

两因子期权定价模型的条件蒙特卡罗加速方法

梁义娟¹, 徐承龙^{1,2}

(1. 同济大学 数学系, 上海 200092; 2. 上海市计算科学 E-研究院和上海市科学计算重点实验室, 上海 200234)

摘要: 对一类随机波动率模型下的欧式期权定价问题, 首先推导出条件蒙特卡罗方法的计算框架, 然后基于鞅表示定理构造了一类有效的控制变量. 数值实验结果表明: 结合鞅控制变量的条件蒙特卡罗方法有效地减小蒙特卡罗模拟误差, 对模型参数的依赖性小.

关键词: 欧式期权定价; 随机波动率模型; 条件蒙特卡罗方法; 鞅控制变量

中图分类号: O242.1

文献标志码: A

Efficient Accelerating Method of Conditional Monte-Carlo Simulation for Two-factor Option Pricing Model

LIANG Yijuan¹, XU Chenglong^{1,2}

(1. Department of Mathematics, Tongji University, Shanghai 200092, China; 2. Shanghai E-Institute of Scientific Computing and Shanghai Key Laboratory of Scientific Computing, Shanghai 200234, China)

Abstract: The conditional Monte-Carlo method was constructed for pricing European options under stochastic volatility model, and then an efficient control variate was presented based on the Martingale representation theorem. Numerical tests show that conditional Monte-Carlo simulations based on the martingale control variate method can reduce simulation error. Moreover the dependence of the efficiency of simulation on model parameters is not sensitive.

Key words: European options pricing; stochastic volatility model; conditional Monte-Carlo simulation; martingale control variates

数的假设往往与实际市场不一致, 隐含波动率模型是期权价格数据关于敲定价格曲线“微笑”和“偏斜”的一种合理解释. 另一种常用的模型是随机波动率模型, 从 1987 年以来很多学者对此进行了研究, 如 Hull 等^[1]和 Heston^[2].

与常数波动率下的模型相比较, 由于至少具有两个随机因子, 随机波动率模型下的期权定价问题只有在非常特殊情形下才具有显式解. Hull 等^[1]假设波动率服从几何布朗运动, 在相关性为零的情形下, 指出欧式期权的价值是 Black-Scholes 价格在期权有效期内平均方差概率分布上的积分值. Heston^[2]借助特征函数给出欧式期权的形式解, 但还需借助数值方法进一步处理. 对于更为一般的期权定价, 通常需要使用蒙特卡罗方法或其他数值方法处理.

蒙特卡罗方法具有计算误差与维度无关的优势, 然而其收敛速度较慢, 仅为模拟次数的负 1/2 阶. 为了提高蒙特卡罗方法的精度, 常常需要使用各类方差减小技巧^[3]. Fouque 等^[4-5]分别使用重要抽样技巧、控制变量技巧来减小蒙特卡罗方法的方差, 然而他们使用的技巧只针对均值回复的随机波动率模型, 对于一般的模型难以推广. 此外, Ma 等^[6]提出使用确定性时间函数波动率对应的虚拟证券作为控制变量, 然而此方法对随机波动率模型依赖较大, 并且在波动率的波动率较大的情况下效果不佳.

针对随机波动率模型下欧式期权定价问题, 本文首先使用条件蒙特卡罗方法将其从一个二维问题降低为一维问题, 再基于鞅表示定理提出了一种基于鞅控制变量的蒙特卡罗方法. 数值算例表明, 与直接使用蒙特卡罗控制变量加速方法^[6]以及条件蒙特卡罗方法相比, 本文提出的基于鞅控制变量的条件蒙特卡罗加速方法具有计算效率更高、计算结果对

1973 年, Black 和 Scholes 给出了著名的期权定价公式, 成为衍生品定价历史上的一项重大突破. Black-Scholes 模型应用简单方便, 但其波动率为常

收稿日期: 2013-06-20

基金项目: 国家自然科学基金(11171256); 上海市教委计算科学 E-研究院资助项目(E03004)

第一作者: 梁义娟(1987—), 女, 博士生, 主要研究方向为计算金融. E-mail: yijuan_liang@163.com

通讯作者: 徐承龙(1963—), 男, 教授, 博士生导师, 理学博士, 主要研究方向为计算金融. E-mail: clxu@tongji.edu.cn

模型参数不敏感的优点.

1 随机波动率模型及期权定价的控制变量方法

1.1 随机波动率模型

假设在风险中性世界中,标的资产 S_t 和波动率 σ_t 适合以下随机微分方程:

$$\frac{dS_t}{S_t} = rdt + \sigma_t dW_t, \sigma_t = f(Y_t) \quad (1)$$

$$dY_t = \mu(t, Y_t)dt + \hat{\sigma}g(t, Y_t)dZ_t \quad (2)$$

其中 r 表示无风险利率, t 表示时间, $\{W_t: t \geq 0\}$ 和 $\{Z_t: t \geq 0\}$ 都是标准的 Brown 运动, 且

$$\text{Cov}(dW_t, dZ_t) = \rho dt \quad (3)$$

式(2)中的 $\hat{\sigma}$ 是正常数, 称为波动率的波动率, 它的大小影响了波动率的随机性. 式(3)中 ρ 表示 W_t 与 Z_t 的相关性, f, μ 和 g 均为确定性函数, 如对于 Hull - White 模型^[1],

$$f(Y_t) = \sqrt{Y_t}, \mu(t, Y_t) = \mu Y_t, g(t, Y_t) = Y_t$$

其中 μ 为正常数, 是波动率的漂移系数. 对 Heston 模型^[2],

$$f(Y_t) = \sqrt{Y_t}, \mu(t, Y_t) = a(\theta - Y_t), g(t, Y_t) = \sqrt{Y_t}$$

其中 a 和 θ 均为正常数, 分别是波动率的回复率和长期均值. 为了使波动率恒为正, 它们需要满足 Feller 条件: $2a\theta > \hat{\sigma}^2$.

本文仅考虑欧式期权的定价问题, 设收益函数为 $h(S_T)$, 如标准看涨期权 $h(S_T) = (S_T - K)^+$, 其中 $x^+ = \max(x, 0)$, K 为敲定价格. 记欧式期权在 t 时刻的价值为 $u(t, s, y)$, 则

$$u(t, s, y) = E(e^{-r(T-t)} h(S_T) | S_t = s, Y_t = y) \quad (4)$$

其中 $E(\cdot)$ 表示风险中性世界中的期望. 欧式期权在初始时刻的价值为 $u(0, S_0, Y_0) = E(e^{-rT} h(S_T))$.

标准蒙特卡罗方法在计算期权价值(4)时, 需要模拟二维布朗运动 $\{W_t\}$ 和 $\{Z_t\}$ 的演化过程来得到标的资产的演化过程, 最后对相应的收益函数模拟值进行平均.

1.2 条件蒙特卡罗方法

条件蒙特卡罗方法是一种方差减小技巧. 为了计算随机变量 X 的期望, 对任意一个随机变量 Y , $E(X|Y)$ 表示给定 Y 时 X 的条件期望, 这是一个关于 Y 的随机变量, 根据双期望公式^[7]有

$$E(X) = E(E(X|Y))$$

又有条件方差公式^[7]

$$\text{Var}(X) = \text{Var}(E(X|Y)) + E(\text{Var}(X|Y))$$

这说明随机变量 $E(X|Y)$ 的方差比原随机变量 X 的方差来得小, 从而在已知 $E(X|Y)$ 精确值的情形下达到了方差减小的目的.

Willard^[8]最早提出可以使用条件蒙特卡罗方法来提高随机波动率模型的模拟效率, 对于那些在常数波动率模型下有封闭解的路径期权均适用. Drimus^[9]也使用条件蒙特卡罗方法来分析 Log - OU 模型下的实际方差问题. 在此基础上, 本文提出一种基于鞅控制变量的条件蒙特卡罗加速方法.

由式(3)可设

$$dW_t = \rho dZ_t + \sqrt{1-\rho^2} d\tilde{W}_t \quad (5)$$

其中 $\text{Cov}(dZ_t, d\tilde{W}_t) = 0$. 在区间 $[t, T]$ 上对 $\ln S_t$ 运用 Itô 公式, 并利用式(1)和(2)有

$$S_T = S_t \xi_{t,T} \exp\left(r(T-t) - \frac{1-\rho^2}{2} \int_t^T f^2(Y_s) ds + \sqrt{1-\rho^2} \int_t^T f(Y_s) d\tilde{W}_s\right) \quad (6)$$

其中 $\xi_{t,T} = e^{-\frac{1}{2}\rho^2 \int_t^T f^2(Y_s) ds + \rho \int_t^T f(Y_s) dZ_s}$. 对随机量 \tilde{W}_t 求期望, 可得欧式看涨期权在初始时刻的价值^[8-9]

$$u(0, S_0, Y_0) = E(u^{\text{BS}}(S_0 \xi_{0,T}, \sqrt{1-\rho^2} \bar{\sigma}_{0,T})) \quad (7)$$

其中 $\bar{\sigma}_{0,T}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T f^2(Y_t) dt$ 是时间 $[0, T]$ 上的平均方差, u^{BS} 是标准看涨欧式期权的 Black - Scholes 公式解^[10]. 当 $\rho=0$ 时, 式(7)与 Hull 等^[1]的结论一致.

利用式(7), 可以使用条件蒙特卡罗方法计算期权价值, 由于此时仅需要模拟布朗运动 $\{Z_t\}$ 的演化过程, 即将原来的二维问题降低为一维问题, 从而减少了模拟误差以及计算量.

1.3 鞅控制变量

控制变量(control variate)技巧是一种常用的方差减小技术, 它利用一个已知量的估计误差来降低未知量的估计误差^[3]. 使用控制变量技巧可以大大提高蒙特卡罗方法的效率. 为了说明其思想, 考虑计算随机变量 V 的期望 $E(V)$. 假设 V_1, \dots, V_m 是 V 的 m 个独立样本, $E(V)$ 的蒙特卡罗估计值为样本均值 $\bar{V} = (1/m) \sum_{i=1}^m V_i$. 假设在得到 V_i 的同时能得到另一个随机变量 X 的样本 X_i , 且 $E(X)$ 已知, 则对固定常数 b 和 V 的控制变量估计值为 $\bar{V}_b = \bar{V} - b[\bar{X} - E(X)]$. 这是一个无偏估计量, 且可以选择最优控制系数 $b^* = \text{Cov}(X, V) / \text{Var}(X)$, 使其方差最小.

$$\text{Var}(\bar{V}_b^*) = (1 - \rho_{XV}^2) \text{Var}(\bar{V})$$

其中 ρ_{XV} 为 X 和 V 的相关系数. 因此为了有效地减小方差, 应该选取与 V 高度相关的 X . 为了得到基于式(7)的条件蒙特卡罗方法的合适控制变量, 先给出如下鞅表示定理:

引理 1 (鞅表示定理) 对于标的资产满足式(1)和(2), 收益函数为 $h(S_T)$ 的衍生产品价格 $u(t, S_t, Y_t)$ 满足如下等式

$$\begin{aligned} e^{-rt}h(S_T) - u(0, S_0, Y_0) = \\ \int_0^T \left[e^{-nt} S_t f(Y_t) u_s(t, S_t, Y_t) dW_t + \right. \\ \left. e^{-nt} \hat{\sigma} g(t, Y_t) u_y(t, S_t, Y_t) dZ_t \right] \end{aligned} \quad (8)$$

证明: 对 $e^{-nt}u(t, S_t, Y_t)$ 运用 Itô 公式, 有

$$d(e^{-nt}u(t, S_t, Y_t)) = e^{-nt} \mathcal{L}u dt +$$

$$e^{-nt} [S_t f(Y_t) u_s dW_t + \hat{\sigma} g(t, Y_t) u_y dZ_t]$$

其中,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}u = & u_t + r S_t u_s + \mu(t, Y_t) u_y + \frac{1}{2} S_t^2 f^2(Y_t) u_{ss} + \\ & \rho S_t f(Y_t) \hat{\sigma} g(t, Y_t) u_{sy} + \frac{1}{2} \hat{\sigma}^2 g^2(t, Y_t) u_{yy} - \\ & ru \end{aligned}$$

再由 Feynman - Kac 公式^[11], $\mathcal{L}u = 0$, 所以

$$d(e^{-nt}u(t, S_t, Y_t)) = e^{-nt} [S_t f(Y_t) u_s dW_t + \hat{\sigma} g(t, Y_t) u_y dZ_t]$$

对方程两边同时积分, 注意到 $u(T, S_T, Y_T) = h(S_T)$, 于是便得鞅表示定理.

设

$$\begin{aligned} X = \int_0^T \left[e^{-nt} S_t f(Y_t) u_s(t, S_t, Y_t) dW_t + \right. \\ \left. e^{-nt} \hat{\sigma} g(t, Y_t) u_y(t, S_t, Y_t) dZ_t \right], \end{aligned}$$

$$\hat{X} = E(X | Z_t, 0 \leq t \leq T)$$

则由式(7)和(8)得

$$u^{\text{BS}}(S_0 \xi_{0,T}, \sqrt{1 - \rho^2} \bar{\sigma}_{0,T}) - u(0, S_0, Y_0) = \hat{X} \quad (9)$$

另一方面, 由 \hat{X} 的定义以及式(5), 易得

$$\hat{X} = \rho \int_0^T \hat{f}_{1t} dZ_t + \int_0^T \hat{f}_{2t} dZ_t \quad (10)$$

其中,

$$\hat{f}_{1t} = E(e^{-nt} S_t f(Y_t) u_s(t, S_t, Y_t) | Z_s, 0 \leq s \leq t) \quad (11)$$

$$\hat{f}_{2t} = E(e^{-nt} \hat{\sigma} g(t, Y_t) u_y(t, S_t, Y_t) | Z_s, 0 \leq s \leq t) \quad (12)$$

由此可见 \hat{X} 是一个零鞅, 进一步由式(9)可推出

$u^{\text{BS}}(S_0 \xi_{0,T}, \sqrt{1 - \rho^2} \bar{\sigma}_{0,T})$ 的方差完全由此鞅的方差决定. 然而由于没有 $u(t, s, y)$ 的精确表达式, 从而也无法得到 \hat{X} . 本文将以它的某种近似作为控制变量, 为此记 $u^{\text{BS}}(S, \sigma)$ 为股价 S , 到期日为 T , 波动率为常数 σ 的标准看涨欧式期权的 Black - Scholes 公式解, 则由文献[3, 10]得

$$u^{\text{BS}}(S, \sigma) = SN(d_1) - Ke^{-rT}N(d_2) \quad (13)$$

其中,

$$d_1 = d_1(S, \sigma) = \frac{\ln \frac{S}{K} + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma \sqrt{T}}$$

$$d_2 = d_2(S, \sigma) = d_1(S, \sigma) - \sigma \sqrt{T}$$

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

且其偏导数分别为

$$u_s^{\text{BS}}(S, \sigma) = N(d_1), \quad u_\sigma^{\text{BS}}(S, \sigma) = SN'(d_1) \sqrt{T-t} \quad (14)$$

由式(6)可得

$$\hat{S}_t = E(S_t | Z_s, 0 \leq s \leq t) = S_0 e^{rt} \xi_{0,t} \quad (15)$$

在给定信息 $\{Z_s, 0 \leq s \leq t\}$ 时, 将式(11)和(12)中的

S_t 用 \hat{S}_t 近似, $u(t, S_t, Y_t) \approx u^{\text{BS}}(\hat{S}_t, f(Y_t))$. 而偏导数 $u_s(t, S_t, Y_t) \approx u_s^{\text{BS}}(\hat{S}_t, f(Y_t))$, $u_y(t, S_t, Y_t) \approx u_y^{\text{BS}}(\hat{S}_t, f(Y_t)) \frac{d\sigma}{dy} = u_\sigma^{\text{BS}}(\hat{S}_t, f(Y_t)) f'(Y_t)$, 于是可得 \hat{f}_{1t} 和 \hat{f}_{2t} 的近似表达式

$$\tilde{f}_{1t} = e^{-nt} \hat{S}_t f(Y_t) N(d_1(\hat{S}_t, f(Y_t))) \quad (16)$$

$$\tilde{f}_{2t} = e^{-nt} \hat{\sigma} g(t, Y_t) \hat{S}_t N'(d_1(\hat{S}_t, f(Y_t))) \sqrt{T-t} f'(Y_t) \quad (17)$$

从而得到鞅控制变量 $\int_0^T \tilde{f}_{1t} dZ_t$ 和 $\int_0^T \tilde{f}_{2t} dZ_t$.

1.4 函数波动率控制变量

Ma 等^[6]提出了如下的控制变量方法: 考虑一个虚拟的标的资产, 其价格 \tilde{S}_t 满足

$$\frac{d\tilde{S}_t}{\tilde{S}_t} = r dt + \tilde{\sigma}(t) dW_t$$

其中 $\tilde{\sigma}^2(t) = E(\sigma_t^2)$. 选取 $e^{-rt}h(\tilde{S}_T)$ 作为 $e^{-rt}h(S_T)$ 的控制变量, 容易求得对应的期权价值为^[11]

$$E(e^{-rt}h(\tilde{S}_T)) = u^{\text{BS}}(S_0, \hat{\sigma}_{0,T})$$

$$\text{其中 } \hat{\sigma}_{0,T}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T \tilde{\sigma}^2(t) dt.$$

2 数值算例及分析

以下用 Heston 随机波动率模型下的欧式看涨期权为例,说明本文提出算法的优越性.为此将 $[0, T]$ 作 M 等分,并记 $\Delta t = T/M, 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T, S(t_{k+1}) = S_{k+1}, Y(t_{k+1}) = Y_{k+1}$. 给定 S_0, Y_0 , 对模型(1)和(2)使用如下的离散格式:对 $k=0, \dots, M-1$,

$$S_{k+1} = S_k e^{(r - \frac{1}{2}Y_k^+) \Delta t + \sqrt{Y_k^+} \sqrt{\Delta t} (\rho Z_{k+1} + \sqrt{1-\rho^2} \tilde{W}_{k+1})}$$

$$Y_{k+1} = Y_k + a(\theta - Y_k) \Delta t + \hat{\sigma} \sqrt{Y_k^+} \sqrt{\Delta t} Z_{k+1}$$

其中 $Z_k, \tilde{W}_k, k=1, \dots, M$ 是独立同分布的标准正态随机变量.

为了讨论以上各种蒙特卡罗方法的误差差异性,统一将时间离散点个数取为 $M=100$,模拟次数取为 $m=10^5$,将控制变量蒙特卡罗方法的标准差以及与普通蒙特卡罗标准差之比(减小倍数)作为各种方法优劣评判标准.模型参数统一取为 $S_0 = K = 30, r=0.05, T=1$.

2.1 鞅控制变量条件蒙特卡罗方法的计算效果

固定 $a=2, \theta=0.010, Y_0=0.015$, 为了满足 Feller 条件, $\hat{\sigma} < \sqrt{2a\theta} = 0.2$, 取 $\hat{\sigma}=0.050$. 首先考虑相关系数的影响,具体数值结果见表 1. 可以看出,基于鞅控制变量的条件蒙特卡罗方法(下文简称鞅控制变量方法)加速效果随着相关系数绝对值的增大,标准差减小倍数越来越小.

表 1 鞅控制变量方法下不同相关系数的模拟结果

Tab. 1 Simulation results for different correlation coefficients with martingale control variates method

ρ	V_{MC}	σ_{MC}	V_{CV}	σ_{CV}	R
-0.75	2.170 0	0.007 6	2.167 7	0.000 6	17.597 3
-0.50	2.162 9	0.007 7	2.160 9	0.000 5	27.681 9
-0.25	2.155 6	0.007 9	2.153 8	0.000 3	101.972 8
0	2.148 0	0.008 0	2.146 4	$8.080 0 \times 10^{-6}$	990.442 8
0.25	2.140 0	0.008 1	2.138 6	0.000 1	74.664 6
0.50	2.131 7	0.008 3	2.130 5	0.000 3	29.304 2
0.75	2.123 1	0.008 4	2.122 3	0.000 4	19.094 2

注: $V_{MC} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m V_{i,MC}$ 表示普通蒙特卡罗方法得到的期权价值模拟均值,其中 $V_{i,MC}$ 是模拟的样本值; $\sigma_{MC} = \sqrt{\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (V_{i,MC} - V_{MC})^2}$ 表示其模拟的标准差. V_{CV} 表示鞅控制变量方法得到的期权价值模拟均值, σ_{CV} 表示其模拟的标准差. $R = \sigma_{MC} / \sigma_{CV}$ 是使用鞅控制变量方法后的标准差减小倍数.

本文的计算平台为 Intel T2050, 1.60GHz, 内存 2G, 软件环境为 Matlab R2010a/Windows XP.

为了得到表 1 的数据,鞅控制变量方法总共耗时 47.538 6 s, 普通蒙特卡罗方法总共耗时 18.676 1 s, 两者计算时间之比为 2.545 4, 这说明鞅控制变量方法的计算时间大概为普通蒙特卡罗方法的 3 倍. 而综合加速效果为标准差减小倍数的平方除以计算时间比, 考虑到标准差减小倍数, 鞅控制变量方法大大提高了模拟效率. 以 $\rho=0.75$ 作为说明, 鞅控制变量方法相对于普通蒙特卡罗方法的综合加速效果为 $19.094 2^2 / 2.545 4 = 143.234 3$ 倍.

由表 1 可知, 本文提出的鞅控制变量方法与相关系数的联系较大, 这主要是由于条件蒙特卡罗方法引起的. 从表 2 可以看出, 随着 $|\rho|$ 的增大, 条件蒙特卡罗方法的标准差逐渐增大, 而标准差减小倍数 R_1 越来越小. 当 $|\rho|$ 靠近 1 时, 基本上没有加速效果. 从式(6)可以看出, 条件蒙特卡罗方法消去了与波动率过程不相关的随机性 \tilde{W}_t , 而这个量与 $\sqrt{1-\rho^2}$ 成比例. 也就是说, $|\rho|$ 越大时, 消去的随机性越小, 从而可以预计其标准差减小的倍数越小.

表 2 条件蒙特卡罗方法下不同相关系数的模拟结果

Tab. 2 Simulation results for different correlation coefficients with conditional Monte-Carlo method

ρ	V_{MC}	σ_{MC}	V_{CMC}	σ_{CMC}	R_1
-0.75	2.170 0	0.007 6	2.166 1	0.005 3	1.423 8
-0.50	2.162 9	0.007 7	2.159 7	0.003 4	2.271 7
-0.25	2.155 6	0.007 9	2.153 2	0.001 6	5.015 7
0	2.148 0	0.008 0	2.146 6	0.000 3	30.341 8
0.25	2.140 0	0.008 1	2.139 9	0.002 1	3.884 8
0.50	2.131 7	0.008 3	2.133 2	0.004 0	2.044 9
0.75	2.123 1	0.008 4	2.126 4	0.006 2	1.363 6

注: V_{CMC} 和 σ_{CMC} 分别表示条件控制蒙特卡罗方法得到的均值和标准差, $R_1 = \sigma_{MC} / \sigma_{CMC}$ 是使用条件蒙特卡罗方法的标准差减小倍数.

注意到鞅控制变量方法的标准差减小倍数, 实际上是条件蒙特卡罗方法的标准差减小倍数与鞅控制变量方法(相对于条件蒙特卡罗方法)的标准差减小倍数之积. 对比表 1 与 2 的数据, 可以得到鞅控制变量的标准差减小倍数为 12~30 倍, 这说明了鞅控制变量方法可以极大地提高计算效率(在本文的数据中可得 100 倍以上). 另一方面, 表 2 的数据说明仅仅使用条件蒙特卡罗方法, 对随机波动率模型的加速效果极不稳定, 而本文提出鞅控制变量方法可以非常有效地提高计算效率.

波动率的波动率对随机波动率的随机性有很大影响, 下面考虑其对鞅控制变量方法的影响. 固定 $\rho=0.50$, 为了保证 $\hat{\sigma} < \sqrt{2a\theta} = 0.2$, $\hat{\sigma}$ 取表 3 中数值, 结果见表 3.

表3 鞅控制变量方法在不同波动率的波动率的模拟结果

Tab.3 Simulation results for different volatilities of volatility with martingale control variates method

$\hat{\sigma}$	V_{MC}	σ_{MC}	V_{CV}	σ_{CV}	R
0.010	2.146 5	0.008 0	2.145 6	0.000 3	29.128 4
0.025	2.141 4	0.008 1	2.140 3	0.000 3	29.277 5
0.050	2.131 7	0.008 3	2.130 5	0.000 3	29.304 2
0.075	2.120 8	0.008 4	2.119 3	0.000 3	28.993 0
0.100	2.108 7	0.008 5	2.106 8	0.000 3	28.269 8
0.125	2.095 6	0.008 7	2.093 2	0.000 3	27.070 2
0.150	2.081 7	0.008 8	2.078 7	0.000 3	25.385 6
0.175	2.067 3	0.009 0	2.063 6	0.000 4	23.449 5

可见随着 $\hat{\sigma}$ 的增大,鞅控制变量方法的标准差减小倍数先增后减,但整体效果仍然稳定.这说明本文方法即使对较大的波动率的波动率也能保持很好的表现.

Heston 模型中的参数 θ 表示随机波动率的长期均值,固定 $a=2, Y_0=0.015, \hat{\sigma}=0.050, \rho=0.50$,具体数值结果见表4.

表4 鞅控制变量方法在不同长期均值的模拟结果

Tab.4 Simulation results for different long-run averages with martingale control variates method

θ	V_{MC}	σ_{MC}	V_{CV}	σ_{CV}	R
0.010	2.131 7	0.008 3	2.130 5	0.000 3	29.304 2
0.015	4.289 2	0.021 9	4.295 5	0.001 1	20.636 8
0.020	4.786 3	0.025 5	4.794 2	0.001 3	20.377 9

表4显示,随着长期均值的增大,鞅控制变量方法的标准差减小倍数略微有些下降.

参数 Y_0 表示随机波动率的初始值,固定 $a=2, \theta=0.010, \hat{\sigma}=0.050, \rho=0.50$,数值结果见表5.

表5显示,随着初始波动率的增大,鞅控制变量的标准差减小倍数略微有些下降.

表5 鞅控制变量方法在不同初始波动率的模拟结果

Tab.5 Simulation results for different initial values of volatility with martingale control variates

Y_0	V_{MC}	σ_{MC}	V_{CV}	σ_{CV}	R
0.005	1.906 0	0.006 8	1.905 0	0.000 2	31.428 5
0.010	2.023 3	0.007 6	2.022 2	0.000 2	30.497 3
0.015	2.131 7	0.008 3	2.130 5	0.000 3	29.304 2
0.020	2.232 8	0.008 9	2.231 5	0.000 3	28.351 0

最后,考察回复率 a 的影响,固定 $\theta=0.010, Y_0=0.015, \hat{\sigma}=0.050, \rho=0.50$,具体结果见表6.

表6显示,随着回复率的增大,标准差减小倍数逐渐减小.

表6 鞅控制变量方法在不同回复率的模拟结果

Tab.6 Simulation results for different recovery rate with martingale control variates method

a	V_{MC}	σ_{MC}	V_{CV}	σ_{CV}	R
1	2.173 1	0.008 6	2.172 1	0.000 3	29.686 3
2	2.131 7	0.008 3	2.130 5	0.000 3	29.304 2
5	2.082 9	0.007 8	2.081 7	0.000 3	28.999 4

从上面的讨论可以看出,鞅控制变量方法的加速效果对相关系数的依赖较大,而对随机波动率模型的各个参数均有比较稳定的表现.下面再比较本文方法与文献[6]提出的函数波动率控制变量方法的标准差减小倍数.

2.2 与函数波动率控制变量方法的比较

固定 $a=2, \theta=0.010, Y_0=0.015, \hat{\sigma}=0.050$,考察不同相关系数对两种控制变量方法的影响.可见函数波动率控制变量方法的标准差减小倍数随着相关系数绝对值的增大而增大,相对而言标准差减小倍数变化不大.可以预见,本文方法在相关系数的绝对值比较小的时候更具优势.

表7 两种方法不同相关系数的模拟结果比较

Tab.7 Simulation results for different correlation coefficients

ρ	σ_{MC}	σ_{CV}	R	σ_{CV2}	R_2
-0.75	0.007 6	0.000 6	17.597 3	0.000 8	9.508 3
-0.50	0.007 7	0.000 5	27.681 9	0.000 8	9.220 6
-0.25	0.007 9	0.000 3	101.972 8	0.000 9	9.100 0
0	0.008 0	$8.080 0 \times 10^{-6}$	990.442 8	0.000 9	9.122 2
0.25	0.008 1	0.000 1	74.664 6	0.000 9	9.283 7
0.50	0.008 3	0.000 3	29.304 2	0.000 9	9.602 2
0.75	0.008 4	0.000 4	19.094 2	0.000 8	10.125 7

注: σ_{CV2} 表示函数波动率控制变量方法得到的标准差, $R_2=\sigma_{MC}/\sigma_{CV2}$ 是对应的标准差减小倍数.

为了得到上表中数据,基于鞅控制变量方法共用了47.538 6 s,而函数波动率控制变量方法共用了24.460 5 s,两者之比为1.943 5.也就是说本文方法大约比函数波动率控制变量方法多用1倍的时间.以 $\rho=0.50$ 为例,本文方法相较于函数波动率控制变量方法的综合加速效果为 $29.304 2^2/(1.943 5 \times 9.602 2^2)=4.792 2$,即本文方法的加速效果优于函数波动率控制变量方法.

固定相关系数为 $\rho=0.50$,考察不同波动率的波动率对控制变量方法的影响,计算结果见表8.

由此可见随着 $\hat{\sigma}$ 的增大,两种控制变量方法的标准差减小倍数都变小.除了在波动率的波动率很小的时候,鞅控制变量方法的标准差减小倍数明显比函数波动率控制变量方法更好.对于这两种方法的标准差和标准差减小倍数,图1的表示更加直观.

从图 1 可以看出,函数波动率控制变量方法的标准差与波动率的波动率之间呈线性关系.

表 8 两种方法不同波动率的波动率的模拟结果比较

Tab.8 Simulation results comparison for different volatilities of the volatility by two methods

$\hat{\sigma}$	σ_{MC}	σ_{CV}	R	σ_{CV2}	R_2
0.010	0.008 0	0.000 3	29.128 4	0.000 2	47.090 9
0.025	0.008 1	0.000 3	29.277 5	0.000 4	18.958 8
0.050	0.008 3	0.000 3	29.304 2	0.000 9	9.602 2
0.075	0.008 4	0.000 3	28.993 0	0.001 3	6.484 8
0.100	0.008 5	0.000 3	28.269 8	0.001 7	4.925 3
0.125	0.008 7	0.000 3	27.070 2	0.002 2	3.986 8
0.150	0.008 8	0.000 3	25.385 6	0.002 6	3.359 2
0.175	0.009 0	0.000 4	23.449 5	0.003 1	2.909 8

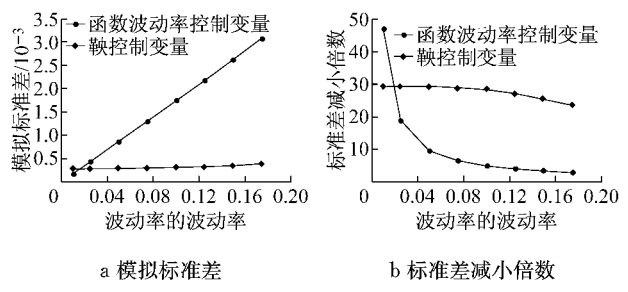


图 1 两种控制变量方法的模拟标准差和标准差减小倍数
Fig.1 Standard error and reduction ratios of two control variates methods

3 结语

对于随机波动率驱动下的期权定价问题,基于鞅表示定理得到了一类条件蒙特卡罗方法的鞅控制变量.数值结果表明,基于鞅控制变量的条件蒙特卡罗方法可以大大加速蒙特卡罗方法效率,并且加速效果比较稳定.相较于函数波动率控制变量而言,本文提出的方法在相关系数的绝对值较小和波动率的

波动率较大的情形下更具明显的优势.

本文提出的方法也可以推广到与路径有关的期权、其他高维随机波动率以及随机利率模型下的衍生产品定价问题.

参考文献:

[1] Hull J, White A. The pricing of options on assets with stochastic volatilities[J]. Journal of Finance, 1987, 42(2): 281.

[2] Heston S L. A closed solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options [J]. Review of Financial Studies, 1993, 6(2):327.

[3] Glasserman P. Monte-Carlo methods in financial engineering [M]. New York: Springer, 2004.

[4] Fouque J P, Tullie T A. Variance reduction for Monte Carlo simulation in a stochastic volatility environment [J]. Quantitative Finance, 2002, 2(1):24.

[5] Fouque J P, Han C H. A martingale control variate method for option pricing with stochastic volatility [J]. ESAIM: Probability and Statistics, 2007, 11:40.

[6] Ma J M, Xu C L. An efficient control variate method for pricing variance derivatives[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2010, 235(1): 108.

[7] Sheldon R. A first course in probability[M]. 8th ed. Upper Saddle River: Pearson Education Inc. , 2010.

[8] Willard G.A. Calculating prices and sensitivities for path-independent derivative securities in multifactor models[J]. Derivatives, 1997, 5(1): 45.

[9] Driums G G. Options on realized variance in Log-OU models [J]. Applied Mathematical Finance, 2012, 19 (5): 477.

[10] 姜礼尚. 期权定价的数学模型和方法 [M]. 2 版. 北京:高等教育出版, 2008.

JIANG Lishang. Mathematic models and methods of option pricing[M]. 2nd ed. Beijing: Higher Education Press, 2008.

[11] Shreve S E. Stochastic calculus for finance II: continuous-time models[M]. 4th ed. New York: Springer, 2004.