

随机过程的第二类随机谐和函数表达

孙伟玲^{1,2}, 陈建兵^{1,2}, 李 杰^{1,2}

(1. 同济大学 土木工程学院, 上海 200092; 2. 同济大学 土木工程防灾国家重点实验室, 上海 200092)

摘要: 发展了随机过程的第二类随机谐和函数表达并研究了其性质. 证明当随机频率与相位服从独立均匀分布而幅值由频率与目标功率谱密度决定时, 随机谐和函数过程的功率谱密度函数精确地等于目标功率谱密度函数. 研究第二类随机谐和函数过程的渐进正态性, 讨论趋向正态分布的速率, 并采用 Pearson 分布研究 1 维概率密度函数的性质. 研究表明, 第二类随机谐和函数同第一类随机谐和函数具有相似的性质, 且由于第二类随机谐和函数频率为均匀分布, 应用更为方便. 以多自由度体系的线性和非线性响应分析为例, 验证了随机谐和函数模型的有效性和优越性.

关键词: 第二类随机谐和函数; 功率谱密度; 相关函数; 平稳过程; 非线性

中图分类号: O 211.6

文献标识码: A

obtaining the one-dimensional distribution via Pearson distribution. The study reveals the similarities between the stochastic harmonic functions of the first kind and the second kind. However, the application of the stochastic harmonic function of the second kind is more convenient than that of the first kind because the random circular frequencies are uniformly distributed. Finally, linear and nonlinear responses of a multi-degree-of-freedom system subjected to random ground motions are analyzed to exemplify the effectiveness and superiorities of the proposed approach.

Key words: stochastic harmonic function of the second kind; power spectral density function; covariance function; stationary process; nonlinearity

Stochastic Harmonic Functions of Second Kind for Spectral Representations

SUN Weiling^{1,2}, CHEN Jianbing^{1,2}, LI Jie^{1,2}

(1. College of Civil Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, China; 2. State Key Laboratory of Disaster Reduction in Civil Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, China)

Abstract: The stochastic harmonic function of the second kind is proposed for representations of stochastic processes. It is firstly proved that, as long as the random phase angles and random circular frequencies are independent and uniformly distributed whereas the amplitudes are related to the target power spectral density function in a specified way, the power spectral density of the process represented by the stochastic harmonic function of the second kind is identical to the target power spectral density. Then, it is demonstrated that the process represented by the stochastic harmonic function of the second kind is asymptotically Gaussian. The rate of approaching Gaussian distribution is further studied by

过去 50 年来, 随机动力学研究取得了重要的成就, 并在科学与工程等诸多领域中获得了日益广泛的重视与应用^[1-2]. 如何根据随机过程的概率信息(如有限维联合分布、时域统计矩或功率谱密度函数等)生成随机过程的样本, 是随机动力学研究中的重要问题. 国内外众多学者对此进行了卓有成效的研究, 发展了诸如谱表示方法^[3]、Karhunen-Loève 分解^[4-5]、双重正交分解方法^[6]和取样定理方法^[7]等不同途径, 其中谱表示方法获得了较为广泛的应用. 然而, 由于在某种意义上采用了无穷级数, 当截取有限项近似时, 所有这些方法获得随机过程的概率信息只是目标概率信息的近似表达. 在应用较广的谱表示方法中, 通常需要引入数百个随机变量, 这大大增加了随机动力学问题求解的难度.

事实上, 早在 1969 年, Goto 和 Toki 就提出了一类频率和相位同时具有随机性的谱表示方法, 由此获得的随机过程的功率谱密度函数精确地等于目标

收稿日期: 2010-07-28

基金项目: 国家自然科学基金(10872148, 90715033); 国家“八六三”高技术研究发展计划(2008AA05Z413)

第一作者: 孙伟玲(1985—), 女, 博士生, 主要研究方向为随机动力系统分析. E-mail: wlsun0228@gmail.com

通讯作者: 李 杰(1957—), 男, 教授, 博士生导师, 工学博士, 主要研究方向为随机动力系统分析、混凝土随机损伤力学与生命线工程抗灾. E-mail: lijie@tongji.edu.cn

功率谱密度函数^[8]. 1971 年, Shinozuka 对这一方法进行了更为详细的研究^[9]. 然而, 由于他们关心的重点是随机取样即随机过程的样本模拟, 因此, 对于样本集合的精确概率信息并不关心. 有鉴于此, 从取样频率的优化选择出发^[10], 陈建兵和李杰独立地提出了一类随机谐和函数^[11], 其中的谐和分量频率分别在经过剖分的子区间内随机分布. 研究表明: 利用这类函数, 通过有限项数(通常不超过 10 项)的分解, 即可反映目标随机过程的概率分布特性, 从而极大地降低了随机函数中随机变量的数目. 受此启发, 本文提出了一类新的随机谐和函数模型(其分量幅值、频率与相位均为随机变量), 证明了当随机频率与相位服从独立均匀分布而幅值由频率与目标功率谱密度决定时, 无论随机谐和函数分量的个数是多少, 该随机过程的功率谱密度函数均精确地等于目标功率谱密度函数. 文中研究了此类随机函数的渐进正态性, 并详细研究了相应随机过程分布的性质. 最后, 以数值实例进行了验证. 为明确计, 本文将文献[11]中的模型称为第一类随机谐和函数, 而将本文研究的模型称为随机过程的第二类随机谐和函数表达. 与第一类随机谐和函数相比, 由于第二类随机谐和函数频率为均匀分布, 应用更为方便.

1 第二类随机谐和函数

考察随机谐和函数 $Y_N(t)$

$$Y_N(t) = \sum_{i=1}^N A(\omega_i) \cos(\omega_i t + \phi_i) \quad (1)$$

式中: $A(\omega_i)$, ω_i 和 ϕ_i 分别为第 i 个谐和分量的幅值、圆频率和相位角. 设 $\omega_i^{(p)}$, $1 \leq i \leq N-1$ 为 $[0, \omega_u]$ 的内点, 且满足 $0 < \omega_1^{(p)} < \omega_2^{(p)} < \dots < \omega_{N-1}^{(p)} < \omega_u$, 并记 $\omega_0^{(p)} = 0$, $\omega_N^{(p)} = \omega_u$, 这里 $\omega_u < \infty$ 为上限截止频率.

当 ω_i 和 ϕ_i 均为随机变量时, $Y_N(t)$ 是一个随机过程. 易知, 若 ϕ_i 服从 $(0, 2\pi]$ 的独立均匀分布, 则 $Y_N(t)$ 的自相关函数为

$$R_{Y_N}(\tau) = \sum_{i=1}^N E\left(\frac{A^2(\omega_i)}{2} \cos(\omega_i \tau)\right) \quad (2)$$

这里 $E[\cdot]$ 表示取数学期望. 而 $R_{Y_N}(\tau)$ 的 Fourier 变换则给出 $Y_N(t)$ 的功率谱密度函数为

$$S_{Y_N}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{Y_N}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (3)$$

设 $Y(t)$, $-\infty < t < \infty$ 是一个平稳随机过程, 其相关函数为 $R_Y(\tau)$, $-\infty < \tau < \infty$, 功率谱密度函数

为 $S_Y(\omega)$, $-\omega_u \leq \omega < \omega_u$, 它们构成一个 Fourier 变换对, 满足维纳-辛钦关系. 记 $Y(t)$ 的单边功率谱为 $G_Y(\omega)$, 有 $G_Y(\omega) = 2 S_Y(\omega)$, $0 \leq \omega \leq \omega_u$.

对式(1)所示随机谐和函数, 可以证明存在以下定理.

定理 1 若式(1)随机谐和函数过程 $Y_N(t)$ 中的 $A(\omega_i)$, ω_i 和 ϕ_i 分别满足:

(I) ϕ_i , $i = 1, 2, \dots, N$ 为相互独立的随机变量, 服从 $(0, 2\pi]$ 的均匀分布;

(II) ω_i , $i = 1, 2, \dots, N$ 为相互独立的随机变量, 服从 $(\omega_{i-1}^{(p)}, \omega_i^{(p)})$ 区间的均匀分布, 概率密度函数为

$$p_{\omega_i}(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{\omega_i^{(p)} - \omega_{i-1}^{(p)}} = \frac{1}{\Delta\omega_i}, & \text{当 } \omega \in (\omega_{i-1}^{(p)}, \omega_i^{(p)}) \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (4)$$

这里 $\Delta\omega_i = \omega_i^{(p)} - \omega_{i-1}^{(p)}$;

(III) $A(\omega_i)$, $i = 1, 2, \dots, N$ 为随机变量 ω_i 的函数, 且

$$A(\omega_i) = \sqrt{\frac{G_Y(\omega_i) \Delta\omega_i}{\pi}} = \sqrt{\frac{2S_Y(\omega_i) \Delta\omega_i}{\pi}} \quad (5)$$

则由式(1)表达的随机过程 $Y_N(t)$ 的功率谱密度函数为 $S_Y(\omega)$.

证明 $Y_N(t)$ 的相关函数由式(2)给出, 将式(4), (5)代入, 有

$$\begin{aligned} R_{Y_N}(\tau) &= \sum_{i=1}^N \int_{\omega_{i-1}^{(p)}}^{\omega_i^{(p)}} \frac{G_Y(\omega_i)}{2\pi} \cos(\omega_i \tau) d\omega_i = \\ &= \int_0^{\omega_u} \frac{G_Y(\omega)}{2\pi} \cos(\omega \tau) d\omega = \\ &= R_Y(\tau) \end{aligned} \quad (6)$$

因而功率谱密度函数为

$$S_{Y_N}(\omega) = \mathcal{F}[R_{Y_N}(\tau)] = \mathcal{F}[R(\tau)] = S_Y(\omega), \quad \omega \in [-\omega_u, \omega_u] \quad (7)$$

证毕.

定理 1 表明: 采用形如式(1)具有随机相位和随机频率的谐和分量合成的随机过程, 当相位角为 $(0, 2\pi]$ 之间均匀分布的独立随机变量, 谐和分量频率服从相应频率区间的均匀分布, 幅值为关于随机频率的函数 $A(\omega_i) = \sqrt{G_Y(\omega_i) \Delta\omega_i / \pi}$ 时, 则该随机过程的功率谱密度函数与目标功率谱密度函数完全相同. 换言之, 式(1)中的随机过程是精确的谱表达形式, 为与文献[11]中模型相区别, 这里称之为第二类随机谐和函数表达. 同时, 由于 $A(\omega_i)$ 是 ω_i 的函数, 因此, 在式(1)中, 基本的随机变量是 ω_i 与 ϕ_i , 而

$A(\omega_i)$ 则可称之为关联随机变量.

2 第二类随机谐和过程的基本性质

2.1 平稳性和渐进正态性

易知, $Y_N(t)$ 的平均值 $\mu_{Y_N} = E[Y_N(t)] = 0$, 而相关函数由式(2)给出, 仅依赖于时间差 τ 而与时间 t 无关, 因此 $Y_N(t)$ 是一个零均值 2 阶平稳随机过程.

利用 Laning-Battin 于 1956 年提出的双变量中心极限定理^[12], 证明若满足定理 1 的条件, 则当 $N \rightarrow \infty$ 时, 式(1)中的随机过程 $Y_N(t)$ 任意 n 个时间点的截口随机变量组成的随机向量 $(Y_N(t_1), Y_N(t_2), \dots, Y_N(t_n))$ 趋向于多维联合正态分布.

对于式(1)定义的随机过程 $Y_N(t)$, 定义

$$\begin{cases} X_i = A(\omega_i) \cos(\omega_i t_X + \phi_i) \\ Y_i = A(\omega_i) \cos(\omega_i t_Y + \phi_i) \end{cases} \quad (8)$$

令 Z_1, Z_2, \dots, Z_N 是 N 个独立双变量随机向量 $Z_i = (X_i, Y_i)$, $i = 1, 2, \dots, N$, 其 1 阶矩与 2 阶矩存在且已知. 定义向量和为

$$Z = \sum_{i=1}^N Z_i = \left(\sum_{i=1}^N X_i, \sum_{i=1}^N Y_i \right) = (X, Y) \quad (9)$$

Laning-Battin 定理指出^[12]: 当 $N \rightarrow \infty$ 时, $Z = (X, Y)$ 趋向于双变量正态分布的充分必要条件是

$$\left. \begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\sigma_X^3} \sum_{i=1}^N E\{|X_i - E(X_i)|^3\} &= 0 \\ \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\sigma_Y^3} \sum_{i=1}^N E\{|Y_i - E(Y_i)|^3\} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

事实上由于 $E(X_i) = 0, E(Y_i) = 0$, 有

$$\sum_{i=1}^N E|X_i|^3 = \sum_{i=1}^N E\left\{\frac{4A^3(\omega_i)}{3\pi}\right\} \quad (11)$$

将式(4), (5)代入式(11), 有

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N E|X_i|^3 &= \\ \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \frac{4}{3\pi} \int_{\omega_{i-1}^{(p)}}^{\omega_i^{(p)}} \left[\frac{G_Y(\omega_i)}{\pi} \right]^{3/2} (\Delta\omega_i)^{1/2} d\omega_i &\leq \\ \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \frac{4G_{\max}^{3/2}}{3\pi(\pi)^{3/2}} (\Delta\omega_i)^{1/2} \int_{\omega_{i-1}^{(p)}}^{\omega_i^{(p)}} d\omega_i &= \\ \frac{4G_{\max}^{3/2}}{3\pi(\pi)^{3/2}} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N (\Delta\omega_i)^{3/2} &\quad (12) \end{aligned}$$

其中 $G_{\max} = \max_{\omega} |G_Y(\omega)|$. 因此, 只要当 $N \rightarrow \infty$ 时, $\Delta\omega_i \rightarrow 0$, 就有

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\sigma_X^3} \sum_{i=1}^N E\{|X_i - E(X_i)|^3\} = 0 \quad (13)$$

类似地可以证明式(10)中第 2 式. 根据 Laning-Battin 定理, 可知 $Z = (Y_N(t_X), Y_N(t_Y))$ 是渐进正态的. 根据多维正态随机变量的性质, 从上述结论立即可以推广到, 当 $N \rightarrow \infty$ 时任意 n 个时刻随机向量 $(Y_N(t_1), Y_N(t_2), \dots, Y_N(t_n))$ 均为渐进正态的.

2.2 截口概率密度函数

2.2.1 偏度与峰度系数

为了进一步了解第二类随机谐和函数 $Y_N(t)$ 的性质, 以下考察 $Y_N(t)$ 的截口随机变量的概率密度函数 $p_{Y_N}(y, t)$. 为此, 首先计算 $Y_N(t)$ 的前 4 阶中心矩. 显然均值 $\mu_{Y_N} = E[Y_N(t)] = 0$, 标准差 $\sigma_{Y_N}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\omega_u} G_Y(\omega) d\omega$, 3 阶中心矩是

$$\alpha_3 = E[Y_N^3(t)] = 0 \quad (14)$$

而 4 阶中心矩为

$$\begin{aligned} \alpha_4 &= E[Y_N^4(t)] = E\left[\left(\sum_{i=1}^N A(\omega_i) \cos(\omega_i t + \phi_i)\right)^4\right] \\ &= E\left[\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{3A_i^2 A_j^2}{4}\right] - \\ &\quad E\left[\sum_{i=1}^N \frac{3A_i^4}{8}\right] \end{aligned} \quad (15)$$

为了方便, 这里记 $A(\omega_i)$ 为 A_i . 由此可知, 偏度系数为

$$c_s = \alpha_3 / \sigma^3 = 0 \quad (16)$$

而峰度系数为

$$c_e = \frac{\alpha_4}{\sigma^4} - 3 = -\frac{3}{2} \frac{E\left[\sum_{i=1}^N A_i^4\right]}{E\left[\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N A_i^2 A_j^2\right]} \quad (17)$$

对于第二类随机谐和函数, 将式(4), (5)代入式(17), 有

$$c_e = -\frac{3}{2} \cdot \frac{\sum_{i=1}^N \int_{\omega_{i-1}^{(p)}}^{\omega_i^{(p)}} G_Y^2(\omega_i) \Delta\omega_i d\omega_i}{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \int_{\omega_{i-1}^{(p)}}^{\omega_i^{(p)}} G_Y(\omega_i) d\omega_i \int_{\omega_{j-1}^{(p)}}^{\omega_j^{(p)}} G_Y(\omega_j) d\omega_j} \quad (18)$$

当取 $\Delta\omega_1 = \Delta\omega_2 = \dots = \Delta\omega_N = \Delta\omega = \omega_u/N$ 时,

则有

$$c_e = -\frac{3}{2} \frac{\Delta\omega \int_0^{\omega_u} G_Y^2(\omega) d\omega}{\left(\int_0^{\omega_u} G_Y(\omega) d\omega\right)^2} \quad (19)$$

若 $\int_0^{\omega_u} G_Y^2(\omega) d\omega$ 和 $\int_0^{\omega_u} G_Y(\omega) d\omega$ 均有界, 令

$$\lambda = \frac{\omega_u \int_0^{\omega_u} G_Y^2(\omega) d\omega}{\left(\int_0^{\omega_u} G_Y(\omega) d\omega \right)^2} \quad (20)$$

则

$$c_e = -\frac{3}{2} \frac{\lambda}{N} \quad (21)$$

这里 λ 是一个不依赖于 N 的常数, 仅与功率谱密度函数的形状有关. 由 Cauchy 不等式, 有

$$\left(\int_0^{\omega_u} G_Y(\omega) d\omega \right)^2 \leq \int_0^{\omega_u} G_Y^2(\omega) d\omega \int_0^{\omega_u} d\omega = \omega_u \int_0^{\omega_u} G_Y^2(\omega) d\omega \quad (22)$$

将式(22)代入式(20), 可知 $\lambda \geq 1$. 当 $G_Y(\omega) = G_0$ 是一个常数时, $\lambda = 1$.

对于常用的地震动功率谱模型, 一般 $1 \leq \lambda \leq 2$. 以 Kanai-Tajimi 谱为例, 此时, 功率谱密度函数为^[13]

$$S(\omega) = \frac{1 + 4\zeta^2(\omega/\omega_0)^2}{(1 - (\omega/\omega_0)^2)^2 + 4\zeta^2(\omega/\omega_0)^2} S_0 \quad (23)$$

式中: ζ 为场地阻尼比; ω_0 为场地卓越频率; S_0 为高斯白噪声谱密度. 根据文献[14], 选取硬土地地的参数为 $\omega_0 = 16.9 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$, $\beta = 0.94$, 截止频率 $\omega_u = 100 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$, 代入式(20)可知 $\lambda = 1.63$.

而对 Clough-Penzien 谱^[15]

$$S(\omega) = \frac{1 + 4\zeta_1^2(\omega/\omega_1)^2}{(1 - (\omega/\omega_1)^2)^2 + 4\zeta_1^2(\omega/\omega_1)^2} \cdot \frac{(\omega/\omega_2)^4}{(1 - (\omega/\omega_2)^2)^2 + 4\zeta_2^2(\omega/\omega_2)^2} S_0 \quad (24)$$

根据文献[16], 取中硬场地土参数 $\omega_1 = 17.95 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$, $\zeta_1 = \zeta_2 = 0.72$, $\omega_2 = 0.1\omega_1$. 分析中取截止频率 $\omega_u = 100 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$, 则 $\lambda = 1.95$.

2.2.2 Pearson 分布函数

采用 Pearson 分布函数族^[17], 可获得 $p_{Y_N}(y, t)$ 的表达式

$$p_{Y_N}(y, t) \propto \left(1 - \frac{y}{a_1}\right)^{-\nu(a_1-a)} \left(1 - \frac{y}{a_2}\right)^{\nu(a_2-a)} \quad (25)$$

当 $a_1 \leq y \leq a_2$

其中 $a_{1,2} = \mp \frac{\sqrt{\Delta}}{2b_2}$, $\Delta = b_1^2 - 4b_0b_2$, $\nu = \frac{1}{b_2(a_1 - a_2)}$, $b_0 = \frac{4\beta_2 - 3\beta_1}{10\beta_2 - 12\beta_1 - 18} \sigma^2$, $a = b_1 = \sigma \sqrt{\beta_1} \frac{\beta_2 + 3}{10\beta_2 - 12\beta_1 - 18}$, $b_2 = \frac{2\beta_2 - 3\beta_1 - 6}{10\beta_2 - 12\beta_1 - 18}$, $\beta_1 = \alpha_3^2$, $\beta_2 = \alpha_4$. 由于前 4 阶矩是时不变的, 所以 $p_{Y_N}(y,$

$t)$ 也是时不变的, 可记为 $p_{Y_N}(y)$.

为考察 $p_{Y_N}(y, t)$ 趋于正态分布的速率, 不妨分析 $\sigma^2 = 1$ 的情况. 这时

$$\alpha_4 = 3 \times \frac{2N - \lambda}{2N} \quad (26)$$

根据式(26), 将各阶矩代入, 可知

$$p_{Y_N}(y) = C \left(1 - \frac{\lambda y^2}{4N - 2\lambda}\right)^{\frac{4N - 5\lambda}{2\lambda}}, \quad -\sqrt{\frac{4N - 2\lambda}{\lambda}} \sigma \leq y \leq \sqrt{\frac{4N - 2\lambda}{\lambda}} \sigma \quad (27)$$

其中 C 为满足概率相容条件的常数

$$C = \left(\int_{a_1}^{a_2} \left(1 - \frac{\lambda y^2}{4N - 2\lambda}\right)^{\frac{4N - 5\lambda}{2\lambda}} dy \right)^{-1} \quad (28)$$

将 $(4N - 5\lambda)/\lambda$ 取整, 则利用三角函数的积分公式可得

$$C = \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \dots \cdot \frac{4(N - \lambda) - 3}{4(N - \lambda) - 2} \cdot \frac{4(N - \lambda) - 1}{4(N - \lambda)} \pi \sqrt{4N - 2\lambda} \right)^{\frac{n = 2(N - \lambda)}{2}} = \left(\frac{(2n - 1)!!}{(2n)!!} \pi \sqrt{2n + 2\lambda} \right) \quad (29)$$

根据 Wallis 公式^[18]

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n + 1} \left(\frac{(2n)!!}{(2n - 1)!!} \right)^2 \quad (30)$$

可知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{(2n - 1)!!}{(2n)!!} \pi \sqrt{2n + 2\lambda} \right)^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \quad (31)$$

采用相对熵^[19]来比较 2 个概率密度函数相近似的程度. 记标准正态分布概率密度函数为 $\phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2}$, 则 $p_{Y_N}(y), \phi(y)$ 的相对熵为

$$H(p_{Y_N}, \phi) = - \int_{-\infty}^{\infty} \phi(y) \ln \frac{\phi(y)}{p_{Y_N}(y)} dy \quad (32)$$

为避免奇异问题, 当 $p_{Y_N}(y) = 0$ 时, 可以 $p_{Y_N}(y) = \epsilon$ 替代, ϵ 可取一小量, 例如 10^{-8} .

当 2 个概率密度函数完全相同时, 相对熵为零. 当 2 个概率密度函数相差越大时, 相对熵绝对值越大. 将式(27)代入式(32), 并将 $\ln(1 - \lambda y^2/(4N - 2\lambda))$ 的 Taylor 展开式代入, 可得

$$H(p_{Y_N}, \phi) \approx - \left(\ln \frac{1}{\sqrt{2\pi}} - \ln C \right) -$$

$$\frac{3}{4} \left(\frac{\lambda}{4N-2\lambda} + \frac{10\lambda^2}{3(4N-2\lambda)^2} + \dots \right) \quad (33)$$

显然,随着 $N \rightarrow \infty$, 有 $H(p_{Y_N}, \varphi) = O(-N^{-1}) \rightarrow 0$.

图1给出式(27)参数 λ 取值为 1.6 和 1.9 时随机频率谐波分量不同个数时的截口概率密度函数与标准正态分布概率密度函数的对比,图2为上述分布的相对熵.从图1可以直观地看到,随着 N 的增大, $Y_N(t)$ 的 1 维概率密度函数 $p_{Y_N}(y, t)$ 很快趋向于标准正态分布,而其相对熵则很快地趋近于零.比较图 1a, b 可以发现,随机频率谐波分量 N 相同时,参数 λ 越接近 1 则分布越接近于正态分布.对于常用地震功率谱模型,一般 $1 \leq \lambda \leq 2$, 所以随机频率谐波分量 N 相同时,由不同的功率谱密度函数生成的第二类随机谐和函数过程 $Y_N(t)$, 其截口概率密度函数相差不大.

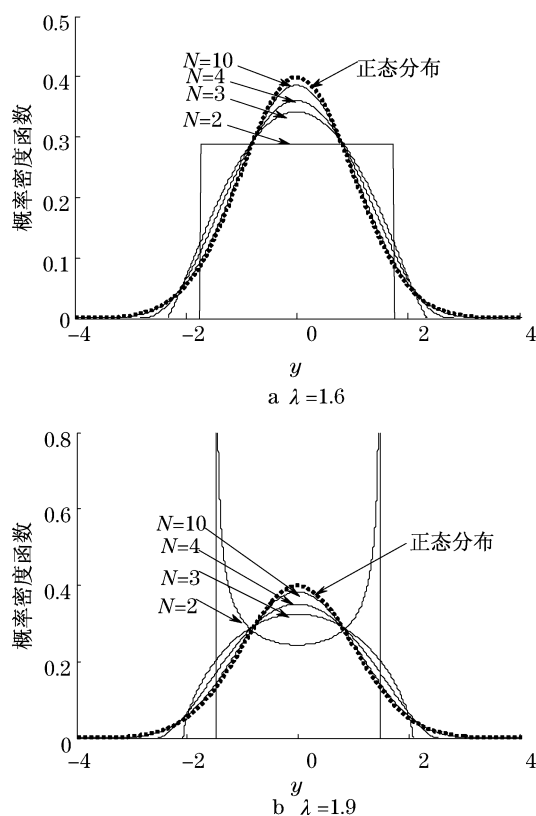


图1 1维概率密度函数与标准正态分布

Fig.1 One-dimensional probability density function and standard normal distribution

2.3 随机谐和函数的项数

当 $N = 1$ 时, $Y_N(t)$ 退化为单一随机频率谐和过程 $Y_1(t) = A(\omega) \cos(\omega t + \phi)$. 根据定理1, 当 ϕ 为 $(0, 2\pi]$ 之间均匀分布的随机变量, ω 服从 $[0, \omega_u]$ 均匀分布, $A(\omega) = \sqrt{G(\omega) \omega_u / \pi}$, $Y_1(t)$ 的功率谱密

度函数精确地等于目标功率谱密度函数. 在此情况下, 仅用 1 个随机谐和分量, 即可完全把握 $S_Y(\omega)$ 所含有的概率信息.

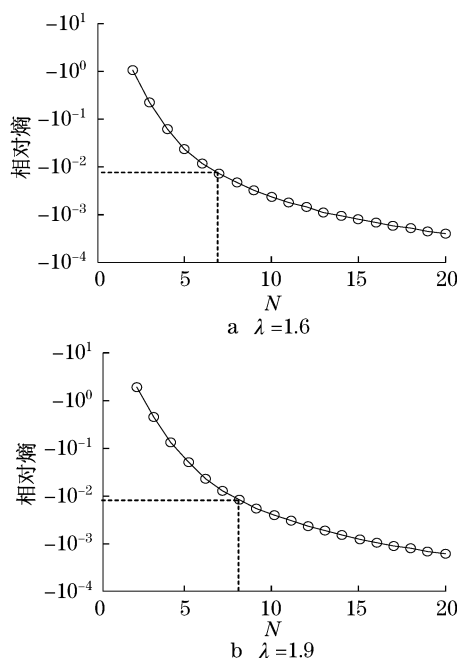


图2 1维分布与标准正态分布的相对熵

Fig.2 Relative entropy between one-dimensional probability density function and standard normal distribution

虽然仅有 1 项可完全表征功率谱密度函数, 但从 1 维概率密度函数来看, 若需要逼近正态分布, 则需项数 $N > 1$. 按照式(32)定义的相对熵, 可以衡量目标概率密度与标准正态分布之间的接近程度. 由图2可知, 若取相对熵 $|H(N)| < 0.01$, 则当 $\lambda = 1.6$ 时, $N > 7$ 即可; 当 $\lambda = 1.9$ 时, $N > 8$ 即可.

对于宽带白噪声过程, 即功率谱密度函数 $S_Y(\omega) = S_0$, $-\omega_u \leq \omega \leq \omega_u$ 时, 谐和分量的幅值 $A(\omega_i) = \sqrt{G_0 \Delta\omega_i / \pi}$ 与随机变量 $\omega_i, i = 1, 2, \dots, N$ 的取值无关, 此时第二类随机谐和函数表达式与第一类随机谐和函数表达完全一致^[11].

3 数值算例

考虑功率谱密度函数为式(24)所示 Clough-Penzien 谱的随机过程, 参数取值依照 2.2.1 节. 根据上述原理, 图3是 10 个随机频率与 1 000 个确定性频率谐和分量的典型地震动时程, 图4是 10 个随机频率与 1 000 个确定性频率谐和分量生成地震动的功率谱密度函数同目标谱的比较. 从直观上看, 二

者的地震动时程没有明显的定性差别,2种方法生成地震动的功率谱密度函数同目标功率谱密度函数都十分相近,且10个随机频率生成的地震动与目标功率谱更为一致.图5是10个随机谐和分量与经典谱表达中取1000个确定性频率谐和分量时合成随机过程的自相关函数,可见二者吻合良好.

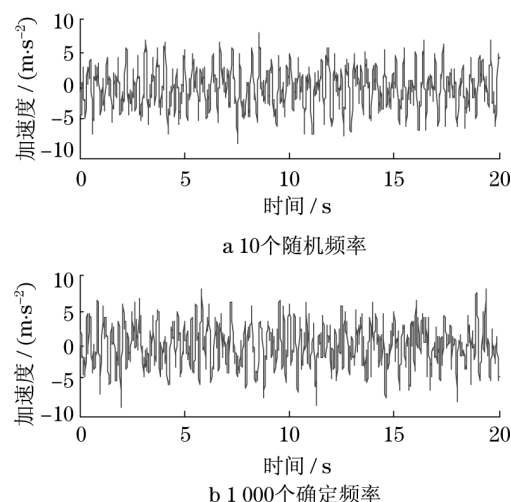


图3 典型地震动时程

Fig.3 Typical ground motion time history

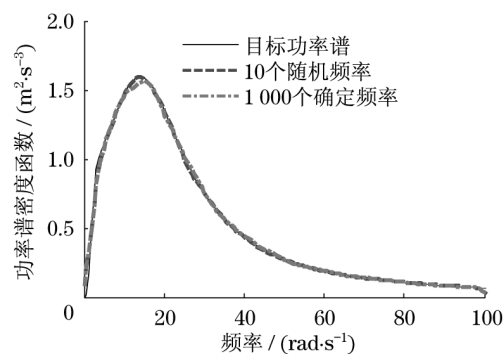


图4 功率谱密度函数

Fig.4 Power spectral density function

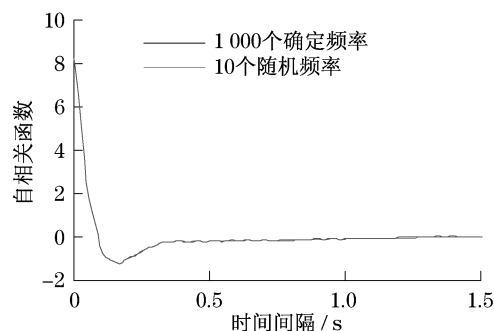


图5 自相关函数

Fig.5 Autocorrelation function

图6给出一个9层结构在随机地震动作用下的线

性与非线性层间位移和内力响应的标准差过程.图7是典型样本的线性与非线性恢复力曲线过程,表明结构进入了严重的非线性阶段.从图6可见,无论是线性还是非线性情况,10个随机谐和分量合成的随机地震动作用下,结构内力和位移响应标准差均具有很高的精度.结合概率密度演化方法,可进一步深入进行非线性结构响应及抗震可靠度的概率密度演化分析^[2].限于本文主题和篇幅,在此不再赘述.

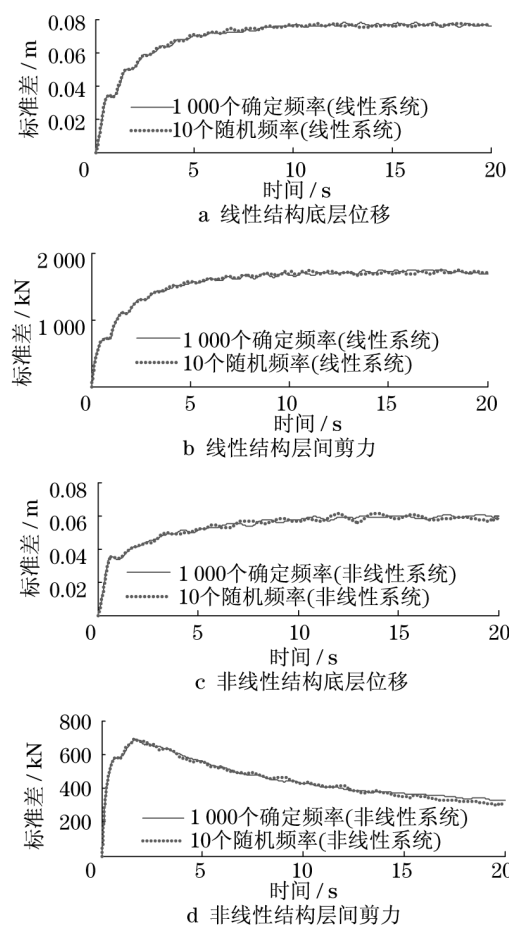


图6 结构响应标准差

Fig.6 Standard deviation of structure response

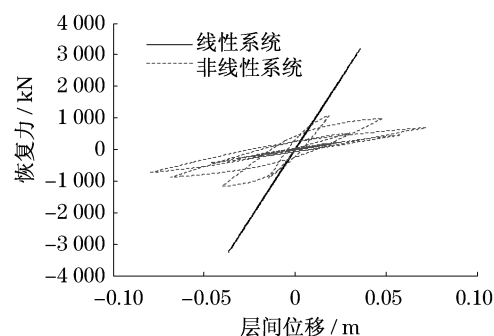


图7 典型线性与非线性恢复力曲线

Fig.7 Typical hysteresis curves for linear and nonlinear structures

4 结论

本文提出的随机谐和函数具有渐进正态性,可以以较少的随机谐和分量合成具有较丰富概率信息的随机过程.研究表明:当随机频率与相位服从独立均匀分布而幅值由频率与目标功率谱密度决定时,无论随机谐和函数的分量数目是多少,相应随机过程的功率谱密度函数均精确地等于目标功率谱密度函数.同时,由于这类随机谐和函数中频率为均匀分布,因此更为方便应用.文中以多自由度体系在平稳随机过程激励下的响应分析为例,验证了所建议随机谐和函数用于随机过程表达的有效性.

参考文献:

- [1] 朱位秋. 随机振动[M]. 北京: 科学出版社, 1992.
ZHU Weiqu. Random vibration [M]. Beijing: Science Press, 1992.
- [2] Li J, Chen J B. Stochastic dynamics of structures [M]. Singapore: John Wiley & Sons Inc, 2009.
- [3] Shinozuka M, Deodatis G. Simulation of stochastic processes by spectral representation[J]. Applied Mechanics Reviews, 1991, 44(4): 191.
- [4] Loève M. Probability theory [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1977.
- [5] Huang S P, Quek S T, Phoon K K. Convergence study of the truncated Karhunen-Loeve expansion for simulation of stochastic processes[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2001, 52(9): 1029.
- [6] 李杰, 刘章军. 基于标准正交基的随机过程展开法[J]. 同济大学学报: 自然科学版, 2006, 34(10): 1279.
LI Jie, LIU Zhangjun. Expansion method of stochastic processes based on normalized orthogonal bases[J]. Journal of Tongji University: Natural Science, 2006, 34(10): 1279.
- [7] Grigoriu M. Evaluation of Karhunen-Loeve, spectral, and sampling representations for stochastic processes[J]. Journal of Engineering Mechanics, 2006, 132(2): 179.
- [8] Goto H, Toki K. Structural response to nonstationary random excitation[C]//Proc World Conf Earthquake Eng 4th. Santiago: [s. n.], 1969: 130 - 144.
- [9] Shinozuka M. Simulation of multivariate and multidimensional random processes[J]. The Journal of the Acoustical Society of America, 1971, 49: 357.
- [10] 陈建兵, 李杰. 谱表达方法的频率取点优选[J]. 振动工程学报, 2011, 24(1): 89.
CHEN Jianbing, LI Jie. Optimal selection of frequencies in the spectral representation method[J]. Chinese Journal of Vibration Engineering, 2011, 24(1): 89.
- [11] 陈建兵, 李杰. 随机过程的随机谐和函数表达[J]. 力学学报, 2011, 43(3): 505.
CHEN Jianbing, LI Jie. Stochastic harmonic function and spectral representations[J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2011, 43(3): 505.
- [12] Laning J H, Battin R H. Random processes in automatic control [M]. New York: McGraw-Hill, 1956.
- [13] Tajimi H. A statistical method of determining the maximum response of a building structure during an earthquake [C]//Proceedings of the Second World Conference on Earthquake Engineering. Tokyo: [s. n.], 1960: 781 - 798.
- [14] 李杰, 李国强. 地震工程学导论[M]. 北京: 地震出版社, 1992.
LI Jie, LI Guoqiang. Introduction to earthquake engineering [M]. Beijing: Earthquake Press, 1992.
- [15] Clough R W, Penzien J. Dynamics of structures [M]. New York: McGraw-Hill College, 1975.
- [16] 张猛, 张哲, 李天. 与规范反应谱相对应的 Clough-Penzien 模型参数研究[J]. 世界地震工程, 2007, 23(1): 56.
ZHANG Meng, LI Zhe, LI Tian. Study on parameters of clough-penzien seismic random model corresponding to response spectrum of GB 50011—2001 [J]. World Earthquake Engineering, 2007, 23(1): 56.
- [17] Zhao Y G, Ono T. Moment methods for structural reliability [J]. Structural Safety, 2001, 23(1): 47.
- [18] 克莱因 M. 古今数学思想 (第二册) [M]. 上海: 上海科技出版社, 2002.
Kline M. Mathematical thought from ancient to modern times (Vol. II) [M]. Shanghai: Shanghai Science & Technical Publishers, 2002.
- [19] Sobezyk K, Trbicki J. Maximum entropy principle in stochastic dynamics [J]. Probabilistic Engineering Mechanics, 1990, 5 (3): 102.