cos \theta / 2) + [p \sin(\beta - \alpha - \delta) - k \cos(\alpha - \beta)] l_{ab} (l_{ad} + l_{be}) / 2 +$$

$$dG (l_{ad} + l_{be}) \cos \beta / 4 = 0 \quad (3)$$

求解方程 (1)~(3), 得到微分方程

$$dq = \frac{\gamma \cos(\alpha - \beta)}{\cos \alpha} dz + \frac{\psi q}{H - z} dz + \frac{(\psi_3 \psi_4 - \psi_1 \psi_6) k - \psi_3 \psi_5 c}{(\psi_3 - \psi_1)(H - z)} dz \quad (4)$$

式中:  $\psi = (\psi_3 - \psi_1 \psi_2) / (\psi_3 - \psi_1)$ ,  $\psi_1 = \sin(\theta - \beta) \cdot \cos(\alpha + \delta + \varphi - \theta) / [\cos(\alpha - \theta) \sin(\theta - \varphi)]$ ,  $\psi_3 = 2 \sin(\delta + \alpha - \beta) \sin(\theta - \beta) / [\cos(\alpha - \theta) \cos \beta]$ ,  $\psi_4 = \sin(\theta - \beta) \sin(\alpha - \theta + \varphi) / [\cos(\alpha - \theta) \sin(\theta - \varphi)]$ ,  $\psi_5 = \cos(\alpha - \beta) \cos \varphi / [\cos(\alpha - \theta) \sin(\theta - \varphi)]$ ,  $\psi_6 = -2 \cos(\alpha - \beta) \sin(\theta - \beta) / [\cos(\alpha - \theta) \cos \beta]$ .

积分求解并考虑边界条件:  $z = 0, q = q_0$ , 得到土层间相互作用的土压力  $q$

$$q = q_0 H^\psi / (H - z)^\psi + \gamma K_{\gamma 0} [H^{\psi+1} - (H - z)^{\psi+1}] / (H - z)^\psi + (c K_{c0} + k K_{k0}) \cdot [H^\psi - (H - z)^\psi] / (H - z)^\psi \quad (5)$$

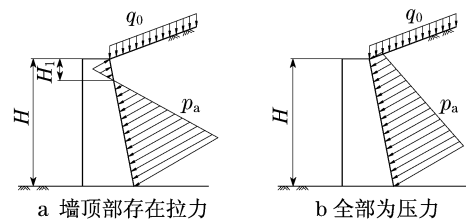
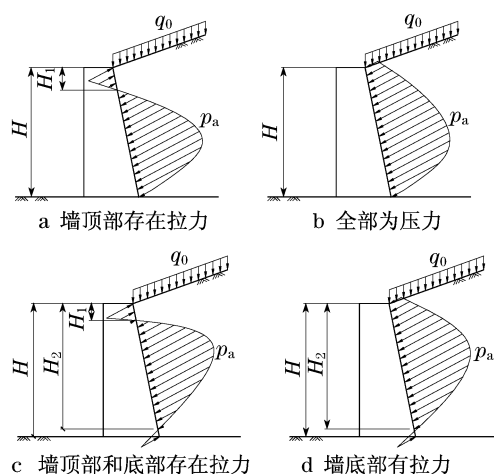
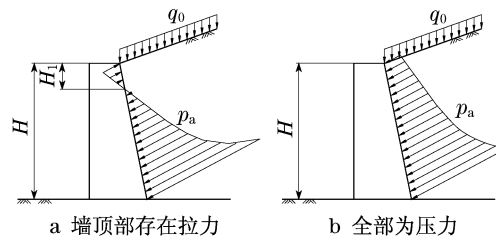
式中:  $K_{\gamma 0} = (\psi_3 - \psi_1) \cos(\alpha - \beta) / \cos \alpha (2 \psi_3 - \psi_1 - \psi_1 \psi_2)$ ,  $\psi_2 = 2 - 2 \cos(\alpha - \beta) \cos \theta / [\cos(\alpha - \theta) \cdot \cos \beta]$ ,  $K_{c0} = \psi_3 \psi_5 / (\psi_1 \psi_2 - \psi_3)$ ,  $K_{k0} = (\psi_3 \psi_4 - \psi_1 \psi_6) / (\psi_3 - \psi_1 \psi_2)$ .

则沿挡土墙墙背分布的土压力  $p$  为

$$p = q_0 K_q \frac{H^\psi}{(H-z)^\psi} + \gamma K_\gamma \frac{H^{\psi+1} - (H-z)^{\psi+1}}{(H-z)^\psi} + c[K_{c1}(H^\psi - (H-z)^\psi)/(H-z)^\psi + K_{c2}] + k[K_{k1}(H^\psi - (H-z)^\psi)/(H-z)^\psi + K_{k2}] \quad (6)$$

式中:  $K_q = (\psi_2 - 1)/(\psi_3 - \psi_1)$ ,  $K_\gamma = (\psi_2 - 1) \cdot \cos(\alpha - \beta)/[\cos \alpha (2\psi_3 - \psi_1 - \psi_1\psi_2)]$ ,  $K_{c1} = \psi_3\psi_5(1 - \psi_2)/[(\psi_3 - \psi_1)(\psi_3 - \psi_1\psi_2)]$ ,  $K_{c2} = \psi_5/(\psi_3 - \psi_1)$ ,  $K_{k1} = (\psi_2 - 1)(\psi_3\psi_4 - \psi_1\psi_6)/[(\psi_3 - \psi_1)(\psi_3 - \psi_1\psi_2)]$ ,  $K_{k2} = (\psi_6 - \psi_4)/(\psi_3 - \psi_1)$ .

根据式(6)分析土压力沿墙身分布,主动土压力  $p_a$  包括3种分布情况,如图2~4所示,图中  $H_1$  为挡墙顶部拉力值计算深度,  $H_2$  为挡墙底部拉力值计算深度. 当系数  $\psi = 0$  时,土压力沿墙身为线性分布;当系数  $\psi < 0$  时,土压力沿墙身为非线性分布;当系数  $\psi > 0$  时,土压力沿墙身也为非线性分布,且当接近墙底时,土压力呈发散趋势,即因为  $z$  趋于  $H$  时,式(6)中  $1/(H-z)^\psi$  项趋于  $\infty$ ,这是计算公式本身形式所决定的,而非实际情况,此时应取  $z$  为接近于  $H$  的值来计算土压力分布值. 上述3种主动土压力分布情况在相关试验资料中都有所反映<sup>[7-8]</sup>,但有关土压力中拉力值区域的研究极少有相关报道,特别在挡墙底部是否形成开裂区域有待研究.

图2  $\psi = 0$  时主动土压力分布Fig.2 Distribution of active earth pressures when  $\psi = 0$ 图3  $\psi < 0$  时主动土压力分布Fig.3 Distribution of active earth pressures when  $\psi < 0$ 图4  $\psi > 0$  时主动土压力分布Fig.4 Distribution of active earth pressures when  $\psi > 0$ 

被动土压力  $p_p$  沿墙身的分布也可分为3种情况(图5),当  $\psi = 0$  时,土压力沿墙身为线性分布;当  $\psi < 0$  时,土压力沿墙身为非线性分布;当  $\psi > 0$  时,土压力沿墙身也为非线性分布,且当接近墙底时,土压力呈发散趋势. 上述3种被动土压力分布情况在相关试验资料中也都有所反映<sup>[9-10]</sup>.

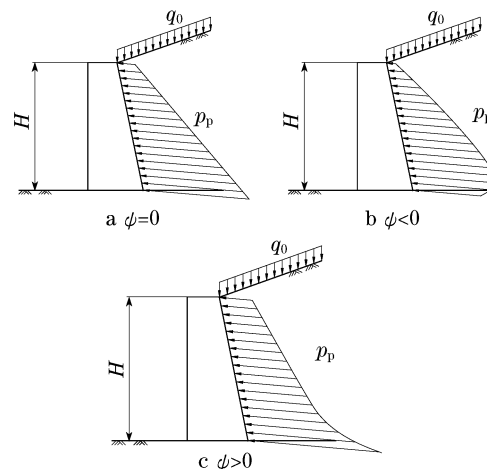


图5 被动土压力分布

Fig.5 Distribution of passive earth pressures

根据上述对土压力分布情况的分析,在计算土压力合力值时,忽略墙土间的拉力作用,可得土压力合力值  $E_a$  的统一计算公式

$$E_a = \int_{H_1}^{H_2} (p/\cos \alpha) dz = (q_0 K_q / \cos \alpha) H^\psi [(H - H_2)^{1-\psi} - (H - H_1)^{1-\psi}] / (\psi - 1) + (\gamma K_\gamma / \cos \alpha) \{ H^{\psi+1} [(H - H_2)^{1-\psi} - (H - H_1)^{1-\psi}] / [\psi - 1] + [(H - H_2)^2 - (H - H_1)^2] / 2 \} + (c / \cos \alpha) \{ K_{c1} H^\psi [(H - H_2)^{1-\psi} - (H - H_1)^{1-\psi}] / (\psi - 1) + (K_{c2} - K_{c1})(H_2 - H_1) \} + (k / \cos \alpha) \{ K_{k1} H^\psi [(H - H_2)^{1-\psi} - (H - H_1)^{1-\psi}] / (\psi - 1) + (K_{k2} - K_{k1})(H_2 - H_1) \} \quad (7)$$

式中,当挡墙顶部不存在拉力时,  $H_1 = 0$ ,当挡墙底部不存在拉力时,取  $H_2 = H$ .

土压力合力作用点的位置距墙底的距离  $z_a$  为

$$z_a = \left[ \int_{H_1}^{H_2} \frac{p(H-z)}{\cos \alpha} dz \right] / \left[ \int_{H_1}^{H_2} \frac{p}{\cos \alpha} dz \right] \quad (8)$$

式(8)中分母项按照式(7)计算,分子项为

$$\int_{H_1}^{H_2} \frac{p(H-z)}{\cos\alpha} dz = \frac{q_0 K_q}{\cos\alpha} \cdot \frac{H^\psi [(H-H_2)^{2-\psi} - (H-H_1)^{2-\psi}]}{\psi-2} + \frac{\gamma K_\gamma}{\cos\alpha} \cdot \left[ \frac{H^{\psi+1} [(H-H_2)^{2-\psi} - (H-H_1)^{2-\psi}]}{\psi-2} + \frac{(H-H_2)^3 - (H-H_1)^3}{3} \right] + \frac{c}{\cos\alpha} \cdot \left[ K_{c1} \frac{H^\psi [(H-H_2)^{2-\psi} - (H-H_1)^{2-\psi}]}{\psi-2} - (K_{c2} - K_{c1}) \frac{(H-H_2)^2 - (H-H_1)^2}{2} \right] + \frac{k}{\cos\alpha} \cdot \left[ K_{k1} \frac{H^\psi [(H-H_2)^{2-\psi} - (H-H_1)^{2-\psi}]}{\psi-2} - (K_{k2} - K_{k1}) \frac{(H-H_2)^2 - (H-H_1)^2}{2} \right] \quad (9)$$

根据式(1)~(6)可得土反力的分布值  $r$  为

$$r = p \frac{\sin(\theta - \beta) \cos(\alpha + \delta)}{\sin(\theta - \varphi) \cos(\alpha - \beta)} + c \frac{\cos\theta}{\sin(\theta - \varphi)} + k \frac{\sin(\beta - \theta) \sin\alpha}{\sin(\theta - \varphi) \cos(\alpha - \beta)} \quad (10)$$

## 2 最危险滑裂角计算

式(5)~(10)中的滑裂角  $\theta$  是任意假定的,由式(7)求导计算,即  $dE_a/d\theta = 0$ ,可得到最危险滑裂角  $\theta_{cr}$ ,从而得到最大值  $E_a$ ,但对  $dE_a/d\theta = 0$  方程求解比较困难,可试算求解,即在假定的  $\theta$  值范围内,试算逼近最大的  $E_a$  值,但不免繁琐.为此,可采用改进文献[2]的图解过程求解  $\theta_{cr}$  值.

图 6a 中楔形土体  $ABD$  上作用有超载  $Q$ 、重力  $G$ 、墙土间粘聚力  $K$ 、滑裂面间粘聚力  $C$  和土反力  $R$ ,图中虚线为辅助线:  $BF$  线与水平向夹角为  $\varphi$ ,与  $AD$  的延长线交于  $F$ ,  $DE$  线与  $BF$  线的夹角为  $90^\circ - \delta - \alpha$ ,竖线  $DM$  与水平向垂直,  $DL$  线与  $DB$  线的夹角为  $\theta - \delta - \alpha$ ;图 6b 所示楔形体  $ABD$  受力闭合多边形,辅助线  $jcd$  平行于重力  $G$  和超载  $Q$  的合力  $W$  的作用方向,  $deb$  线、 $icg$  线和  $jm$  线平行于土压力  $E_a$  的作用方向.

由  $\triangle ijc$  相似于  $\triangle DBE$  可得

$$E_a / (W - \Delta W) = l_{DE} / l_{BE} \quad (11)$$

式中

$$W = [(\gamma H/2) \cos(\alpha - \beta) / \cos\alpha + q_0] l_{AD} \quad (12)$$

$$\Delta W = l_{ae} + l_{dc} + l_{mf} = kH \cos\delta / [\cos\alpha \cos(\delta + \alpha)] + [c / \cos(\delta + \alpha)] \cdot [H \cos\delta / \cos\alpha - l_{AD} \sin(\alpha + \delta - \beta)] + [(c / \cos(\delta + \alpha)) (l_{AD} \cos\beta - H \tan\alpha) - kH \sin\alpha / (\cos\alpha \cos(\delta + \alpha))] (l_{BE} / l_{DE}) \quad (13)$$

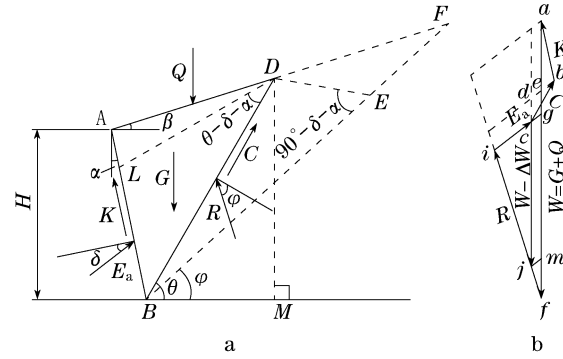


图 6 主动土压力滑裂角的图解法

Fig. 6 Graphic method for the slip angle of active earth pressures

将  $l_{AD}$ ,  $l_{DE}$  转换为  $l_{BE}$  的表达式,即

$$l_{AD} = \frac{H \cos(\varphi - \alpha)}{\cos\alpha \sin(\varphi - \beta)} - \left( \frac{H \cos(\alpha - \beta)}{\cos\alpha \sin(\varphi - \beta)} - l_{BE} \right) \cdot \frac{\cos(\alpha + \delta)}{\cos(\delta + \alpha + \varphi - \beta)} \quad (14)$$

$$l_{DE} = \left( \frac{H \cos(\alpha - \beta)}{\cos\alpha \sin(\varphi - \beta)} - l_{BE} \right) \frac{\sin(\varphi - \beta)}{\cos(\delta + \alpha + \varphi - \beta)} \quad (15)$$

将式(12)~(15)代入式(11)得到

$$E_a = \psi_7 l_{BE} + \psi_8 / l_{BE} + \psi_9 \quad (16)$$

式中:  $\psi_7 = [-\sin(\varphi - \beta) \cos(\alpha + \delta) / \cos^2(\alpha + \delta + \varphi - \beta)] [\gamma H \cos(\alpha - \beta) / (2 \cos\alpha) + q_0 + c \sin(\alpha + \delta - \beta) / \cos(\alpha + \delta)] - c \cos\beta / \cos(\alpha + \delta + \varphi - \beta)$ ,  $\psi_8 = [H \cos(\alpha - \beta) / (\cos\alpha \cos(\alpha + \delta + \varphi - \beta))] \{ \psi_{10} \cdot [\gamma H \cdot \cos(\alpha - \beta) / (2 \cos\alpha) + q_0 + c \sin(\alpha + \delta - \beta) / \cos(\alpha + \delta)] - (k + c) H \cos\delta / (\cos\alpha \cos(\alpha + \delta)) \}$ ,  $\psi_9 = [H \cos(\alpha - \beta) \cos(\alpha + \delta) / (\cos\alpha \cos^2(\alpha + \delta + \varphi - \beta))] \cdot [\gamma H \cos(\alpha - \beta) / (2 \cos\alpha) + c \sin(\alpha + \delta - \beta) / \cos(\alpha + \delta) + q_0] - [\sin(\varphi - \beta) / \cos(\delta + \alpha + \varphi - \beta)] [\psi_{10} (\gamma H \cos(\alpha - \beta) / (2 \cos\alpha) + q_0 + c \sin(\alpha + \delta - \beta) / \cos(\alpha + \delta)) - (k + c) H \cos\delta / (\cos\alpha \cos(\alpha + \delta))] - [\psi_{10} c \cos\beta - H(c + k) \tan\alpha] / \cos(\alpha + \delta)$ ,  $\psi_{10} = [H / (\cos\alpha \sin(\varphi - \beta))] [\cos(\varphi - \alpha) - \cos(\alpha - \beta) \cos(\alpha + \delta) / \cos(\alpha + \delta + \varphi - \beta)]$ .

由式(16)求导计算  $dE_a/dE_{BE} = 0$ , 即  $l_{BE} = \sqrt{\psi_8 / \psi_7}$ , 最危险滑裂角  $\theta_{cr}$  为

$$\theta_{cr} = \arctan(l_{DM}/l_{BM}) \quad (17)$$

式中,  $l_{DM}$  和  $l_{BM}$  分别为

$$l_{DM} = l_{AD} \sin \beta + H \quad (18)$$

$$l_{BM} = l_{AD} \cos \beta - H \tan \alpha \quad (19)$$

对于被动土压力的情况,根据图7采用与上述相似的过程进行推导,计算结果与主动土压力情况相比,即将  $\delta, \varphi, c, k$  分别变换为  $-\delta, -\varphi, -c$  和  $-k$ .

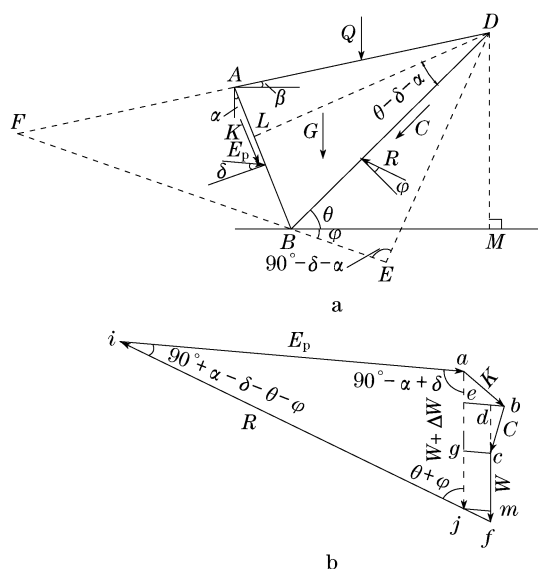


图7 被动土压力滑裂角的图解法

Fig.7 Graphic method for the slip angle of passive earth pressures

### 3 分层土实用计算模型

对于水平分层土体且考虑墙背倾斜和墙土间粘聚力,可采用图8模型计算挡墙土压力分布值,图中第  $i$  层土体的厚度为  $h_i$ 、内摩擦角为  $\varphi_i$ 、粘聚力为  $c_i$ ,墙土间的摩擦角和粘聚力分别为  $\delta_i$  和  $k_i$ ,所产生的土压力和土反力分别为  $p_i$  和  $r_i$ .假设:①墙后每层土体都达到极限状态,每层土体的滑裂面都为通过墙踵  $B$  的平面,形成整体上的不连续滑裂面;②各层土体间传递相互作用的竖向土压力,忽略切向剪力.作用在第  $i$  层土体表面的竖向土压力  $q_i$  按照式(5)考虑第  $i-1$  层土体进行计算.

在应用式(5)和(6)计算第  $i$  层土的土压力时,取  $\beta=0$ ,墙高  $H$  采用等效墙高  $H_i$ ,即

$$H_i = \sum_{j=i}^n h_j \quad (20)$$

式中,  $h_j$  为第  $j$  层土体的厚度.

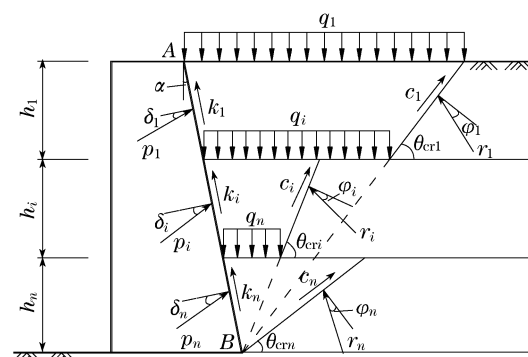


图8 分层土主动土压力计算模型

Fig.8 Calculation model of active earth pressures for stratified soils

### 4 与经典土压力理论比较

#### 4.1 简化为库仑土压力

根据库仑土压力理论的基本假定,土体为砂性土,在式(7)或(16)中取  $c=0, k=0$  和  $q_0=0$  进行简化,可得到库仑主动土压力  $P$  值的计算公式

$$P = \frac{\gamma H^2}{2} \cdot \frac{\cos(\alpha - \beta) \cos(\theta - \alpha) \sin(\theta - \varphi)}{\cos^2 \alpha \sin(\theta - \beta) \cos(\alpha + \delta + \varphi - \theta)} \quad (21)$$

式中,  $\theta$  取最危险滑裂角  $\theta_{cr}$ ,即按式(17)简化.

同样简化式(6)和式(8),可求得库仑土压力分布值和作用点位置,这是由于在微分层解析法中,应用  $\sum X=0, \sum Y=0$  和  $\sum M=0$  三个平衡方程进行微分求解,改进了库仑理论只应用  $\sum X=0$  和  $\sum Y=0$  两个平衡方程求解合力的方法,这与文献[6]所得结论一致.另外,对被动土压力可同理计算,结果即将式(21)中的  $\varphi$  变为  $-\varphi$ .

#### 4.2 简化为朗肯土压力

朗肯土压力理论的基本假定为挡土墙墙背竖直、光滑,填土表面水平,故要求  $\alpha=0, \beta=0, \delta=0$  和  $k=0$ ,代入式(17)计算得到  $\theta_{cr}=45^\circ + \varphi/2$ ,代入式(5)和(6)得到朗肯土压力计算公式.

$$q = q_0 + \gamma z \quad (22)$$

$$p = q_0 K_q + \gamma K_\gamma z + c K_{c2} \quad (23)$$

式中:  $K_q = K_\gamma = K_a = \tan^2(45^\circ - \varphi/2)$ ,  $K_{c2} = -2\sqrt{K_a} = -2\tan(45^\circ - \varphi/2)$ ,  $K_a$  为主动土压力系数.

对图8分层土主动压力计算模型进行相应的简化,可得现行以朗肯土压力为基础的分层土土压力计算方法,即第  $i$  层土体的土压力计算式为

$$p_i = (q_0 + \sum_{j=1}^i \gamma_j h_j) K_{ai} + \gamma_i K_{ai} z_i - 2c_i \sqrt{K_{ai}} \quad (24)$$

式中,  $z_i$  从第  $i$  层土体的顶面起计算.

对被动土压力可同理计算, 结果即将式 (23) 和式 (24) 当中的  $\varphi$  和  $c$  分别变为  $-\varphi$  和  $-c$ .

5 算例比较

算例 1: 取参数  $H = 8\text{ m}$ ,  $\gamma = 18\text{ kN} \cdot \text{m}^{-3}$ ,  $\varphi = 22^\circ$ ,  $q_0 = 0$  计算, 由表 1 可知, 对符合朗肯土压力或库仑土压力条件的情况, 文献[3]方法和本文方法所得土压力合力值与朗肯和库仑土压力计算所得结果一致, 这也说明朗肯土压力与库仑土压力是本文方法的特例. 而对于一般情况, 文献[3]方法和本文方法所得主动土压力存在区别, 主要因为两者对土压力中拉力值部分的处理不同.

算例 2: 取文献[4]中参数  $H = 4.6\text{ m}$ ,  $\alpha = 0$ ,  $\beta = 0$ ,  $\gamma = 19.3\text{ kN} \cdot \text{m}^{-3}$ ,  $c = 10\text{ kPa}$ ,  $\varphi = 15^\circ$ ,  $k = 0$ ,  $\delta = 10^\circ$ ,  $q_0 = 10\text{ kPa}$  进行计算. 由表 2 可见, 不考虑土体裂缝时本文与文献[4]所得结果相同, 考虑土体裂缝时本文计算得  $E_a = 73.346\text{ kN}$ , 比实测值  $79.6\text{ kN}$  小  $7.86\%$ , 较文献[4]计算结果更接近实测值, 说明本文方法更合理.

算例 3: 文献[11]利用土拱原理和水平层分析法对挡土墙被动土压力进行研究, 采用文中参数  $H = 10\text{ m}$ ,  $\alpha = 0$ ,  $\beta = 0$ ,  $\gamma = 18\text{ kN} \cdot \text{m}^{-3}$ ,  $c = 0$ ,  $\varphi = -30^\circ$ ,  $k = 0$ ,  $q_0 = 0$ ,  $\delta$  分别为  $0^\circ$ ,  $-10^\circ$ ,  $-20^\circ$ , 本文方法得到  $E_p$  值分别为  $2\,700.00$ ,  $3\,728.97$ ,  $5\,494.82\text{ kN}$ , 作用点位置  $z_p$  分别为  $3.33$ ,  $2.54$ ,  $1.98\text{ m}$ , 文献[11]方法计算得  $E_p$  值分别为  $2\,700.00$ ,  $3\,728.97$ ,  $5\,494.82\text{ kN}$ , 作用点位置  $z_p$  分别为  $2.76$ ,  $2.28$ ,

$1.80\text{ m}$ . 可见, 两者计算得到  $E_p$  值相等且与经典库仑理论计算结果一致, 但本文  $z_p$  值比文献[11]大, 根据  $\delta = 0$  时朗肯土压力理论算得  $z_p = 3.33\text{ m}$ , 说明本文计算方法更为合理.

算例 4: 基于极限平衡理论和直线滑裂面的假定, 文献[12–13]对滑楔分析模型求解得到挡土墙主动与被动土压力的库仑统一解, 采用文中算例参数  $H = 10\text{ m}$ ,  $\alpha = -5^\circ$ ,  $\beta = 10^\circ$ ,  $\gamma = 19\text{ kN} \cdot \text{m}^{-3}$ ,  $c = 15\text{ kPa}$ ,  $\varphi = 25^\circ$ ,  $k = 10\text{ kPa}$ ,  $\delta = 10^\circ$ ,  $q_0 = 20\text{ kPa}$ , 根据文献[12]方法得  $E_a = 203.70\text{ kN}$ ,  $H_1 = 2.59\text{ m}$ , 文献[13]方法得  $E_p = 7\,816.05\text{ kN}$ , 本文方法得  $E_a = 185.52\text{ kN}$ ,  $H_1 = 1.14\text{ m}$ ,  $E_p = 7\,833.55\text{ kN}$ . 可见, 2 种方法得到的被动土压力值比较接近, 主动土压力受  $H_1$  值影响相差较大, 虽然本文所得  $H_1$  值与按朗肯土压力方法计算值  $H_1 = 1.43\text{ m}$  比较接近, 但对于一般情况下挡墙土压力非线性分布特征, 特别是关于拉力值区域的分布, 仍有待试验验证.

算例 5: 文献[14]应用统一强度理论和能量理论推导了挡土墙主动和被动土压力计算公式, 考虑了中间主应力对土压力的影响, 采用文中算例参数  $H = 5\text{ m}$ ,  $\alpha = 10^\circ$ ,  $\beta = 15^\circ$ ,  $\gamma = 17\text{ kN} \cdot \text{m}^{-3}$ ,  $c = 6\text{ kPa}$ ,  $\varphi = 18^\circ$ ,  $k = 0$ ,  $\delta = 10^\circ$ ,  $q_0 = 0$ , 为便于比较, 在本文方法中按文献[14]取统一强度理论的抗剪参数  $\varphi_t$  和  $c_t$ , 并取  $\theta = 30^\circ$ . 从表 3 所可见, 当不考虑土体裂缝时, 本文方法与文献[14]方法所得土压力值相同, 故当取统一强度理论的抗剪参数  $\varphi_t$  和  $c_t$  时, 本文方法同样可以考虑中间主应力对土压力的影响, 且与文献[14]相比, 还计算得到土压力分布形态, 明确土体拉裂区域.

表 1 算例 1 结果  
Tab.1 Results of example 1

计算参数					朗肯土压力		库仑土压力		文献[3]方法	本文方法	
$c/\text{kPa}$	$k/\text{kPa}$	$\delta/(\circ)$	$\alpha/(\circ)$	$\beta/(\circ)$	$E_a/\text{kN}$	$E_p/\text{kN}$	$E_a/\text{kN}$	$E_p/\text{kN}$	$E_a/\text{kN}$	$E_a/\text{kN}$	$E_p/\text{kN}$
0	0	0	0	0	262.06	1 266.04	262.06	1 266.04	262.06	262.06	1 266.04
15	0	0	0	0	125.18	1 621.86			125.18	125.18	1 621.86
0	0	10	10	10			335.56	1 932.93	335.56	335.56	1 932.93
15	0	10	0	0					113.91	118.23	2 132.30
15	5	10	5	5					135.90	129.43	2 325.17
15	5	10	-5	15					100.47	80.56	4 413.21

表 2 算例 2 结果  
Tab.2 Results of example 2

计算情况	实测值/kN	文献[4]方法		本文方法	
		计算值/kN	误差/%	计算值/kN	误差/%
不考虑土体裂缝	79.6	68.896	-13.45	68.896	-13.45
考虑土体裂缝	79.6	72.481	-8.94	73.346	-7.86

表 3 算例 5 结果  
Tab.3 Results of example 5

中间主应力影响 的权系数	$\varphi_t/(^{\circ})$	$c_t/\text{kPa}$	文献[14]方法		本文方法		
			$E_a/\text{kN}$	$E_p/\text{kN}$	$E_a/\text{kN}$		$E_p/\text{kN}$
					不考虑土体裂缝	考虑土体裂缝	
0	18.00	6.00	53.70	1 046.93	53.78	75.22	1 046.79
0.2	19.14	6.41	31.30	1 097.05	31.37	57.89	1 097.05
0.4	20.05	6.74	13.40	1 138.81	13.41	44.89	1 138.81
0.6	20.80	7.01	- 1.38	1 174.30	- 1.38	34.92	1 174.30
0.8	21.41	7.24	- 13.62	1 204.26	- 13.62	27.32	1 204.26
1.0	21.94	7.46	- 24.60	1 231.49	- 24.64	21.12	1 231.49

6 结语

(1) 基于平面滑裂假定和极限平衡原理,结合微分层解析法和图解法,推导了一般情况下挡土墙主动和被动土压力的统一解,可计算土压力沿墙身分布值、土压力合力值及其作用点位置,通过与相关文献算法比较,验证了本文方法的合理性。

(2) 分层土实用计算模型适用于墙背倾斜、墙土间粘聚力和粘性填土的情况,现行以朗肯土压力理论为基础的分层土土压力计算方法为其特例。

(3) 对参数  $\psi$  取不同值时的挡土墙土压力非线性分布特征进行了讨论,并仍有待进一步试验验证。

参考文献:

[ 1 ] 陈希哲. 土力学地基基础[M]. 4 版. 北京: 清华大学出版社,2004.  
CHEN Xizhe. Soil mechanics and geotechnical engineering [M]. 4th ed. Beijing, Tsinghua University Press,2004.

[ 2 ] 顾慰慈. 挡土墙土压力计算[M]. 北京: 中国建材工业出版社,2000.  
GU Weici. Calculation of earth pressure acting on retaining wall [M]. Beijing: China Building Materials Industry Press,2000.

[ 3 ] 胡晓军. 粘性土主动土压力库仑精确解的改进[J]. 岩土工程学报,2006,28(8):1049.  
HU Xiaojun. Improvement on coulumb accurate solution of active earth pressure to cohesive soil[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering,2006,28(8):1049.

[ 4 ] 林智勇,戴自航,苏美选. 复杂条件下挡土墙主动土压力解析解[J]. 岩土工程学报,2008,30(4):555.  
LIN Zhiyong, DAI Zihang, SU Meixuan. Analytical solution of active earth pressure acting on retaining walls under complicated conditions [J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering,2008,30(4):555.

[ 5 ] Kingsley O H W. Geostatic wall pressures [J]. Journal of Geotechnical Engineering, ASCE,1988,115(9):1321.

[ 6 ] 蒋苑秋. 挡土墙土压力非线性分布解[J]. 土木工程学报,1964,10(1):56.  
JIANG Chunqiu. Calculation of non-linear earth pressure acting on retaining wall[J]. China Civil Engineering Journal,1964,10(1):56.

[ 7 ] Fang Y S, Ishibashi I. Static earth pressures with various wall momvements [J]. Journal of Geotechnical and Geotechnical Engineering, ASCE,1986,112(3):317.

[ 8 ] 周应英,任美龙. 刚性挡土墙主动土压力的试验研究[J]. 岩土工程学报,1990,12(3):19.  
ZHOU Yingying, REN Meilong. An experimental study on active earth pressure behind rigid retaining wall[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering,1990,12(3):19.

[ 9 ] Fang Y S, Chen T J, Wu B F. Passive earth pressures with wall momvements [J]. Journal of Geotechnical and Geotechnical Engineering, ASCE,1994,120(8):1307.

[10] 陈页开. 挡土墙上土压力的实验研究与数值分析[D]. 杭州: 浙江大学,2001.  
CHEN Yekai. Modle test and numerical analysis of earth pressures on retaining wall [ D ]. Hangzhou: Zhejiang University,2001.

[11] 李永刚. 挡土墙被动土压力研究[J]. 岩土力学,2003,24(2):273.  
LI Yonggang. Study on passive earth pressure of retaining wall [J]. Rock and Soil Mechanics,2003,24(2):273.

[12] 彭明祥. 挡土墙主动土压力的库仑统一解[J]. 岩土力学,2009,30(2):379.  
PENG Mingxiang. Coulumb's unified solution of active earth pressure on retaining wall[J]. Rock and Soil Mechanics,2009,30(2):379.

[13] 彭明祥. 挡土墙被动土压力的库仑统一解[J]. 岩土工程学报,2008,30(12):1783.  
PENG Mingxiang. Coulumbs unified solution of passive earth pressure on retaining wall[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering,2008,30(12):1783.

[14] 高江平,刘元烈,俞茂宏. 统一强度理论在挡土墙土压力计算中的应用[J]. 西安交通大学学报,2006,40(3):357.  
GAO Jiangping, LIU Yuanlie, YU Maohong. Unified strength theory with applications to earth pressure[J]. Journal of Xi'an Jiao Tong University,2006,40(3):357.