

# 不对称模态密频结构的主动控制

谢发祥<sup>1</sup>, 孙利民<sup>2</sup>

(1. 河海大学 土木与交通学院, 南京 210097; 2. 同济大学 土木工程防灾国家重点实验室, 上海 200092)

**摘要:** 分析了具有不对称模态的密频结构在脉冲荷载作用下, 采用单主动质量阻尼器(AMD)和双 AMD 在速度和状态反馈下进行主动控制时, 两个密集频率模态之间的模态阻尼比的分布规律; 通过构建采用具有密集频率的斜拉桥模型并进行了主动控制试验, 通过模态分析将试验结果和理论分析结果进行了对比验证, 结果显示了较好的吻合程度。

**关键词:** 密频结构; 主动控制; 密频模态; 模态分析; 模型试验

**中图分类号:** TB53

**文献标识码:** A

## Active Control of Structures with Closely Space Natural Frequencies and Unsymmetrical Modes

XIE Faxiang<sup>1</sup>, SUN Limin<sup>2</sup>

(1. Civil and Transportation College, Hohai University, Nanjing 210097, China; 2. State Key Laboratory for Disaster Reduction in Civil Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, China)

**Abstract:** The structure with closely spaced natural frequencies and unsymmetrical modes is analyzed under pseudo-impulses installed with one or two active mass damper (AMDs). The distribution of the implemental damping ratios of different modes is evaluated under state and velocity feedbacks. An experimental model of cable-stayed bridge with closely spaced natural frequencies is build up to verify the theoretical results under control. Modal analysis show that the experimental results agree well with the theoretical results of modal parameters including frequencies and modal damping ratios.

**Key words:** structures with closely spaced natural frequencies; active control; modes with closely spaced natural frequencies; modal analysis; model experiment

密频结构即具有密集固有频率的结构, 是指在很窄的一段频率范围内存在多个相邻的固有频率。

密频结构在工程结构中广泛存在。在土木工程结构的施工或者完成阶段, 往往存在准对称或局部准对称结构, 其振动固有频率也往往是密集的; 此外一些安装主动或者被动调谐质量阻尼器的结构也有可能具有密集模态的特征<sup>[1]</sup>。

在密频结构的控制方面, Hughes 等<sup>[2]</sup>指出: 对于具有  $N$  个重频(频率相同)模态的结构, 至少采用  $N$  个作动器才能保证结构的可控性。而对于具有  $N$  个密集频率(频率接近但不同)模态的结构, 根据可控性条件, 理论上仅需一个作动器便能控制这些模态。Swigert 和 Forward<sup>[3]</sup>通过研究具有两个密集频率的圆柱天线时发现, 采用单输入的密频模态的可控性不均衡。Abe<sup>[4]</sup>采用单输入控制两阶密频结构, 讨论了不同控制算法的控制效果。

为了研究具有密频特征的结构在受控状态下不同模态可控性的不均衡特性, 本文构建了一个横向模态不对称的密频斜拉桥结构模型, 采用速度和状态反馈研究了采用单主动质量阻尼器(active mass damper, AMD)和双 AMD 控制时, 结构的横向密集频率和附加模态阻尼比的变化规律。采用线性二次高斯法(linear quadric Gaussian, LQG)算法进行了主动控制试验, 利用模态分析方法获得了密频结构的模态阻尼比, 并将试验结果与理论分析结果进行了对比和验证。

本文构建的是一个处于双悬臂施工阶段的斜拉桥模型(图 1), 主梁对称于主塔, 主塔与主梁处焊接, 每侧设置 3 对斜拉索, 整个模型共 12 根斜拉索。

在模型的边跨、中跨分别或者同时施加垂直于主梁的横向水平 6cm 的强迫位移以模拟脉冲荷载激励, 通过安装在主梁上的加速度传感器(布置位置参见图 1)记录结构的横向加速度响应时程。通过随机子空间(SSI)模态识别方法<sup>[5]</sup>, 得到模型结构的横向

收稿日期: 2011-03-22

基金项目: 国家自然科学基金重大研究计划重点支持项目(90915011)

第一作者: 谢发祥(1977—), 男, 讲师, 工学博士, 主要研究方向为结构振动控制。E-mail: xiefaxiang@gmail.com

通讯作者: 孙利民(1963—), 男, 教授, 工学博士, 博士生导师, 主要研究方向为结构振动控制与健康监测。E-mail: lmsun@tongji.edu.cn

前 4 阶频率和相应的模态阻尼比,见表 1.



图 1 具有密频特性的斜拉桥模型

Fig.1 Cable-stayed bridge model with closely spaced natural frequencies

由表 1 可见,该模型的横向第 1、2 阶和第 3、4 阶模态均为密集频率,且两簇模态均具有不对称的特点,表现为:横向第 1 阶模态和第 2 阶模态在安装 AMD 的边跨和主跨的模态位移之比为  $1:0.15=6.67$ ,横向第 3 阶模态和第 4 阶模态在安装 AMD 的边跨和主跨跨中的模态位移之比约为  $1:0.22=4.49$ .

表 1 斜拉桥模型频率和模态阻尼比识别结果

Tab.1 Identified frequencies and modal damping ratios of the model

项目	1 阶	2 阶	3 阶	4 阶
频率/Hz	1.791	1.842	17.784	18.150
阻尼比/%	0.51	0.24	0.10	0.11

## 1 基本动力方程

本节从结构的基本动力方程入手研究具有密集频率和不对称模态特性的结构在采用单 AMD 输入进行主动控制时不同模态之间附加模态阻尼比的分配情况.

对于具有  $N$  个自由度的结构,其动力方程可以写为

$$\mathbf{M}_c \ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C}_c \dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}_c \mathbf{x}(t) = \mathbf{B}_c \mathbf{u}(t) + \mathbf{D}_c \mathbf{w}(t) \quad (1)$$

式中: $\mathbf{M}_c, \mathbf{C}_c, \mathbf{K}_c$  分别为系统的质量、阻尼和刚度矩阵; $\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t)$  和  $\ddot{\mathbf{x}}(t)$  分别为系统的位移向量,速度向量和加速度向量; $\mathbf{B}_c, \mathbf{D}_c$  分别为控制力向量和外

$$\text{Det} \begin{bmatrix} s^2 + 2\xi k(k+1)/(1+k^2) + (1-\beta)^2 & 2\xi k(k+1)/(1+k^2) \\ 2\xi k(k+1)/(1+k^2) & s^2 + 2\xi(k+1)/(1+k^2) + (1+\beta)^2 \end{bmatrix} = 0$$

式中: $s$  为系统闭环特征值; $\xi$  为归一化的控制增

部输入位置向量; $\mathbf{u}(t), \mathbf{w}(t)$  分别为控制力和外部干扰. 设结构模态矩阵为  $\Phi$ , 令  $\mathbf{x} = \Phi \mathbf{z}$ , 代入方程(1), 并左乘  $\Phi^T$  可以得到:

$$\begin{aligned} & \Phi^T \mathbf{M}_c \Phi \ddot{\mathbf{z}}(t) + \Phi^T \mathbf{C}_c \Phi \dot{\mathbf{z}}(t) + \Phi^T \mathbf{K}_c \Phi \mathbf{z}(t) \\ &= \Phi^T \mathbf{B}_c \mathbf{u}(t) + \Phi^T \mathbf{D}_c \mathbf{w}(t) \end{aligned} \quad (2)$$

对于两自由度结构,可以将式(2)改写为状态方程的形式:

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{A} \mathbf{q} + \mathbf{B} \mathbf{u}(t) + \mathbf{r} \mathbf{w}(t) \quad (3)$$

其中

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{I} \\ -\mathbf{A} & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{b} \end{bmatrix}, \mathbf{q} = \begin{bmatrix} \mathbf{z} \\ \dot{\mathbf{z}} \end{bmatrix}$$

矩阵  $\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{r}$  的表达式为

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} (\omega_a(1-\beta))^2 & 0 \\ 0 & (\omega_a(1+\beta))^2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b} = \Phi^T \mathbf{b}_0$$

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} 0 \\ \Phi^T \mathbf{r}_0 \end{bmatrix}$$

式中: $\beta$  为两自由度结构的频率密集度参数;模态矩阵  $\Phi$  可以写成如式(4)的形式; $\omega_a$  为平均频率; $\mathbf{b}_0, \mathbf{r}_0$  分别是控制力  $\mathbf{u}(t)$  和扰动荷载  $\mathbf{w}(t)$  的位置矩阵.

考虑到两自由度结构的模态不对称性,可以将第 1 阶和第 2 阶的模态矩阵  $\Phi$  写为

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{1+k^2}} \begin{bmatrix} 1 & k \\ -k & 1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

其中, $k$  表示第 2 阶模态在边跨相对于第 1 阶模态的位移比值. 对于本文模型的前两阶横向振形而言,取  $k=0.15=1/6.67$ .

### 1.1 采用速度反馈

本文关心的是结构不同模态阻尼比的增加,因此可以假定结构的原有阻尼为零. 将模态表达式(4)代入方程(3),首先考虑控制力仅与模态速度有关,可以得到方程:

$$\begin{aligned} & \ddot{\mathbf{z}}(t) + \mathbf{A} \mathbf{z}(t) = \mathbf{b} \mathbf{u}(t) \\ & \mathbf{u}(t) = -\mathbf{g}_v \dot{\mathbf{z}}(t) \end{aligned} \quad (5)$$

式中: $\mathbf{z} = [z_1, z_2]^T$  是状态向量; $\mathbf{b} = [b_1, b_2]^T$  为作动器位置向量; $\mathbf{g}_v = [g_{v1}, g_{v2}]^T$  是控制力增益; $\mathbf{A} = \text{diag}(\omega_{10}^2, \omega_{20}^2)$ , 是结构无控模态刚度矩阵; $\omega_{10}, \omega_{20}$  为无控结构的固有频率.

将式(4)表示的模态转换矩阵  $\Phi$  代入方程(5),经过与文献[4, 6]类似的推导可以得到受控结构的特征方程:

$$\text{Det} \begin{bmatrix} s^2 + 2\xi k(k+1)/(1+k^2) + (1-\beta)^2 & 2\xi k(k+1)/(1+k^2) \\ 2\xi k(k+1)/(1+k^2) & s^2 + 2\xi(k+1)/(1+k^2) + (1+\beta)^2 \end{bmatrix} = 0 \quad (6)$$

益<sup>[6]</sup>. 由式(6)求解得到系统的特征值后,可以获得

结构的模态参数. 由于存在变化的参数  $k$ , 可采用数值方法求解式(6)的特征值, 得到在采用速度反馈情况下结构模态阻尼比与  $k$  的变化关系. 当横向第 1

阶、第 2 阶模态的频率密集度参数  $\beta=0.014$ ,  $k=1/6.67=0.15$  时, 两个密频模态的附加模态阻尼比随归一化控制增益  $\xi$  变化的情况如图 2 所示.

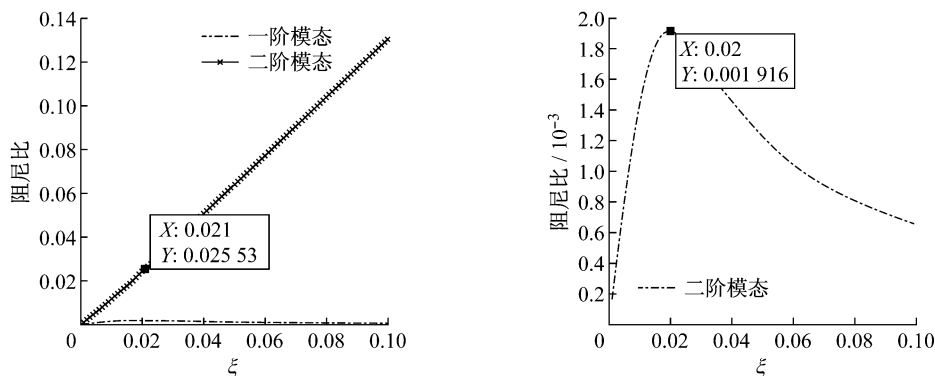


图 2 速度反馈下模型横向 1、2 阶模态阻尼比分配

Fig. 2 Damping ratios of the first two transversal modes under velocity feedback

由图 2 可见, 结构第 2 阶模态的附加模态阻尼比随着控制增益的增加, 先增加后减小, 在  $\xi \approx 0.02$  时取得最大值为 0.19%, 此时结构相应的第 1 阶模态附加模态阻尼比为 2.42%.

速度反馈的计算结果表明, 采用单 AMD 控制的密频结构的二阶模态所能够获得的附加模态阻尼比是不均匀的, 说明两者的可控程度也是不一致的.

### 1.2 采用状态反馈

如果控制力由状态反馈产生, 首先考虑如下性能指标:

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} (\mathbf{z}^T \mathbf{z} + \mathbf{R} \mathbf{u}^2) dt \quad (7)$$

式中,  $t_0, t_f$  分别表示控制的起始和结束时间.

假设控制力由状态反馈描述:

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K} \mathbf{z} = -[\mathbf{g}_s \mathbf{z} + \mathbf{h}_s \mathbf{z}] \quad (8)$$

式中:  $\mathbf{K}$  为状态控制增益;  $\mathbf{g}_s, \mathbf{h}_s$  分别为对应的速度和位移控制反馈增益, 那么使性能指标  $J$  最小的控制增益可以由以下方程求得<sup>[7]</sup>:

$$[\mathbf{g}_s \quad \mathbf{h}_s] = -\mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \quad (9)$$

式中,  $\mathbf{P}$  是满足下列 Riccati 方程的解:

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} - \mathbf{P} \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} + \mathbf{I} = \mathbf{0}$$

令权重系数矩阵  $\mathbf{R} = O(1/\beta)$ , 将式(8), (9)代入到方程(7)即可以得到与模态不对称系数  $k$  有关的 Riccati 方程. 求解在  $k$  取不同值时 Riccati 方程的解, 可以得到闭环系统的特征值, 求得两阶模态的频率和阻尼比<sup>[8]</sup>. 图 3 表示的是在  $1/k$  与两自由度密频结构模态阻尼比的关系.

从图 3 可见, 随着  $1/k$  值的增加, 即两个模态之间不均匀性的加剧, 结构第 2 阶模态的附加阻尼比

迅速减小, 而第 1 阶模态的附加阻尼比增加速度趋于平缓. 当参数  $\beta=0.014$ ,  $1/k=d=6.67$  时, 状态反馈下结构两阶模态的附加阻尼比分别为: 2.32%, 0.26%. 状态反馈的计算结果也表明, 采用单 AMD 控制的双密频结构两自由度的附加模态阻尼比的分配是不均匀的.

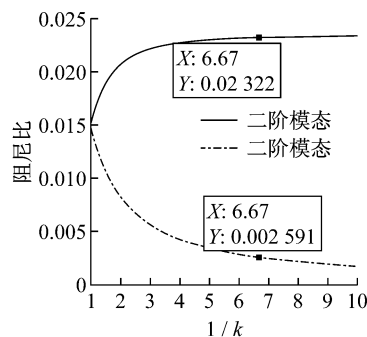


图 3 状态反馈下不对称模态系数与结构附加模态阻尼比和频率的关系

Fig. 3 The relationship of the unsymmetrical modal shape coefficient versus the modal damping ratio and modal frequencies under state feedback

## 2 试验验证

为验证采用单输入控制密频结构时的附加模态阻尼比的分配情况, 本文构建了具有密频特性的斜拉桥模型, 进行了主动控制试验. 采用单 AMD 和双 AMD 对结构进行主动控制. 在两跨都安装 Quanser 公司的 AMD 设备<sup>[9]</sup>, 但可以选择一个或两个 AMD 对结构进行主动控制, AMD 活动质量块重 0.65 kg,

约占模型主梁重量的 0.68%。

试验采用在梁端施加 6 cm 横向位移并突然释放模拟脉冲荷载. 控制算法采用线性二次高斯控制(LQG)算法<sup>[10-12]</sup>.

采用边跨单 AMD 控制时,分别在边跨和主跨施加脉冲荷载,利用安装在主梁上的 8 个加速度传

感器采集结构的响应信号,用随机子空间识别(SSI)方法<sup>[5]</sup>识别结构的模态参数,可以计算得到不同工况下模型横向前两阶频率和模态阻尼比. 表 2 第 1 行是 AMD 安装在边跨,脉冲荷载也作用在边跨时的结构模态参数. 荷载作用在中跨时的计算结果见表 2 第 2 行.

表 2 不同 AMD 控制时结构模态参数的变化

Tab.2 Modal parameter changes with different configurations of AMD

控制算法	实测频率/Hz		实测阻尼比增幅		阻尼比增幅误差/%		备注
	1 阶	2 阶	1 阶	2 阶	1 阶	2 阶	
LQG	1.80	1.85	0.025 8	0.002 6	11.11	0.35	AMD 位于边跨,边跨脉冲
LQG	1.78	1.86	0.002 6	0.001 7	-88.80	-34.39	AMD 位于边跨,中跨脉冲
LQG	1.81	1.88	0.025 1	0.024 3			双 AMD,两跨脉冲

因为在试验中采用了状态反馈计算控制力,所以在表 2 的比较中,使用第 2 节中状态反馈下的横向前两阶附加模态阻尼比值 2.32%,0.26%与试验结果进行对比.

在本试验配置下,采用单 AMD 控制,脉冲作用在边跨时,两自由度的密频结构阻尼比的分配规律是明显的:第 1 阶模态获得的附加阻尼比远大于第 2 阶模态,说明此时第 1 阶模态的可控性高于第 2 阶模态.

当脉冲荷载作用在中跨时,边跨的横向前 1 阶模态获得的附加模态阻尼比较小,这是由于在中跨受到试验“脉冲”激励的情况下,第 1 阶模态并未被充分激励,所以 AMD 在边跨以第 2 阶频率抑制中跨为主的第 2 阶模态.

作为对比,表 2 第 3 行是在两跨同时受到脉冲荷载作用时,采用双 AMD 控制时横向前两阶频率和模态阻尼比的计算结果. 在双 AMD 的控制作用下,试验模型前两阶模态的附加模态阻尼比增幅都在 2.4%以上,结构的振动得到了有效抑制.

### 3 结论

通过开展不对称模态密频结构在速度和状态反馈下的理论分析和试验研究,可以得到以下结论:

(1) 采用单 AMD 对密频结构进行控制是可行的. 但是对于具有两阶密集频率的结构,无论采用速度或者状态反馈,结构密频模态所获得的输入能量是不均匀的,导致两阶密频模态附加阻尼比分布的不均衡.

(2) 在本试验配置下,采用单 AMD 控制两阶密频结构在脉冲荷载下的响应时,第 1 阶模态的受控

性能高,获得附加模态阻尼比大于第 2 阶模态,主要的控制能量为第 1 阶模态所消耗;结构第 2 阶模态获得的控制输入能量很低,表现为第 2 阶模态的受控性能差,获得的附加模态阻尼比低.

(3) 采用双 AMD 控制时,两个密集模态在“脉冲”荷载作用下的响应均能够被很好地抑制,密频结构附加模态阻尼比都有大幅增加.

### 参考文献:

- [1] 刘利军,樊江玲,张志谊,等. 密频系统模态参数辨识及其振动控制的研究进展[J]. 振动与冲击, 2007, 26(4):109.  
LIU Lijun, FAN Jiangling, ZHANG Ziyi, et al. Study progress in modal parameter identification and vibration control of system with crowded modes[J]. Journal of Vibration and Shock, 2007, 26(4):109.
- [2] Hughes P C, Skelton R E. Controllability and observability of linear matrix second-order system[J]. Journal of Applied Mechanics, 1980, 47(2):415.
- [3] Swigert C J, Forward R L. Electronic damping of orthogonal bending modes in a cylindrical mast experiment[J]. Journal of Spacecraft, 1981, 18(1):11.
- [4] Abe M. Vibration control of structures with closely spaced frequencies by a single actuator[J]. Journal of Vibration and Acoustics, 1998, 120(1):117.
- [5] 樊江玲. 基于输出响应的模态参数辨识方法研究[D]. 上海: 上海交通大学机械工程系, 2006.  
FAN Jiangling. Study on the output based modal parameter identification[D]. Shanghai: Shanghai Jiaotong University. Department of Mechanical Engineering, 2006.
- [6] 谢发祥,孙利民. 基于摄动法的密频结构可控性研究[J]. 同济大学学报:自然科学版, 2009, 37(5):1.  
XIE Faxiang, SUN Limin. Controllability of structures with closely spaced natural frequencies based on perturbation analysis[J]. Journal of Tongji University: Natural Science, 2009, 37(5):1.