

一种新型摩擦类材料的广义屈服面

彭芳乐^{1,2}, 雷 亮¹

(1. 同济大学 土木工程学院, 上海 200092; 2. 同济大学 岩土及地下工程教育部重点实验室, 上海 200092)

摘要: 在讨论摩擦类材料的屈服及强度特性的基础上提出了一种将子午面内二维屈服迹线扩展到三维主应力空间的方法, 将此扩展方法应用于 Mohr-Coulomb 准则, 获得了一种新型的广义屈服面. 对这种广义屈服面的特性进行了广泛的分析和讨论, 还将此屈服面分别应用于各向同性和横观各向同性摩擦材料, 并与现有试验数据进行拟合对比, 结果表明这种新型的屈服面可以很好地模拟摩擦类材料的屈服特性, 可以涵盖部分经典屈服面, 适用性更强.

关键词: 各向同性; 横观各向同性; 正交各向异性; 广义屈服面; 二维屈服迹线拓展

中图分类号: TU441

文献标志码: A

A New Generalized Yield Surface for Friction Materials

PENG Fangle^{1,2}, LEI Liang¹

(1. College of Civil Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, China; 2. Key Laboratory of Geotechnical and Underground Engineering of the Ministry of Education, Tongji University, Shanghai 200092, China)

Abstract: This paper discusses the yielding and strength characteristic of friction materials. A new method is proposed to expand 2-D yield curve in p - q plane into 3-D yield surface. When applying this method to Mohr-Coulomb yield surface, a generalized yield surface is obtained. Characteristic of this generalized surface is depicted. The yield surface is applied to isotropic and anisotropic friction materials, and the result shows its capability of fitting the yielding characteristic of such materials reasonably. Finally, this yield surface is compared with four classical yield surfaces and some other researchers' study results. Comparison shows the proposed yield surface, which covers the scope of these classical yield surfaces, is more applicable.

Key words: isotropic; transversely isotropic; anisotropic; generalized yield surface; 2-D yield curve expanding

目前屈服准则的研究主要集中于以下 3 个方面: ①对新型材料或者特殊条件下材料屈服准则的研究^[1-7]. ②对研究中新发现的材料特性或是已发现但未被现存屈服面准确模拟的特性进行进一步研究和囊括, 如土体在沉积形成过程中形成的非各向同性^[2,8-9]. ③寻求适用范围更广亦或是灵活性更好的屈服准则, 如曾有研究者对现有的屈服准则进行数学变换, 进而得到一个系列的屈服准则^[10-11]; 也有研究者根据理论和推导独立地提出屈服准则^[12-13]. Mortara^[11]利用数学变换将 Lade-Duncan(L-D)准则和 Matsuoka-Nakai(SMP)准则改写成统一的表达式, 从而得到了适用范围更广的形式^[9]. 姚仰平等^[10]结合 Drucker-Prager(D-P)准则和 SMP 准则提出了一族 π 平面上介于 2 个准则之间的破坏曲线, 将 π 平面上和子午面上的破坏曲线通过应力空间变换结合形成一个统一的屈服面. 俞茂宏等^[13]提出用 2 个表达式来建立屈服准则的方法, 并由此得到了广义的线性屈服准则, 即著名的双剪统一强度理论. 然而, 在表现材料各向异性屈服特性方面, 上述 3 个屈服准则均存在一定问题. 如姚仰平等^[10]和俞茂宏等^[13]提出的屈服准则未指出关于各向异性屈服的解决方案, 而 Mortara^[9]提出的屈服准则经过修正后也只能通过 6 段线的方式模拟横观各向同性, 甚至不能模拟正交各向异性.

本文针对摩擦类材料提出了一种适用于各向同性、横观各向同性和正交各向异性的广义屈服面, 并进行相关屈服准则方面的讨论, 旨在寻求适用范围更广、灵活性更好且表达方式更简洁的屈服准则.

1 摩擦类材料的强度特性

大量试验结果表明, 在三维主应力空间中, 大部分摩擦类材料(包括混凝土、陶瓷、岩石和土体等)的

收稿日期: 2012-04-24

基金项目: 国家自然科学基金(51279132); 教育部长江学者和创新团队发展计划(IRT1029)

第一作者: 彭芳乐(1965—), 男, 教授, 博士生导师, 工学博士, 主要研究方向为岩土力学、地下空间与工程等.

E-mail: pengfangle@tongji.edu.cn

破坏面有以下几个特点:

(1) 破坏面是一个光滑的凸曲面,在 π 平面和子午面上均是如此,因而线性屈服准则著名如 Mohr-Coulomb(M-C)准则也只能算是一种粗略的近似,到目前为止较有影响的线性屈服准则只有 Tresca 准则、M-C 准则和双剪屈服准则。

(2) 材料在三向等压(即静水压力)情况下不破坏。三向等压下,虽然材料可能存在体积塑性应变,即有体积屈服现象,但承载力并不下降。目前,学界对于屈服和破坏的界定尚存在一些模糊之处:一般认为,屈服是指弹性阶段和弹塑性阶段的分界;而破坏的定义则不确定。早期的准则通常不区分屈服和破坏,认为同时适用于两者,而当前研究对屈服面和破坏面已经有所区分。虽然两者同属于强度理论,但一般认为破坏面是开口的,而屈服面可以是由1个、2个甚至多个屈服面组成的封闭曲面。

(3) 对于各向同性或近似各向同性材料,其破坏面具有三轴对称性,但非各向同性材料的破坏面不具三轴对称性。例如,对于混凝土和一些各向异性不是特别显著的岩石材料来说,其破坏面是三轴对称的。但这并不是常态,特别是对土体材料来说。土体材料由于经过长期的天然沉积,形成过程中颗粒排列和应力状态在水平方向和竖直方向差别较大,所以一般被认为是横观各向同性材料,它们的破坏面并不是三轴对称的。另有一些材料由于晶格本身具有各向异性,因此各向异性显著,也不能适用于三轴对称的破坏面,屈服面亦是如此。

(4) 在压缩子午面上的破坏线是曲线,对于无粘性材料(如砂土)通过坐标原点,有粘性材料则不通过坐标原点,存在三向拉伸强度。曾有很多学者提出了压缩子午线的不同表达形式,有对数曲线、双曲线、抛物线和多项式等,均是根据试验数据提出的拟合曲线。

(5) 在 π 平面上的破坏凸曲线不是圆,但随着静水压力的增大而逐渐趋近于圆。近来研究证明,即使对于金属,圆形的破坏曲线也只是近似,金属也存在轻微的三轴拉压异性。因而,笔者认为,外界的围压可能与材料本身的内聚力具有类似的作用;另一方面,材料组成颗粒之间的摩擦是其剪切强度的来源。对于粘结力相对较弱的材料而言,三轴拉压异性相对较大,而对粘结力较大(如金属)或者粘结力较小但是围压很大的材料而言,各向异性会随之减小。

2 子午面内的屈服迹线及其扩展

一般子午面内屈服迹线的表达式为

$$f(p, q, \kappa) = 0 \quad (1)$$

式中: p 为平均主应力, $p = I_1/3 = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)/3$, I_1 为第一应力不变量, $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ 为3个主应力; q 为偏应力,不同学者的定义可能有所不同,较为普遍的有 $q = (\sigma_1 - \sigma_3)/2$ 为最大剪应力和 $q = \sqrt{[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]}/2$; κ 为硬化参数。

若 $q = (\sigma_1 - \sigma_3)/2$,则将此屈服迹线扩展到三维主应力空间中得到的屈服面在 π 平面上的投影为正六边形,类似于 Tresca 准则;若以 $q = \sqrt{3}J_2$,其中 $J_2 = [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]/6$ 则扩展得到屈服面投影为圆形,外接于前面的正六边形,类似于 D-P 准则。此2种形式均不能体现材料的三轴拉压异性,本文为解决这一问题提出一种新型的扩展方法。

令 $q = \sqrt{3}J'_2$,其中

$$J'_2 = \frac{I_1^2}{18} \left[\left(\frac{2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3}{k(2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3) + I_1} \right)^2 + \left(\frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{k(2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3) + I_1} \right)^2 + \left(\frac{2\sigma_3 - \sigma_2 - \sigma_1}{k(2\sigma_3 - \sigma_2 - \sigma_1) + I_1} \right)^2 \right] = \frac{I_1^2}{18} \left[\left(\frac{3S_1}{3kS_1 + I_1} \right)^2 + \left(\frac{3S_2}{3kS_2 + I_1} \right)^2 + \left(\frac{3S_3}{3kS_3 + I_1} \right)^2 \right] \quad (2)$$

式中: S_i 为主偏应力, $i=1,2,3$; $S_i = \sigma_i - p$; k 是反映材料三轴拉压异性的参数, $k \in [0, 1]$ 。当 $k=0$ 时, $J'_2 = J_2$;当 k 从0到1变化时,屈服面在 π 平面上的投影由圆逐渐变为圆角三角形(趋近于三角形),且三轴拉压异性随之变大。 J'_2 在数学表达上是3个主应力的轮换式,因而对于一个给定的应力张量而言是一个定值,本处拟称其为修正的第二偏应力不变量。

此处以彭芳乐于2000年提出的一种屈服迹线^[14]为例对这种新型的扩展方法进行说明。所提出的屈服迹线表达式为

$$q/p + r \ln(p/p'_a) - f(\kappa) = 0 \quad (3)$$

式中: r 为材料常数; p'_a 为1个标准大气压。则将此屈服迹线扩展到三维主应力空间,略去推导过程可以得到屈服函数为

$$\sqrt{J_2}/I_1 + R \ln(I_1/p'_a) - F(\kappa) = 0 \quad (4)$$

其中: $R = r/3\sqrt{3}$, $F(\kappa) = f(\kappa)/3\sqrt{3} + (r \ln 3)/3\sqrt{3}$.

当 $R = 0.0173$, $F(\kappa) = 0.160$, $k = 0.5$ 时, 此屈服面在三维主应力空间中的示意如图 1 所示.

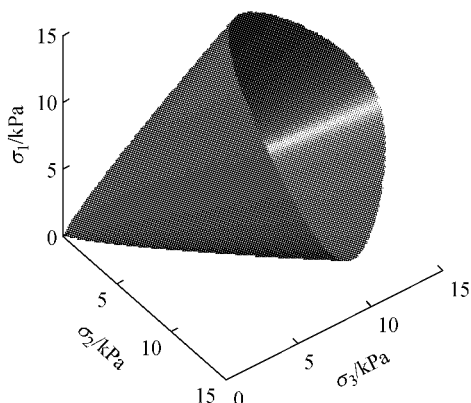


图 1 屈服面在主应力空间中的三维示意

Fig.1 3-D diagram for yield surface in main stress space

当 $k = 0.5$, I_1 分别等于 5, 10, 15, 20 kPa 时, 屈服面在 π 平面上的投影如图 2 所示, 这是一族同心且相似的圆角三角形.

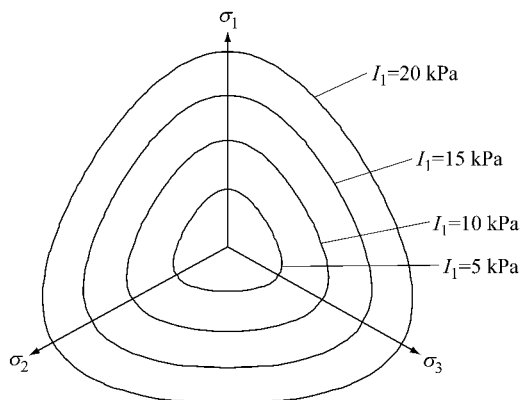


图 2 I_1 取不同值时屈服面在 π 平面上的投影

Fig.2 Yield surface with different I_1 on π plane

当 $I_1 = 20$ kPa, k 分别等于 0, 0.25, 0.50, 0.75 和 1.00 时, 屈服面在 π 平面上的投影如图 3 所示. 当 k 从 0 变到 1.00 时, 屈服面逐渐从圆形向圆角三角形过渡.

3 对 Mohr-Coulomb 准则的扩展及一族广义屈服面

事实上所有在子午面上的屈服迹线都可以用类似方法进行替换进而扩展到三维空间, 唯一要做的就是确定体现三轴拉压异性的参数 k . 当需要体现正

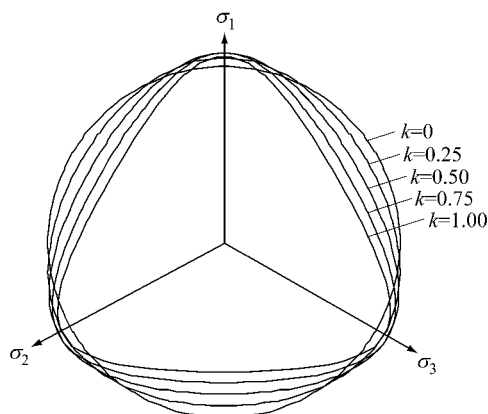


图 3 k 取不同值时屈服面在 π 平面上的投影

Fig.3 Yield surface with different k on π plane

交各向异性的时候, 则可能需要 2~3 个 k 值.

3.1 对 Mohr-Coulomb 准则的扩展

为方便起见, 这里对 M-C 准则应用于砂土这种无粘性土的情况加以改进, 使之在三维应力空间中成为光滑的曲面. M-C 准则在三维应力空间中的表达式(对于无粘聚力的砂土)通常可以写为

$$-\eta I_1 + \sqrt{J_2}/g(\theta) = 0 \quad (5)$$

式中: $\eta = 2 \sin \varphi / [\sqrt{3}(3 - \sin \varphi)]$, φ 为内摩擦角; $g(\theta) = (3 - \sin \varphi) / [2\sqrt{3} \cos \theta - 2 \sin \theta \sin \varphi]$, θ 为洛德角. 屈服面在子午面内的投影为过原点的 2 条射线, 取三轴压缩一侧的 1 条(即 $\theta = 30^\circ$ 时)进行改进, 有如下表达式:

$$q = 3\sqrt{3}\eta p \quad (6)$$

用类似前面的过程对其代换, 最后得到屈服面表达式为

$$\sqrt{J_2}/I_1 = \eta \quad (7)$$

其中, 当 $\varphi \in [0^\circ, 90^\circ]$ 时, 相应的 $\eta \in [0, 1/\sqrt{3}]$.

图 4 给出了 $I_1 = 20$, k 分别等于 0, 0.25, 0.50, 0.75 和 1.00 时屈服面在主应力空间 π 平面上的投影. 图中的不等边六边形为改进前的 M-C 准则在主应力空间中 π 平面上的投影. 当 k 从 0 变到 1 时, 屈服面逐渐从圆形向正三角形过渡.

在应用中为更好地符合试验和现场结果, 前面由内摩擦角算得的 η 值可以作为拟合初值, 允许同时调整 η 和 k 的取值. 如以屈服面压缩子午线重合为目标调整, 那么调整后的屈服面如图 5 所示. 图中内外 2 条曲线所包围范围为本屈服面渐变范围, 也即涵盖范围. 这一扩展结果与姚仰平等^[10]融合 SMP 准则和 D-P 准则所得结果有相似之处. 因为 M-C 屈服面在子午面上的投影为直线, 所以此处扩展后所得结果未考虑子午面上的非线性.

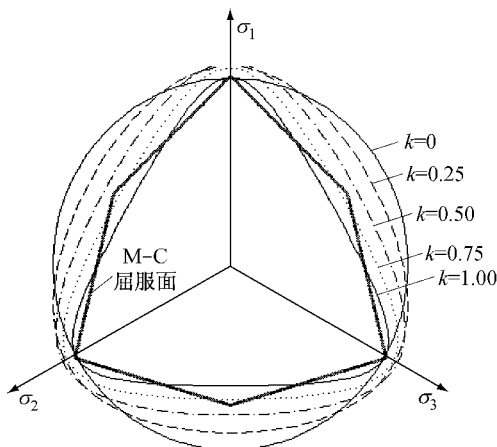


图4 k 取不同值时屈服面在 π 平面上的投影
Fig.4 Yield surface with different k on π plane

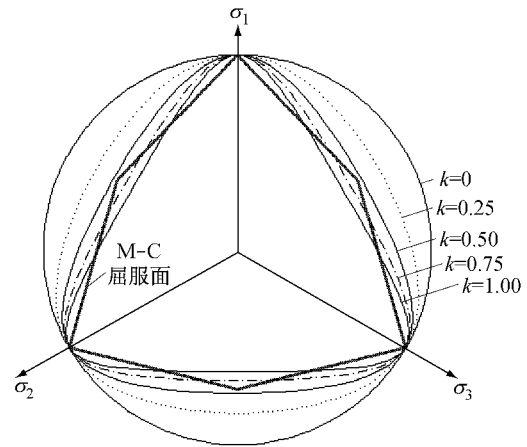


图5 k 取不同值时屈服面在调整 η 值后在 π 平面上的投影
Fig.5 Yield surface with different k and η modified on π plane

3.2 各向同性材料试验结果拟合

为验证本文屈服面的适用性,此处将一些经典

的试验结果用上述改进后的屈服面进行拟合,这些材料包括了粘土、砂土、岩石、混凝土等,见图6。

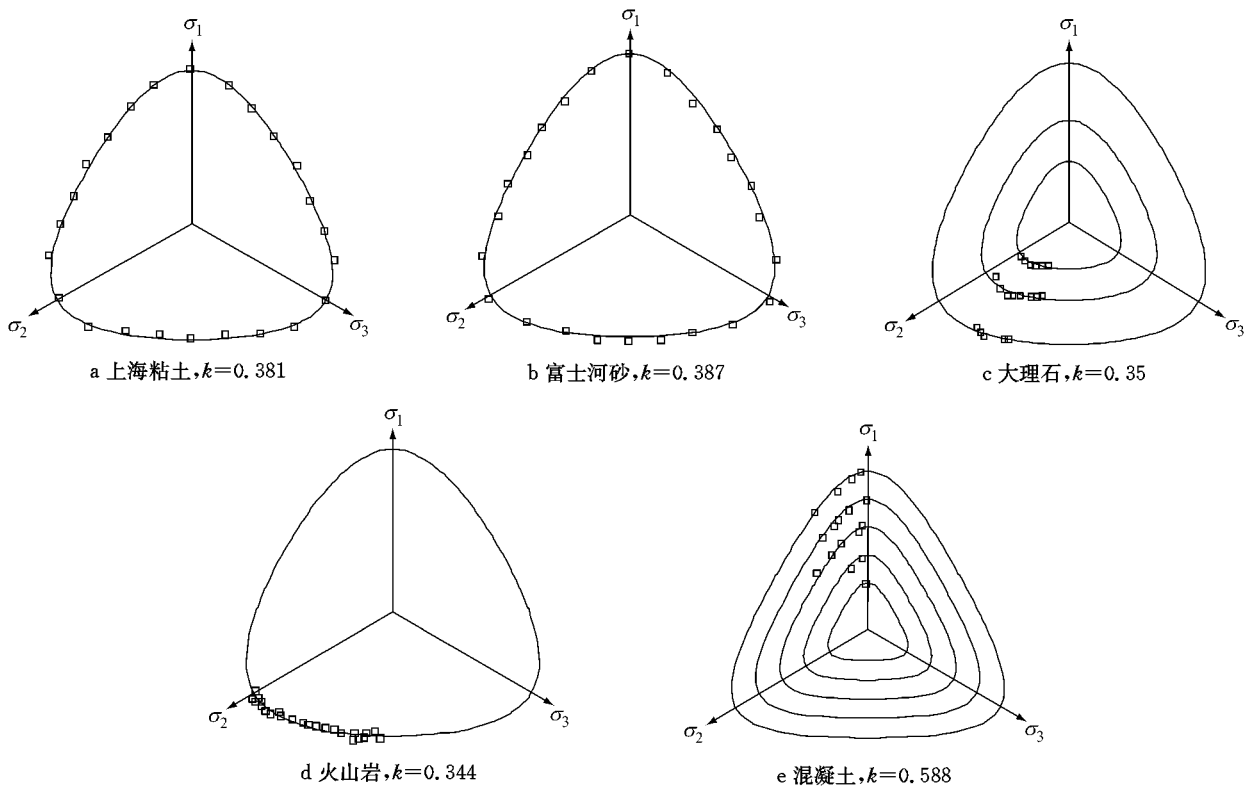


图6 各向同性材料试验结果
Fig.6 Test results of isotropic materials

3.3 横观各向同性和正交各向异性材料的屈服面

当表达式中3个 k 取不同值时,可反映砂土材料的非各向同性,这对于沉积而成的材料非常重要。

天然沉积土大多呈现横观各向同性,这时可以通过2个不同的 k 值实现这个模拟。图7给出了本屈服面的边界变化范围。此时主应力空间的坐标位置与实际的土层走向是耦合的。当 $k=1.00, 0, 0$ 时,

可以明显看出 σ_1 方向的三轴压缩强度有所增加,而另外2个方向的三轴压缩强度有所下降;而当 $k=0, 1.00, 1.00$ 时,情况则相反。

另外,图7还可以解释包辛格效应。 $k=0, 0, 0$ 时,可以认为材料处于各向同性状态,但当材料受到某一方向的外力作用发生硬化时,则这一方向上的屈服强度有所增加,而相应反方向的屈服强度有所

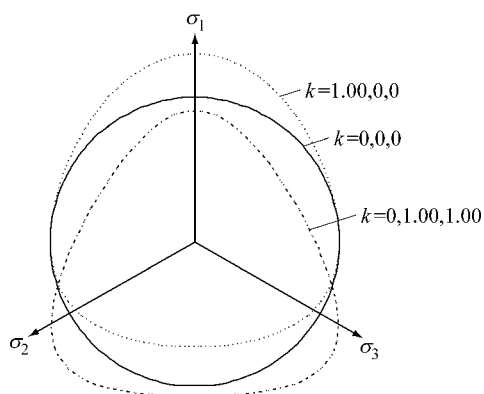
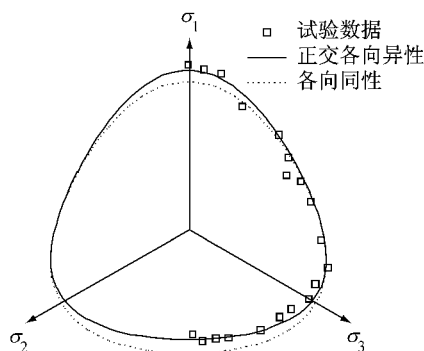
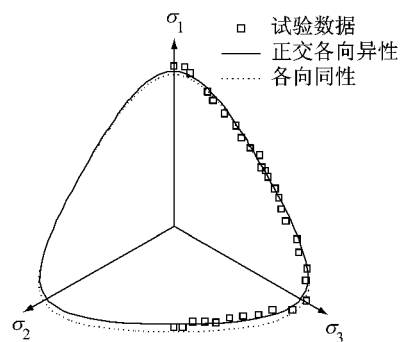
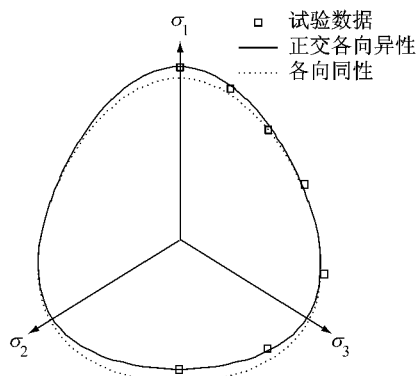
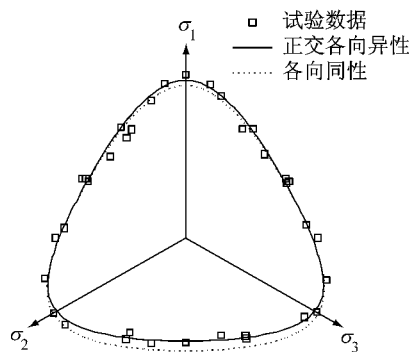
图7 k 取2种不同值时屈服面在 π 平面上的投影Fig.7 Yield surface with two different k on π planea 旧金山海湾泥^[15]b 砂土^[16]c 软粘土^[17]d 休斯顿砂^[18]

图8 各向异性材料模拟结果

Fig.8 The simulation results of anisotropic materials

压缩时)稍显尖锐,表现为预测强度结果偏大;对应的,本文屈服面在三边中点处(即三轴拉伸时)较为外扩,表现为预测强度结果偏大.对其他组的试验拟合结果差异相似,限于篇幅,这里不再赘述.本文屈服面所用参数相对较少,为4个,而Mortara的结果需要9个参数.另外Mortara的结果并不是严格意义上的正交各向异性,而是横观各向同性,本文中所得屈服面则具有更大的适用范围.

与姚仰平等^[10]的结果相比,本文中屈服面未重

下降(当 $k=1.00,0,0$ 时),此时的屈服面则可以认为是金属在某一特定状态下的后继屈服面,此后继屈服面是不可能利用随动硬化、等向硬化及混合硬化得到的.这使得本屈服面可以通过变化某一方向上的三轴拉压异性参数得到后继屈服面.

下面就本屈服面对横观各向同性材料的模拟给出一些结果,这部分模拟主要针对砂土和粘土,见图8.综合8发现,本文提出的屈服面可以相当合理地模拟材料的各向异性.

图9为对同一组试验数据的拟合本文屈服面与Mortara^[9]所得结果的对比,2种屈服面的拟合近似但稍有差异:Mortara的结果在3个角点处(即三轴

点关注子午面内的非线性,但是要考虑的话也是十分方便的,甚至可以将本文结果部分代入文献^[10]的结果中去,但文献^[10]的结果并不具有考虑正交各向异性的能力.而本文中的屈服面可以应用到任何一种子午面非线性中去,所需要的仅仅是替换其中的特定部分.

当3个 k 分别取不同值时,屈服面在 π 平面上的投影变化相对比较复杂,相关方面的试验和研究目前较少,所以在此仅给出一个示意如图10所示.

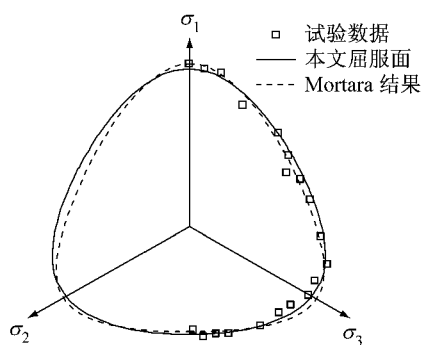


图9 本文与 Mortara 对旧金山海湾泥试验结果的拟合对比
Fig.9 Fitting results in comparison with Mortara of San Francisco Bay clay

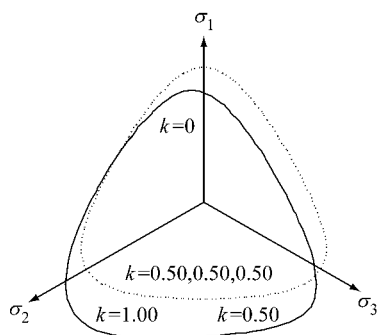


图10 k 取3种不同值时屈服面在 π 平面上的投影
Fig.10 Yield surface with three different k on π plane

3.4 与经典屈服面的比较

经过前面的分析,可以将本文所得式(7)作为一种广义屈服面.就 π 平面屈服迹线对本文屈服面和 D-P, M-C, L-D 及 SMP 屈服面进行比较.

为方便比较,此处屈服面均假定材料的粘聚力为零,即屈服面顶点位于主应力空间原点.此处以三维 M-C 屈服面为基准,取摩擦角 $\varphi=30^\circ$,粘聚力 $c=0$,其余屈服面均与这个屈服面的压缩子午线重合.则此时各个屈服面的表达式变如下:

M-C 屈服面

$$f = -I_1 + (6\cos\theta - \sqrt{3}\sin\theta)\sqrt{J_2} = 0 \quad (8)$$

D-P 屈服面

$$f = -I_1 + \frac{5\sqrt{3}}{2}\sqrt{J_2} = 0 \quad (9)$$

L-D 屈服面

$$f = I_1^3 - \frac{125}{3}I_3 = 0 \quad (10)$$

式中, I_3 为第三应力不变量, $I_3 = \sigma_1\sigma_2\sigma_3$.

SMP 屈服面

$$f = I_1I_2 - \frac{35}{3}I_3 = 0 \quad (11)$$

如图 11 所示,图中 4 条连续实线为本文屈服面

在 k 分别取不同值时在主应力空间 π 平面上的投影,而 3 条不同标志的点线由外向内依次为 D-P, L-D 和 SMP 屈服面,不等边六边形为 M-C 屈服面.当 $k=0$ 时,本文屈服面与 D-P 准则完全重合,当 (k, η) 取特定值时,本屈服面框架与 L-D 屈服面(此处 $(k, \eta) = (0.39, 0.213)$)和 SMP 屈服面(此处 $(k, \eta) = (0.59, 0.217)$)基本重合.本屈服面框架通过增加一个参数就涵盖了上述的经典屈服面.另外,通过此参数的调整可以实现子午面内 p - q 曲线斜率与 π 平面上三轴拉压异性相对独立,而这在 4 种经典屈服面中是无法实现的.

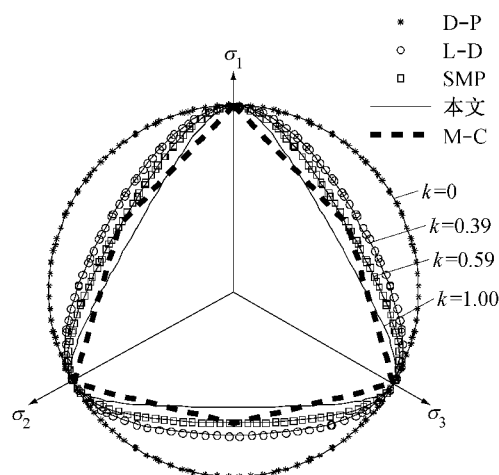


图11 本文屈服面与经典屈服面的比较
Fig.11 Comparison between the generalized yield surface and the classical yield surfaces

单就 π 平面上的投影结果而言,与姚仰平等^[10]所得结果相比,本屈服面所用到的参数有 2 个,而所得到的屈服面表达形式更为简练且适用范围更广.因为姚仰平等的屈服面的内部极限是 SMP 准则,而本屈服面的内部极限尚在 SMP 准则之内.

3.5 广义屈服面特点

本屈服面应用简便,适用范围广,其特点包括:全屈服面光滑可导;能体现摩擦材料的三轴拉压异性;子午面内的斜率与 π 平面上的三轴拉压异性相对独立;可以体现材料的横观各向同性和正交各向异性.在运用本文屈服面时应该注意以下几点:

(1) 由于子午面内的斜率与 π 平面上的三轴拉压异性相对独立,本文屈服面并不能像 L-D 和 SMP 屈服面那样给出一个默认三轴拉压强度比,因而需要 π 平面上至少 60° 范围内的试验数据才能准确标定一组屈服面参数.

(2) 在模拟材料的各向异性时,与 π 平面上分段式的屈服准则相比,本文屈服面所预测的三轴压缩

强度相对偏小而三轴拉伸强度相对偏大,高精度计算时需要注意调整使用。

4 结论

(1) 提出一种将子午面上的二维屈服轨迹扩展到三维主应力空间的方法,并对现有的屈服轨迹进行扩展,获得可以描述岩土材料三轴拉压异性的三维屈服面。

(2) 对此扩展方法进行了简单的应用,将之应用到 Mohr-Coulomb 准则的时候,将这一准则改进为一个连续光滑的屈服面,消除了原来的奇点问题,并得到了一族适用范围更广的广义屈服面。该屈服面在仅增加一个参数的情况下可以囊括 Drucker-Prager, Lade-Duncan 和 SMP 准则,并具有描述材料正交各向异性的潜质。

(3) 将此屈服面应用于各向同性材料和横观各向同性材料,与试验数据的对比表明,本屈服面可以很好地模拟此类材料的屈服强度特性。

参考文献:

- [1] Babak F, Akhtar S K. A strain rate dependent yield criterion for isotropic polymers; Low to high rates of loading[J]. *European Journal of Mechanics A/Solids*, 2010, 29(2): 274.
- [2] Joel B S, Oana C. Analytical yield criterion for an anisotropic material containing spherical voids and exhibiting tension-compression asymmetry[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2011, 48: 357.
- [3] Guo Y Z, Li Y L, Wu X L, et al. A modified criterion for shear band formation in bulk metallic glass under complex stress states[J]. *Materials Science and Engineering A*, 2010, 527: 2613.
- [4] Lynch C S. On the development of multiaxial phenomenological constitutive laws for ferroelectrical ceramics[J]. *Journal of Intelligent Material Systems and Structure*, 1998(9): 555.
- [5] Lai Y M, Jin L, Chang X X. Yield criterion and elasto-plastic damage constitutive model for frozen sandy soil [J]. *International Journal of Plasticity*, 2009, 25: 1177.
- [6] Thienel K C, Rostasy F S. Strength of concrete subjected to high temperature and biaxial stress; experiments and modeling [J]. *Materials and Structures*, 1995, 28: 575.
- [7] Byerlee J D. Frictional characteristics of granite under high confining pressure[J]. *Journal of Geophysical Research*, 1967, 72: 3639.
- [8] 徐卫亚, 张贵科. 正交各向异性剪切屈服准则研究及其数值实现[J]. *岩土力学*, 2008, 29(5): 1164.
XU Weiya, ZHANG Guike. Study on orthotropic shear yield criterion and its numerical implementation[J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2008, 29(5): 1164.
- [9] Mortara G. A yield criterion for isotropic and cross-anisotropic cohesive-frictional materials [J]. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 2010, 34: 953.
- [10] 姚仰平, 路德春, 周安楠, 等. 广义非线性强度理论及其变换应力空间[J]. *中国科学(E辑)*, 2004, 34(11): 1283.
YAO Yangping, LU Dechun, ZHOU Annan, et al. Generalized nonlinear strength theory and its transformed stress space[J]. *Science in China series E: Engineering & materials Science*, 2004, 34(11): 1283.
- [11] Mortara G. A new yield and failure criterion for geomaterials [J]. *Geotechnique*, 2008, 58(2): 125.
- [12] Desai C S, Hashmi Q S E. Analysis, evaluation, and implementation of a nonassociative model for geologic materials [J]. *International Journal of Plasticity*, 1989, 5: 397.
- [13] 俞茂宏, 何丽南, 宋凌宇. 双剪应力强度理论及其推广[J]. *中国科学(A辑)*, 1985, 12: 1113.
Yu M H, He L N, Song L Y. Twin shear strength theory and its extension[J]. *China Science (A)*, 1985, 12: 1113.
- [14] Peng F L. Constitutive modeling and finite element analysis of reinforced soils [D]. Tokyo: The University of Tokyo, 2000.
- [15] Kirkgaard M M, Lade P V. Anisotropy of normally consolidated San Francisco bay mud [J]. *Geotechnical Texting Journal ASTM*, 1991, 14(3): 231.
- [16] Abelev A V, Lade P V. Characterization of failure in cross-anisotropic soils[J]. *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, 2004, 130(5): 599.
- [17] Callisto L, Calabresi G. Mechanical behavior of a natural soft clay[J]. *Geotechnique*, 1998, 48(4): 495.
- [18] Jafarzadeh F, Javaheri H, Sadek T, et al. Simulation of anisotropic deviatoric response of Hostun sand in true triaxial tests[J]. *Computers and Geotechnics*, 2008, 35(5): 703.