第 40 卷第 5 期
2012 年 5 月

同 济 大 学 学 报(自 然 科 学 版)
JOURNAL OF TONGJI UNIVERSITY(NATURAL SCIENCE)

Vol. 40 No. 5
May 2012

文章编号：0253-374X(2012)05-0772-03

DOI：10.3969/j.issn.0253-374x.2012.05.022

调和映射的刘维尔型定理

周朝晖，陈志华
(同济大学 数学系，上海 200092)

摘要：假设出发流形的径向截曲率 K_r 满足 $|K_r(x)| \leqslant \frac{k(1-k)}{r^2(x_0,x)}$，这里 x_0 为极点，k 为满足一定条件的常数，那么到任意象流形的能量慢发散的调和映射必是常映射. 因而它是文献[3-4]中所提到的定理的推广.

关键词：径向截曲率；能量慢发散；调和映射
中图分类号：O 186.12　　**文献标识码**：A

A Liouville Type Theorem of Harmonic Maps

ZHOU Chaohui, *CHEN Zhihua*
(Department of Mathematics, Tongji University, Shanghai 200092, China)

Abstract: Assuming the radial sectional curvature K_r of the target manifold satisfies $|K_r(x)| \leqslant \frac{k(1-k)}{r^2(x_0,x)}$, where x_0 is a pole, k is a constant satisfying some conditions, a harmonic map to any image manifold with slowly divergent energy must be constant. Then it improves the theorems of Reference [3-4] raised.

Key words: radial sectional curvature; slowly divergent energy; harmonic map

1 引言

设 M 是一个 $n(n\geqslant 3)$ 维完备非紧的黎曼流形. 如果存在一点 x_0，使得指数映射 $\exp_{x_0}: T_{x_0}M \to M$ 是一个微分同胚，那么 M 称为有极点的黎曼流形，x_0 称为 M 的极点. 任何有极点的黎曼流形是完备的. 假设 $\gamma:[0,+\infty] \to M$ 是从固定点 p 出发的正则测地线，$\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t)$ 表示其单位切向量(即 $\|\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t)=1\|$). $\forall x \in M$，令 $x=\gamma(t)$，$t\in[0,b)$，以及 M_x 是 x 的切空间，每个在 M_x 中过点 x 的二维平面 π 决定了点 x 的截曲率. 当 $\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t)$ 在 π 中时，称 $K(\pi)$ 为径向截曲率.

现在讨论调和映射的正则性. 物理学家[1]首先证明了从欧式空间 $\mathbf{R}^n(n\geqslant 3)$ 到球面的任何有限能量的调和映射一定是常值映射. 随后 Sealey[2] 证明了从欧式空间 $\mathbf{R}^n$ 和 $\mathbf{H}^n(n\geqslant 3)$ 到任何黎曼流形有有限能量的调和映射一定是常值映射.

后来 Xin[3-4] 证明了：

定理 1　设 M 是完备、单连通且具有非正截面率的 m 维黎曼流形，其截曲率 K 满足

$$-\frac{A}{1+r^2(o,x)} \leqslant K(x) \leqslant 0,$$

这里 A 是满足 $A\leqslant(1-\varepsilon)^2-\frac{1}{4}$ 的某一正常数，o 是某一点. 设 f 是从 M 到任何黎曼流形 $\bar{M}$ 的调和映射. 如果 $m>2$，并且 f 的能量慢发散，那么 f 必是常值映射.

正如笔者在文中所提及的，此定理当 M 是极点 o 且其径向截曲率 K_r 满足 $-\frac{A}{1+r^2(o,x)}\leqslant K_r(x)\leqslant 0$ 时仍成立.

现在证明了在某一程度上非正径向截曲率不是必须的，即

定理 2　假设 M 是一个 n 维完备非紧且有极点 x_0 的黎曼流形，其径向截曲率 K_r 满足

(1) 当 $n=3$ 时，$|K_r(x)|\leqslant\frac{k(1-k)}{r^2(x_0,x)}$，这里 $r>0$ 且 $1>k>\frac{1+\sqrt{3}}{4}$；

(2) 当 $n>3$ 时，$|K_r(x)|\leqslant\frac{1}{4r^2(x_0,x)}$，这里 $r>0$.

设 f 是从 M 到任何黎曼流形 $\bar{M}$ 的能量慢发散的调和映射，那么 f 必是常值映射.

收稿日期：2011－03－24
基金项目：国家自然科学基金项目(11171255)
第一作者：周朝晖(1974—)，女，副教授，理学博士，主要研究方向为微分几何. E-mail：zhou6666@tongji.edu.cn

2　引理及其证明

在证明定理 2 之前，不用 Hessian 比较定理或者 Riccatti 方程证明引理 1，而是用初等的方法证明.

引理 1　设 M 是一个 n 维完备非紧且有极点 x_0 的黎曼流形，其径向截曲率 K_r 满足

$$|K_r| \leqslant \frac{k(1-k)}{r^2},$$

这里 r 表示到点 x_0 的距离，则 $\frac{k}{r} \leqslant \mathrm{Hess}(r)(X_i, X_i) \leqslant \frac{1+\sqrt{1+4k(1-k)}}{2r}$，$1 \leqslant i \leqslant n-1$，这里 $\mathrm{Hess}(r)$ 是距离函数 $r(x)$ 的 Hessian，$\{X_i\}_{i=0}^{n-1}$ 是沿测地线平行移动的正交标架场以及 $X_0 = \nabla r$.

证明　由文献[5]中的引理 2.2，知道在条件 M 有极点 x_0 和 $K_r \leqslant \frac{k(1-k)}{r^2}$ 下，$\mathrm{Hess}(r)(X_i, X_i) \geqslant \frac{k}{r}$；因此只要证明 $\mathrm{Hess}(r)(X_i, X_i) \leqslant \frac{1+\sqrt{1+4k(1-k)}}{2r}$ 成立.

现在选取沿测地线平行移动的正交标架场 $\{X_i\}_{i=0}^{n-1}$，其中 $X_0 = \nabla r$ 和 $\nabla_{x_0} X_0 = 0$.

令 $\nabla_{X_i} X_0 = u_{ij} X_j$，$\nabla_{X_0} X_i = \lambda_{ij} X_j$. 显然

$$u_{ij} = \langle \nabla_{X_i} X_0, X_j \rangle = X_i \langle X_0, X_j \rangle - \langle X_0, \nabla_{X_i} X_j \rangle = -\nabla_{X_i} X_j(r) = \mathrm{Hess}(r)(X_i, X_j) = u_{ji}, \quad (1)$$

$\lambda_{ij} = 0$.

$$K_r = \langle R(X_i, X_0) X_0, X_i \rangle = -\langle \nabla_{X_0} \nabla_{X_i} X_0, X_i \rangle - \langle \nabla_{[X_i, X_0]} X_0, X_i \rangle + \langle \nabla_{X_i} \nabla_{X_0} X_0, X_i \rangle = -X_0(u_{ii}) - u_{ij} u_{ji}. \quad (2)$$

因此有

$$-\frac{k(1-k)}{r^2} \leqslant K_r \leqslant \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(-u_{ii}) - u_{ii}^2. \quad (3)$$

将证明在式(3)下，

$$u_{ii} \leqslant \frac{1+\sqrt{1+4k(1-k)}}{2r}, \quad i \geqslant 1.$$

假设 $v_{ii} = \frac{1+\sqrt{1+4k(1-k)}}{2r}$，那么

$$\frac{\mathrm{d}v_{ii}}{\mathrm{d}r} + v_{ii}^2 - \frac{k(1-k)}{r^2} = 0. \quad (4)$$

令 $A = \frac{1}{u_{ii}}$，$B = \frac{1}{v_{ii}}$，则

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}r} \geqslant 1 - \frac{k(1-k)}{r^2} A^2,$$

和

$$A(0) = 0;$$

以及

$$\dot{B} = 1 - \frac{k(1-k)}{r^2} B^2 = \frac{\sqrt{1+4k(1-k)}-1}{2k(1-k)}, \quad (5)$$

和

$$B(0) = 0. \quad (6)$$

那么

$$\dot{A}(0) \geqslant 1 - \frac{k(1-k)}{r^2} A^2 \Big|_{r=0} = 1 - k(1-k) \dot{A}^2(0),$$

即

$$\dot{A}(0) \geqslant \frac{\sqrt{1+4k(1-k)}-1}{2k(1-k)} \text{ 或者}$$

$$\dot{A}(0) \leqslant \frac{-\sqrt{1+4k(1-k)}-1}{2k(1-k)} < 0.$$

因为

$$A(r) \leqslant \frac{r}{k}, \quad k \geqslant \frac{1}{2},$$

所以

$$\dot{A}(r) \geqslant 1 - \frac{k(1-k)}{r^2} \frac{r^2}{k^2} = 2 - \frac{1}{k} \geqslant 0. \quad (7)$$

即 $\dot{A}(0) \geqslant \dot{B}(0)$，在此条件下，可以证明 $A(r) \geqslant B(r)$，这里 $r \geqslant 0$.

记 $E = \{r \in [0, \infty) \mid \dot{A}(r) < \dot{B}(r)\}$. 如果 $E = \phi$，那么 $\dot{A}(r) \geqslant \dot{B}(r)$；$\forall r \in [0, \infty)$，又因为 $A(0) = B(0) = 0$，那么 $A(r) \geqslant B(r) \geqslant 0$；$\forall r \geqslant 0$.

如果 E 是 $[0, \infty)$ 中的非空开集，那么对于 $\forall a \in E$，有 $A(a) \geqslant B(a)$. 否则，

$$\dot{B}(a) > \dot{A}(a) \geqslant 1 - \frac{k(1-k)}{r^2} A^2 \Big|_{r=a} > 1 - \frac{k(1-k)}{r^2} B^2 \Big|_{r=a}.$$

显然这是不成立的.

对 $\forall c \in [0, \infty) \setminus E$，记 $r_0 = \mathrm{Sup}(E \cap [0, c])$，那么

$$A(c) - B(c) = \int_{r_0}^{c} (\dot{A}(s) - \dot{B}(s) \mathrm{d}s + A(r_0) - B(r_0).$$

由连续性，$A(r_0) - B(r_0) \geqslant 0$ 和 $(r_0, c] \subset [0, \infty) \setminus E$，使得 $\dot{A}(s) - \dot{B}(s) \geqslant 0$，因而 $A(c) - B(c) \geqslant 0$，即 $A(c) \geqslant B(c)$.

因而 $A(r) \geqslant B(r)$；$\forall r \in [0, \infty)$，也就是说，

$$\mathrm{Hess}(r)(X_i,X_i)=u_{ii}\leqslant \frac{1+\sqrt{1+4k(1-k)}}{2r};\forall r\geqslant 0 \tag{8}$$

3 定理2的证明

对任意光滑映射 $f:(M,g)\to(\bar{M},h)$，能量密度 $e(f)=\frac{1}{2}\langle f_*e_\alpha,f_*e_\alpha\rangle_{\bar{M}}$，这里$\{e_\alpha\}(\alpha=0,\cdots,n-1)$是$M$上的局部正交标架场，应力－能量张量定义为$S_f=e(f)g-f^*h$，有如下的公式[3-4]：

$$\int_{\partial D}e(f)\langle \boldsymbol{N},\boldsymbol{N}\rangle*1=\int_D(\mathrm{div}\,S_f)(\boldsymbol{X})*1+\int_D\langle S_f,\nabla\boldsymbol{X}\rangle*1+\int_{\partial D}\langle f_*\boldsymbol{X},f_*\boldsymbol{N}\rangle*1, \tag{9}$$

这里$D\subset M$是M中紧致区域，$\boldsymbol{X}$是D上的向量场，$\boldsymbol{N}$是∂D的单位法向量，$*1$是体积元. 现在 $\mathrm{div}\,S_f=0$ 是由于f是调和映射.

设$D=B_R(x_0)$为以x_0为中心，R为半径的测地球. 其边界为测地球面$S_R(x_0)$. 显然在$B_R(x_0)$中从x_0出发的距离函数r的平方是光滑函数. 在式(9)中取$\boldsymbol{X}=r\frac{\partial}{\partial r}$，其中$\frac{\partial}{\partial r}$表示单位径向向量场. 显然$S_R(x_0)$上的单位法向量$\boldsymbol{N}=\frac{\partial}{\partial r}$. 有

$$\int_{\partial D}e(f)\langle \boldsymbol{X},\boldsymbol{N}\rangle*1-\int_{\partial D}\langle f_*\boldsymbol{X},f_*\boldsymbol{N}\rangle*1=\int_{S_R(x_0)}R\,e(f)*1-\int_{S_R(x_0)}R\langle f_*\frac{\partial}{\partial r},f_*\frac{\partial}{\partial r}\rangle*1\leqslant R\int_{S_R(x_0)}e(f)*1. \tag{10}$$

另一方面，

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial r}}\boldsymbol{X}=\frac{\partial}{\partial r},$$

$$\nabla_{e_s}\boldsymbol{X}=r\nabla_{e_s}\frac{\partial}{\partial r}=r\mathrm{Hess}(r)(e_s,e_t)e_t,$$

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{X}=1+r\mathrm{Hess}(r)(e_s,e_s),$$

其中$\{e_\alpha\}=\{e_s,\frac{\partial}{\partial r}\}$是$B_R(x_0)$上的局部正交标架场. 所以，

$$\langle f_*e_\alpha,f_*e_\beta\rangle\langle\nabla_{e_\alpha}\boldsymbol{X},e_\beta\rangle=r\mathrm{Hess}(r)(e_s,e_t)\langle f_*e_s,f_*e_t\rangle+\langle f_*\frac{\partial}{\partial r},f_*\frac{\partial}{\partial r}\rangle, \tag{11}$$

并且

$$\langle S_f,\nabla\boldsymbol{X}\rangle=e(f)\mathrm{div}\,\boldsymbol{X}-\langle f,e_\alpha,f_*e_\beta\rangle\langle\nabla_{e_\alpha}\boldsymbol{X},e_\beta\rangle=e(f)(1+r\mathrm{Hess}(r)(e_s,e_s))-\left|f_*\frac{\partial}{\partial r}\right|^2-r\mathrm{Hess}(r)(e_s,e_t)\langle f_*e_s,f_*e_t\rangle. \tag{12}$$

不失一般性，在式(12)中选取保证$\langle f_*e_s,f_*e_t\rangle=0$的标架场，这里$t\neq s$. 由引理1，有

$$\langle S_f,\nabla\boldsymbol{X}\rangle\geqslant e(f)[1+(n-1)k]-\left|f_*\frac{\partial}{\partial r}\right|^2-\frac{1+\sqrt{1+4k(1-k)}}{2}\langle f_*e_s,f_*e_s\rangle=\frac{(n-1)k-1}{2}\left|f_*\frac{\partial}{\partial r}\right|^2+\frac{(n-1)k-\sqrt{1+4k(1-k)}}{2}\cdot$$

$$\langle f_*e_s,f_*e_s\rangle\geqslant\delta e(f), \tag{13}$$

这里可取 $\delta>0$，因为在第1种情况下 $\frac{2k-\sqrt{1+4k(1-k)}}{2}>0$，在第2种情况下 $\frac{(n-1)-2\sqrt{2}}{4}>0$.

由式(9)，式(10)和式(13)，有

$$R\int_{S_R(x_0)}e(f)*1\geqslant\int_{B_R(x_0)}\delta e(f)*1. \tag{14}$$

如果能量密度$e(f)$不恒等于0，那么存在R_0，使得当$R>R_0$，$\int_{B_R(x_0)}e(f)*1\geqslant C$，这里$C$是正常数.

从而得到

$$\int_{S_R(x_0)}e(f)*1\geqslant\frac{\delta C}{R}. \tag{15}$$

现在假定f的能量慢发散，即存在满足

$$\int_{R_0}^{\infty}\frac{\mathrm{d}r}{r\Psi(r)}=\infty,$$

$(R_0>0)$的正函数$\Psi(r)$，使得

$$\lim_{R\to\infty}\int_{B_R(x_0)}\frac{e(f)(x)}{\Psi(r(x))}*1<\infty.$$

式(15)意味着

$$\lim_{R\to\infty}\int_{B_R(x_0)}\frac{e(f)(x)}{\Psi(r(x))}*1=\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}R}{\Psi(R)}\int_{S_R(x_0)}e(f)*1\geqslant\delta C\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}R}{R\Psi(R)}\geqslant\delta C\int_{R_0}^{\infty}\frac{\mathrm{d}R}{R\Psi(R)}=\infty,$$

这与f的能量慢发散相矛盾. 所以f一定是常值映射.

参考文献：

[1] Garber W D, Ruijsenaass S N M, Seider E, et al. On finite action solution of nonlinear σ-model[J]. Ann Phys, 1979, 119(2): 305.

(下转第806页)