

块 Hankel 矩阵快速低秩估计及 在地震信号中的应用

鲁 玲, 许 威

(同济大学 数学系, 上海 200092)

摘要: 通过利用 BHHB 矩阵(复数块 Hankel 矩阵)的结构特点,提出了快速稳定的对 BHHB 矩阵进行 SVD(奇异值分解)分解的方法. 该方法首先进行 Lanczos 二对角化,若是对称 BHHB 矩阵,则进行三对角化来保持对称性;然后利用 Twisted 分解方法对实二对角方阵(或对称三对角矩阵)进行 SVD 分解. 此快速 SVD 算法的优势在于, Lanczos 分解过程中使用了新的 BHHB 矩阵与向量的快速乘法,该乘法通过 1 维 FFT(快速傅里叶变换)代替多维 FFT,在加快计算速度的同时减少了存储量;而后 Twisted 分解采用部分 SVD 而不是整体 SVD,从而节约了计算时间. 数值试验结果表明,快速 SVD 算法大大提高了计算效率,减少了存储空间;地震信号的实验结果说明, Cadzow 滤波方法比目前常用的预测滤波技术效果更好,结合快速 SVD 算法后,能够快速有效去除信号中的噪声. 因此,块 Hankel 矩阵的快速 SVD 分解算法在地震信号处理和其他涉及块 Hankel 矩阵的实际应用中,尤其是解决大规模问题方面,有很好的发展前景.

关键词: 低秩估计; 块 Hankel 矩阵; 快速奇异值分解

中图分类号: O241.6

文献标志码: A

A Fast Rank-reduction Algorithm Based on Block Hankel Hankel Block Matrix-vector Multiplication with Applications to Seismic Signal Processing

LU Ling, XU Wei

(Department of Mathematics, Tongji University, Shanghai 200092, China)

Abstract: Cadzow filtering is a well-known denoising technique in the seismic signal processing. This method first transforms the data measured in seismic remote sensing into a complex Block Hankel Hankel Block (BHHB) matrix, then it

reduces the noise via singular value decomposition (SVD). Usually, the structure of BHHB matrix is ignored in the SVD computation, so that the computational time and memory storage are high especially when the size of matrix is large. This paper presents a fast and stable SVD algorithm for complex BHHB matrices. The fast SVD algorithm consists of two stages: Lanczos bidiagonalization (or tridiagonalization for symmetric BHHB matrix) and diagonalization using twisted factorization. By exploiting the structure of BHHB matrix, the SVD can be accelerated by a fast matrix-vector multiplication based on the 1-D Fast Fourier Transform (FFT). Compared to the multi-dimensional FFT implementation, the proposed method requires much less memory with the similar computational cost. Numerical experiments support this claim. Finally, the fast SVD method is applied to some seismic examples with the Cadzow filtering technique to reduce noises. It turns out that the proposed method is better than the prediction filtering and it is cost-efficient in the speed and memory usage in seismic data processing, especially for large problems.

Key words: rank-reduction estimation; Block Hankel Hankel Block (BHHB) matrix; fast singular value decomposition (SVD)

1 问题的提出

1.1 概述

在科学研究及实际应用中,例如,雷达、声纳、通讯、声学、语言等领域,都需要对信号的基本参数进行分析和估计,以得到有用的信息. 对信号进行预处理

收稿日期: 2013-06-28

基金项目: 国家自然科学基金青年基金(11101310);教育部高等学校博士学科点专项科研基金(20110072120008);“十一五”国家科技支撑计划(2012BAH17B03)

第一作者: 鲁 玲(1987—),女,博士生,主要研究方向为线性代数和金融衍生品定价. E-mail: 073413@tongji.edu.cn

通讯作者: 许 威(1978—),男,副教授,主要研究方向为科学计算、非线性问题求解以及在工程与金融中的应用.

E-mail: wdxu@tongji.edu.cn

理时,最重要的就是要消除信号的噪声. 随机噪声是地震资料处理中遇到的主要干扰波之一,在地震记录上表现为波形杂乱无章,频带很宽,视速度不确定,无一定的传播方向,但在一定程度上能够满足统计规律. 随机噪声的存在会降低地震资料的信噪比,影响资料处理的质量. 压制随机噪声的方法主要分为三类:①基于预测技术的方法(f - x 域反褶积和投影反褶积等);②基于统计原理的方法(中值滤波和多项式拟合等);③基于数学变换的方法(小波包、奇异值分解技术、Radon 变换和模式分解等)^[1]. 其中, f - x 域预测去噪技术是一项最基本的技术. 该技术由 Canales^[2]提出,旨在压制 2 维地震记录中的随机噪声. 该方法以理论上的严密性和实际效果上的显著性在工业界得到广泛应用,成为 2 维地震资料处理中的常用技术. f - x 域预测法假设反射波同相轴具有线性或局部线性的特性,在 f - x 域中对每一个频率成分应用复数最小平方原理,求得预测算子^[3]. 然而该方法在应用中对所有相干信号(不管有效反射信号,还是面波、线性干扰波)进行加强. 另外,由于高频段的信噪比较低,求取的预测算子受噪声成分的影响较大,这就使得去噪后高频段的有效信号严重畸变,不利于进一步提高分辨率^[3].

20 世纪 70 年代之后,奇异值分解(SVD)技术被广泛应用于信号处理. SVD 去噪是工业界常用的随机噪声压制方法,它利用信号和噪声在奇异值分布上的差异进行信号恢复和噪声剔除,当地震反射为水平反射同相轴,该方法效果很好. f - x 域 Cadzow 滤波,就是一种基于 SVD 分解,并利用特征剖面重构信号压制噪声的方法. 该方法最早由 Cadzow^[4]引入,用于解决谱分析问题,并在核磁共振医学图像处理中得到广泛应用. f - x 域 Cadzow 滤波基于信号在 f - x 域的可预测性,将地震数据变换到 f - x 域,取每一个频率切片构建 Hankel 矩阵,再进行 SVD 分解^[5],利用优选特征值的加权并通过替换频率切片实现随机噪声的压制. Trickett^[6], Oropeza 等^[7]和 Sacchi^[8]分别研究了利用 f - x 域 Hankel 矩阵(Cadzow 技术)压制地震资料中随机噪声的效果. f - x 域 Cadzow 滤波在处理线性同相轴时,表现出很好的去噪能力与保幅性能. 但是,当地震记录中存在高能量突发噪声、弯曲同相轴和断层时,该方法可能产生去噪假象. 为适应弯曲地震同相轴的处理,崔树果等^[1]、袁三一^[9]提出了局部 Cadzow 滤波,针对有效信号在频率域可预测的特点,在小时空窗内构建复数 Hankel 矩阵,充分利用 SVD 技术精确的特点,

通过提取有效信号的奇异值区间来压制随机噪声,以便能最大限度地压制噪声,保留有效信号.

自从奇异值分解被引入地球物理学以来,许多学者在消除地震波场随机噪声方面进行了研究,同时也提出了多种奇异值分解去噪方法. 虽然这些方法可以有效地消除随机噪音,但仍存在以下问题:①它们都以 2 维的地震剖面作为处理对象,通过对每个地震剖面进行处理实现去噪,而地质体是 3 维的,如果将单一 2 维地震剖面作为处理单元,势必会忽视某些有用的信息,影响滤波结果;②在同相轴倾斜、弯曲时,为了有效地消除随机噪声,这些方法都必须先准确找出同相轴的倾角,再沿着倾角方向进行奇异值分解滤波,而当噪声强度较大时同相轴的倾角是很难准确求取的,如果不能准确地求取同相轴的倾角,也就不能得到正确的滤波结果. 因此,冯兴强等人在 2005 年提出了基于奇异值分解的 f - xy 域滤波方法^[10]. 该方法类似于 Ulrych 等人提出的 Eigenimage 滤波法^[11]. 它是一种 3 维去噪方法,将地震数据变换到 f - xy 域进行 SVD 分解. 它不需求取同相轴的倾角就可以去除倾斜同相轴的随机噪声,同时还可以较好地保持地震信号的振幅.

2008 年,Trickett 将 Cadzow 滤波方法推广到 f - xy 3 维随机噪声衰减中. 该方法将地震数据变换到 f - xy 域,构造块 Hankel 矩阵,再进行 SVD 分解. Trickett 的实验证明了 f - xy 域 Cadzow 滤波方法比 f - xy 域预测反褶积和投影反褶积的效果更明显^[12],同时也证明了 f - xy 域 Cadzow 滤波方法比 Eigenimage 滤波法更好^[11]. 然而,该方法需要对块 Hankel 矩阵进行 SVD 分解,工作量巨大. 因此,本文针对 f - xy 域 Cadzow 滤波方法构造的块 Hankel 矩阵提出了快速 SVD 分解算法,利用块 Hankel 矩阵的结构特点,不仅大大降低了 SVD 分解工作量,同时可以最大限度地降低内存的占用,能够极大地提高去噪的效率. 并且,块 Hankel 矩阵的快速 SVD 分解算法在地震信号处理和其他涉及块 Hankel 矩阵的实际应用中尤其是解决大规模问题方面有很好的发展前景. 例如:块 Hankel 矩阵快速 SVD 算法还可以应用在 2011 年 Falkovskiy 等^[13]提出的 Frequency Extension (FE) filter in combination with FX Cadzow filter; 而块大小为 1 时的特例情况,即 Hankel 矩阵的快速 SVD 算法,除了能用在经典的 f - x 域 Cadzow 滤波法,还可以用在张磊等^[14]提出的奇异值分解降噪的改进方法,利用该方法处理船舶和机械设备振动噪声测试信号,可有效提高

其信噪比,最大程度地优化信号去噪的效果,提高分析的可靠性。

1.2 Cadzow 滤波法原理

假设一个时间域信号 $s(t)$,通过傅里叶变换将其转换到频率域,它在频率 $\mathbf{f}=[f_1, f_2, \dots, f_n]^T$ 处分别对应的函数值 $\mathbf{s}(\mathbf{f})=\mathbf{s}=[s_1, s_2, \dots, s_n]^T$, f - x 域 Cadzow 滤波法利用向量 \mathbf{s} 构建一个复数矩阵 \mathbf{H}

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} s_1 & s_2 & \cdots & s_K \\ s_2 & s_3 & \cdots & s_{K+1} \\ s_3 & s_4 & \cdots & s_{K+2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ s_L & s_{L+1} & \cdots & s_n \end{bmatrix}$$

这里 $L=\text{floor}\left(\frac{n}{2}\right)+1$, $K=n-L+1$, $\text{floor}(x)$ 表示不大于 x 的最大整数。该矩阵 \mathbf{H} 的反对角元素均相同,故而由此推导得到的矩阵是 Hankel 矩阵。对频率域数据 \mathbf{S} ,则是一个 $N_y \times N_x$ 的复数矩阵,记为

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}(1,1) & \mathbf{S}(1,2) & \cdots & \mathbf{S}(1,N_x) \\ \mathbf{S}(2,1) & \mathbf{S}(2,2) & \cdots & \mathbf{S}(2,N_x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{S}(j,1) & \mathbf{S}(j,2) & \cdots & \mathbf{S}(j,N_x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{S}(N_y,1) & \mathbf{S}(N_y,2) & \cdots & \mathbf{S}(N_y,N_x) \end{bmatrix}$$

f - xy Cadzow 滤波法首先利用矩阵 \mathbf{S} 的每一行元素生成一个 Hankel 矩阵,以第 j 行为例,生成格式如下:

$$\mathbf{M}_j = \begin{bmatrix} \mathbf{S}(j,1) & \mathbf{S}(j,2) & \cdots & \mathbf{S}(j,K_x) \\ \mathbf{S}(j,2) & \mathbf{S}(j,3) & \cdots & \mathbf{S}(j,K_x+1) \\ \mathbf{S}(j,3) & \mathbf{S}(j,4) & \cdots & \mathbf{S}(j,K_x+2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{S}(j,L_x) & \mathbf{S}(j,L_x+1) & \cdots & \mathbf{S}(j,N_x) \end{bmatrix}$$

其中, $L_x=\text{floor}\left(\frac{N_x}{2}\right)+1$, $K_x=N_x-L_x+1$ 。其次,把每一行生成的 Hankel 矩阵组合在一起就得到一个大型的块 Hankel 矩阵

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_1 & \mathbf{M}_2 & \cdots & \mathbf{M}_{K_y} \\ \mathbf{M}_2 & \mathbf{M}_3 & \cdots & \mathbf{M}_{K_y+1} \\ \mathbf{M}_3 & \mathbf{M}_4 & \cdots & \mathbf{M}_{K_y+2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{M}_{L_y} & \mathbf{M}_{L_y+1} & \cdots & \mathbf{M}_{N_y} \end{bmatrix}$$

其中, $L_y=\text{floor}\left(\frac{N_y}{2}\right)+1$, $K_y=N_y-L_y+1$ 。上面构造的 \mathbf{M} 矩阵就是一个复数 Block Hankel 矩阵,它的每一个元素都是一个小的 Hankel 矩阵块,即 Block Hankel Hankel Block(简记为 BHHB)矩阵,而 \mathbf{M} 本

身则不再是一个 Hankel 矩阵。若 $K_x=L_x$, $K_y=L_y$, 则 \mathbf{M} 是个对称矩阵,简记为 SBHBB 矩阵;否则, \mathbf{M} 是个非对称的,简记为 GBHBB 矩阵。

构造好矩阵形式之后, Cadzow 滤波法对复数矩阵 \mathbf{H} 或 \mathbf{M} 进行降秩处理,以去除噪音,其中最平稳的降秩方法是 SVD 分解。以矩阵 \mathbf{H} 为例,首先对 \mathbf{H} 进行 SVD 分解, $\mathbf{H}=\mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^H$, 其中 \mathbf{V}^H 表示 \mathbf{V} 的共轭转置。保留对角矩阵 $\mathbf{\Sigma}$ 的前 m 个主对角元素,其余置 0,得到一个新的对角矩阵 $\mathbf{\Sigma}'$;然后重新合成矩阵 \mathbf{H}' , $\mathbf{H}'=\mathbf{U}\mathbf{\Sigma}'\mathbf{V}^H$;最后对矩阵 \mathbf{H}' 每条反对角上的元素求平均值作为相应频率域函数值,从而达到去噪的目的。

上述 Cadzow 滤波法去噪关键的一步就是对生成的复 Hankel 矩阵或复 BHBB 矩阵进行 SVD 分解。通常采用的 SVD 分解方法均忽略了复 BHBB 矩阵的特殊结构性性质,随着矩阵规模的扩大,代价将非常昂贵,因此本文利用复 BHBB 矩阵的性质提出了快速稳定的 SVD 分解算法。该快速算法主要分为两个阶段:二对角化和对角化。首先,采用 Lanczos 分解对 BHBB 矩阵二对角化^[15],若 BHBB 矩阵是方的,则采用三对角化^[16]来保持对称性;然后利用 Twisted 分解^[17]方法对实二对角方阵(或对称三对角矩阵)进行 SVD 分解。整个 SVD 分解的主要工作量集中在 Lanczos 分解上,而 Lanczos 分解的主要工作量则集中在矩阵与向量的乘积上,因此有效地减少矩阵向量乘积的工作量就能够大大地提高 SVD 的速度。本文提出了一种 BHBB 矩阵与向量的快速乘法,并通过 1 维 FFT(快速傅里叶变换)加速算法减少存储空间。本文提出的快速 SVD 算法的另一个优势在于,可以依据降噪的需求,通过设定奇异值的阈值进行部分 SVD 分解而不是整体 SVD 分解,从而进一步减少计算时间。

2 Lanczos 方法和 Twisted 分解

快速 BHBB 矩阵 SVD 分解的第一阶段是利用 Lanczos 方法将 BHBB 矩阵二对角化,若是对称 BHBB 矩阵,则进行三对角化来保持对称性;第二阶段利用 Twisted 分解方法对实二对角方阵(或对称三对角矩阵)进行 SVD 分解。由于 Lanczos 二对角化与 Lanczos 三对角化类似,此处以对称 BHBB 矩阵为例,简单描述 Lanczos 三对角化的过程。

假设 $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 是复对称矩阵,则存在酉矩阵 \mathbf{Q} , 使得

$$\mathbf{Q}^H \mathbf{A} \bar{\mathbf{Q}} = \mathbf{T} \quad (1)$$

其中: \mathbf{T} 是对称的三对角矩阵; $\bar{\mathbf{Q}}$ 表示 \mathbf{Q} 的共轭。

设酉矩阵 $\mathbf{Q} = [\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_n]$, $\mathbf{q}_i \in \mathbb{C}^{n \times 1}$, 向量 $\mathbf{a} = [a_1, a_2, \dots, a_n]$ 表示 \mathbf{T} 的对角线元素, 向量 $\mathbf{b} = [b_1, b_2, \dots, b_{n-1}]$ 表示 \mathbf{T} 的次对角线元素, 由式(1)可知

$$\mathbf{A} \bar{\mathbf{Q}} = \mathbf{Q} \mathbf{T} \quad (2)$$

由于式(2)等号两边第 j 列相等, 即

$$\mathbf{A} \bar{\mathbf{q}}_j = b_{j-1} \bar{\mathbf{q}}_{j-1} + a_j \bar{\mathbf{q}}_j + b_j \bar{\mathbf{q}}_{j+1} \quad (3)$$

则可以得到

$$b_j \bar{\mathbf{q}}_{j+1} = \mathbf{A} \bar{\mathbf{q}}_j - a_j \bar{\mathbf{q}}_j - b_{j-1} \bar{\mathbf{q}}_{j-1}$$

由于 \mathbf{Q} 的列是规范正交的, 等式(3)的两边同乘 \mathbf{q}_j^H 得到

$$\mathbf{q}_j^H \mathbf{A} \bar{\mathbf{q}}_j = a_j$$

令 $\mathbf{y} = \mathbf{A} \bar{\mathbf{q}}_j - a_j \bar{\mathbf{q}}_j - b_{j-1} \bar{\mathbf{q}}_{j-1}$, 则 $b_j = \pm \|\mathbf{y}\|_2$, 若 \mathbf{y} 不是零向量, 则 $\bar{\mathbf{q}}_{j+1} = \mathbf{y}/b_j$.

上述 Lanczos 分解方法由于误差造成了酉阵的各个列向量之间不正交, 因此要引入部分正交化方法^[18]来达到修正误差的目的。

在 Lanczos 分解过程中, 式(3)主要的工作量是计算矩阵与向量的乘法, 为提高效率, 第 3 节设计了 BHHB 矩阵与向量的快速乘法。假设 BHHB 矩阵 \mathbf{A} 的大小为 $N \times N$, 使用普通的矩阵与向量的乘法使得 Lanczos 分解需要 $O(N^2)$ 的工作量, 而使用基于 FFT 的 BHHB 矩阵与向量快速乘法的 Lanczos 分解仅需 $O(N^2 \ln N)$ 的工作量。

在第一阶段 Lanczos 三对角化之后, 对得到的对称三对角矩阵 \mathbf{T} 进行 SVD 分解。目前有三种经典的奇异值分解方法: 隐式 QR 方法^[16]、分而治之法^[19]和 Twisted 分解法。隐式 QR 方法需要 $O(N^2)$ 的工作量计算出所有的奇异值, 再需要 $O(N^2)$ 的工作量求得所有的奇异向量。分而治之方法计算所有的奇异值和奇异向量共需的工作量为 $O(N^2)$ 。若给定所有奇异值, 应用 Twisted 分解方法, 只需 $O(N^2)$ 的工作量便可以计算出所有奇异向量。因此, 本文利用隐式 QR 方法计算奇异值, 利用 Twisted 分解方法计算奇异向量, 整个 SVD 分解的工作量只有 $O(N^2)$ 。另外, 在 Cadzow 滤波过程中设定一个阈值, 若某个奇异值小于该阈值, 便视作噪音去除掉, 这样也就不需要计算所对应的奇异向量。因此, Twisted 分解方法可以仅计算大于阈值的奇异值对应的奇异向量, 能够有效地减少计算时间。

3 BHHB 与向量的快速乘法

矩阵与向量的乘法是 Lanczos 分解的主要工

作, 为提高计算效率, 设计了一种快速的 BHHB 矩阵与向量的乘法。从 BHHB 矩阵的构成可知, 信号矩阵 \mathbf{S} 唯一确定了 BHHB 矩阵, 在 BHHB 矩阵与向量的快速乘法中, 也仅仅需要存储矩阵 \mathbf{S} , 而非 BHHB 矩阵 \mathbf{M} , 从而大大地节省了计算所需的内存空间。

下面以 3×3 阶信号矩阵 \mathbf{S} 为例描述 BHHB 矩阵与向量的快速乘法的实现过程。假设有以下参数:

$$N_x = 3, L_x = \text{floor}\left(\frac{N_x}{2}\right) + 1 = 2, K_x = N_x - L_x + 1 =$$

$$2, N_y = 3, L_y = \text{floor}\left(\frac{N_y}{2}\right) + 1 = 2, K_y = N_y - L_y + 1 =$$

2。那么对应的 BHHB 矩阵 \mathbf{M} 就是一个 $L_x L_y \times K_x K_y = 4 \times 4$ 阶矩阵, 它与向量 $\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3, x_4]^T$ 的乘积记作 \mathbf{y} 。快速乘法分为四步:

第一, 将 \mathbf{S} 写成向量形式, 并作为第一列构造循环矩阵(不需存储循环矩阵)。

$$\text{vec}(\mathbf{S}) = [S(1,1), S(2,1), S(3,1), S(1,2), S(2,2), S(2,2), S(1,3), S(2,3), S(3,3)]^T$$

$$\mathbf{C} = \text{circ}(\text{vec}(\mathbf{S}))$$

第二, 向长度为 $K_x K_y = 4$ 的向量 \mathbf{x} 中添加 0 元素使向量长度为 $N_x \times N_y = 9$, 再反向排列它的元素构成新的向量。具体方法是: 把 \mathbf{x} 分成 $K_y = 2$ 个子向量, 每个子向量含有 $K_x = 2$ 个元素, 即 $\mathbf{x} = [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2]^T$, 其中 $\mathbf{x}_1 = [x_1, x_2]^T$, $\mathbf{x}_2 = [x_3, x_4]^T$, 在 \mathbf{x}_i ($i = 1, 2$) 顶部加入 0 使得长度为 N_x , 在 \mathbf{x} 顶部加入 $N_y - K_y = 1$ 个长度为 N_x 的 0 向量, 得到

$$\hat{\mathbf{x}} = [0, 0, 0, 0, x_1, x_2, 0, x_3, x_4]^T$$

再反向排列 $\hat{\mathbf{x}}$ 的元素得到

$$\text{rev}(\hat{\mathbf{x}}) = [x_4, x_3, 0, x_2, x_1, 0, 0, 0, 0]^T$$

第三, 利用 1 维 FFT 快速计算循环矩阵 \mathbf{C} 与 $\text{rev}(\hat{\mathbf{x}})$ 的乘积

$$\hat{\mathbf{y}} = \text{ifft}(\text{fft}(\text{vec}(\mathbf{S})) * \text{fft}(\text{rev}(\hat{\mathbf{x}})))$$

其中: fft 表示快速傅里叶变换; ifft 表示快速逆傅里叶变换; $*$ 表示两个向量对应的元素相乘。

最后提取元素, 将 $\hat{\mathbf{y}}$ 分成 $N_y = 3$ 个子向量, 选取底部 $K_y = 2$ 个子向量, 在每个选中的子向量中提取底部 $K_x = 2$ 个元素, 依次排列, 就构成了 \mathbf{y} 。

$$\hat{\mathbf{y}} = [**, **, **, **, y_1, y_2, **,$$

$$y_3, y_4]^T = [\hat{\mathbf{y}}_1, \hat{\mathbf{y}}_2, \hat{\mathbf{y}}_3]^T$$

$$\hat{\mathbf{y}}_1 = [**, **, **]^T, \hat{\mathbf{y}}_2 = [**, y_1, y_2]^T,$$

$$\hat{\mathbf{y}}_3 = [**, y_3, y_4]^T$$

分别选取 $\hat{\mathbf{y}}_2$ 和 $\hat{\mathbf{y}}_3$ 底部的两个元素, 依次排列, 得到

$$\mathbf{y} = [y_1, y_2, y_3, y_4]^T$$

下面通过一个具体例子来说明整个快速算法的计算过程. 假设信号矩阵 \mathbf{S} 为

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

其对应的 BHHB 矩阵为

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 8 & 9 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+2b+4c+5d \\ 2a+3b+5c+6d \\ 4a+5b+7c+8d \\ 5a+6b+8c+9d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \mathbf{y}$$

如果考虑 \mathbf{M} 的 BHHB 特殊结构, 采用前面提出的快速算法, 该乘积的计算过程为:

首先, 将 \mathbf{S} 写成向量形式, 并作为第一列构造循环矩阵(不需存储循环矩阵)

$$\text{vec}(\mathbf{S}) = [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9]^T$$

$$\mathbf{C} = \text{circ}(\text{vec}(\mathbf{S}))$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 9 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 9 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 9 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 9 & 8 & 7 & 6 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 9 & 8 & 7 & 6 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 9 & 8 & 7 \\ 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 9 & 8 \\ 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 9 \\ 9 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} d \\ c \\ 0 \\ b \\ a \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6a+7b+9c+d \\ 7a+8b+c+2d \\ 8a+9b+2c+3d \\ 9a+b+3c+4d \\ a+2b+4c+5d \\ 2a+3b+5c+6d \\ 3a+4b+6c+7d \\ 4a+5b+7c+8d \\ 5a+6b+8c+9d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ** \\ ** \\ ** \\ ** \\ y_1 \\ y_2 \\ ** \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \mathbf{\hat{y}}$$

最后, 提取元素, 由上式可知

$$\mathbf{\hat{y}} = [**, **, **, **, y_1, y_2, **, y_3, y_4]^T$$

故很容易提取得到 $\mathbf{y} = [y_1, y_2, y_3, y_4]^T$.

对比于一般的矩阵与向量乘法, 快速的 BHHB 矩阵与向量的乘法引入了 1 维快速傅里叶变换, 使工作量由原来的 $O(N^2)$ 变成 $O(N \ln N)$, 其中 $N = L_x L_y = K_x K_y$. 在存储空间方面, 本文方法只存储了必要的元素: $\mathbf{S}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{\hat{x}}, \mathbf{\hat{y}}$. 相对于普通乘法, 它不需要存储整个 BHHB 矩阵, 仅需存储对应的信号矩阵即可; 相对于其他快速乘法, 它没有存储任何多余元素. 例如: 若使用 2 维 FFT, 除了存储上述元素外, 还需存下 $\mathbf{\hat{x}}, \mathbf{\hat{y}}$ 对应的两个 2 维矩阵; 若采取类似处理 Toeplitz 矩阵的方法^[20]应用 2 维 FFT, 对向量 \mathbf{x} 填充更多零元素的同时, 也需要在 \mathbf{S} 矩阵中添加零元素, 使得存储空间增大. 因此, 本文提出的快速 BHHB 矩阵与向量的乘法所需存储最小.

4 数值和地震信号滤波实验

首先比较本文提出的快速 BHHB 矩阵的 SVD

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_1 & \mathbf{M}_2 \\ \mathbf{M}_2 & \mathbf{M}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

如果不考虑 \mathbf{M} 的 BHHB 结构性质, 那么 \mathbf{M} 与向量 $\mathbf{x} = [a, b, c, d]^T$ 的乘积 \mathbf{y} 为

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 8 & 9 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+2b+4c+5d \\ 2a+3b+5c+6d \\ 4a+5b+7c+8d \\ 5a+6b+8c+9d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \mathbf{y}$$

然后, 向 \mathbf{x} 中填充 0, 组成新的向量 $\mathbf{\hat{x}}$, 再将 $\mathbf{\hat{x}}$ 倒置

$$\mathbf{\hat{x}} = [0, 0, 0, 0, a, b, 0, c, d]^T$$

$$\text{rev}(\mathbf{\hat{x}}) = [d, c, 0, b, a, 0, 0, 0, 0]^T$$

接下来, 利用 1 维 FFT 快速计算循环矩阵 \mathbf{C} 与 $\text{rev}(\mathbf{\hat{x}})$ 的乘积 $\mathbf{\hat{y}}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 9 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 9 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 9 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 9 & 8 & 7 & 6 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 9 & 8 & 7 & 6 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 9 & 8 & 7 \\ 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 9 & 8 \\ 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 9 \\ 9 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} d \\ c \\ 0 \\ b \\ a \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6a+7b+9c+d \\ 7a+8b+c+2d \\ 8a+9b+2c+3d \\ 9a+b+3c+4d \\ a+2b+4c+5d \\ 2a+3b+5c+6d \\ 3a+4b+6c+7d \\ 4a+5b+7c+8d \\ 5a+6b+8c+9d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ** \\ ** \\ ** \\ ** \\ y_1 \\ y_2 \\ ** \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \mathbf{\hat{y}}$$

分解算法与 MATLAB 自带 svd 函数(即 LAPACK 中的 ZGESVD)的计算速度. 然后, 将该快速算法运用到 Trickett 提出的 f -xy Cadzow 滤波法^[12]中, 对人造和真实的地震信号进行去噪, 并与常用的滤波方法作比较. 目前地震资料处理软件大致有: 西方地球物理公司的 OMEGA, LANDMARK 的 Promax 和法国 CGG 公司的 CGG 等. 对于随机噪声衰减, CGG 中有 FXNAT^[21-22]和 FXYNA 模块^[22], OMEGA 中有 RNA 和 RNA_3D 模块^[22], Promax 中有 FXDECON 模块^[23]. 这些软件均采用经典的 f -x(y)域预测滤波法进行去噪. 由于实验条件的限制, 无法获得这些常用软件的使用权, 因此本文基于 Promax 中有 FXDECON 模块^[23]的算法, 应用 MATLAB 编写预测滤波法程序, 与基于本文提出的快速 SVD 算法的 f -xy Cadzow 滤波法对去噪效果进行比较.

运行程序的计算机操作系统为 Win 7 旗舰版; 处理器为 AMD Phenom™ II X6 1090T 3.20 GHz; 内存(RAM)为 16.0 GB. 软件版本为 MATLAB

R2009a. 由于软件可能存在初始化的过程, 为保证检验的公平性和准确性, 对于每个指定的矩阵规模, 都产生 10 个不同的矩阵, 并进行乘法和 SVD 运算, 取 10 个计算时间的平均值作为最终运行时间, 并以 10 个计算精度的平均值作为最终的计算精度. 运行时间的单位为 s, BHHB 矩阵与向量快速乘法的乘积精度是与 MATLAB 的矩阵向量乘法的计算结果比较得到的误差, 加速比是指 MATLAB 所需时间除以快速算法所需时间. 假设复数 BHHB 矩阵 A 的 SVD 分解为 $A=U\Sigma V^H$.

当复数 BHHB 矩阵 A 的大小为 $m \times n$, SVD 精度定义为 $\|A - U\Sigma V^H\|_F/mn$, 左正交矩阵精度为 $\|I - U^H U\|_F/mn$; 右正交矩阵精度为 $\|I - V^H V\|_F/n^2$; 若复数 BHHB 矩阵 A 的大小为 $n \times n$, 由于对称性, SVD 精度定义为 $\|A - U\Sigma U^T\|_F/n^2$, 正交精度为 $\|I - U^H U\|_F/n^2$, 其中 I 表示单位矩阵.

表 1 记录了复数 BHHB 矩阵与向量的快速乘法的效率与精度. 可以看出, 随着 Hankel 矩阵规模的增大, 加速比在增大, 即快速算法的优势越来越明显. 表 2 固定了 BHHB 矩阵的大小为 $3\,000 \times 3\,000$,

改变块的大小, 考察块大小对 BHHB 矩阵与向量快速乘法的影响. 结果表明, 随着块规模的增大, 快速算法所需要的时间相对减少, 加速比不断增大, 这是因为子矩阵块的规模变大, 块数变小, BHHB 的结构渐渐近似于 Hankel 矩阵, 也就越具有 Hankel 矩阵的特殊结构性质, 计算时间逐步逼近 Hankel 矩阵与向量快速乘法所需要的时间.

表 3 和表 4 分别列出了 SBHHB 矩阵及 GBHHB 矩阵快速 SVD 算法的效率和精度. 从结果上可看出, 本文快速 SVD 算法比 MATLAB 速度快, 对于一个 1 000 阶的矩阵, 快速 SVD 算法的速度大约是 MATLAB 的 2.5 倍; 但是对于一个 6 000 阶的矩阵, 快速 SVD 算法的速度大约是 MATLAB 的 6 倍. 由此可知, 随着 BHHB 矩阵规模的增大, 本文提出的快速 SVD 算法的优势越来越明显.

在比较完本文提出的 SVD 算法与 MATLAB 自带 svd 之后, 将该算法运用到地震信号降噪过程, 比较基于快速 SVD 算法的 Cadzow 滤波法与预测滤波法的去噪效果. 首先基于阻尼余弦子波公式人工构造一组地震信号数据, 如图 1 所示. 图 1a 显示了

表 1 BHHB 矩阵与向量的快速乘法的效率和精度

Tab.1 Comparison of computational times and accuracies of fast BHHB matrix-vector multiplication with MATLAB on square BHHB matrices

矩阵大小	块大小	计算时间/s		乘积精度	加速比
		Matlab	快速算法		
3 000×3 000	50×50	0.046 80	0.012 48	$2.021\,18 \times 10^{-10}$	3.750 0
6 750×6 750	75×75	0.234 00	0.020 28	$9.805\,56 \times 10^{-10}$	11.538 5
12 000×12 000	100×100	0.744 12	0.043 68	$3.226\,10 \times 10^{-9}$	17.035 7
18 750×18 750	125×125	1.945 33	0.059 28	$7.831\,13 \times 10^{-9}$	32.815 8

表 2 块大小对 BHHB 矩阵与向量快速乘法的影响

Tab.2 Performance of the fast BHHB multiplication with various block sizes

矩阵大小	块大小	计算时间/s		乘积精度	加速比
		Matlab	快速算法		
3 000×3 000	10×10	0.046 80	0.010 92	$2.031\,01 \times 10^{-10}$	4.286
3 000×3 000	20×20	0.045 24	0.006 24	$2.027\,14 \times 10^{-10}$	7.250
3 000×3 000	30×30	0.048 36	0.003 12	$2.043\,27 \times 10^{-10}$	15.500
3 000×3 000	50×50	0.051 48	0.004 68	$2.019\,03 \times 10^{-10}$	11.000
3 000×3 000	60×60	0.049 92	0.001 56	$2.028\,31 \times 10^{-10}$	32.000

表 3 SBHHB 矩阵快速 SVD 的效率和精度

Tab.3 Comparison of computational times and accuracies of MATLAB built-in SVD with the proposed fast SVD algorithm on square BHHB matrices with square blocks

矩阵大小	块大小	Matlab 计算 时间/s	快速 SVD		加速比
			时间/s	正交精度 SVD 精度	
900×900	30×30	25.022 6	17.986 9	2.19×10^{-14} 5.27×10^{-13}	1.391 2
2 500×2 500	50×50	523.430 2	220.148 6	3.68×10^{-15} 1.53×10^{-13}	2.377 6
4 900×4 900	70×70	4 224.507 1	1 401.091 8	2.27×10^{-15} 1.02×10^{-13}	3.015 2
6 400×6 400	80×80	25 667.234 5	2 888.920 1	4.96×10^{-15} 1.77×10^{-13}	8.884 7

表4 GBHBB矩阵快速SVD的效率和精度

Tab.4 Comparison of computational times and accuracies of MATLAB built-in SVD with the proposed fast SVD algorithm on GBHBB matrices with rectangular blocks

矩阵大小	块大小	Matlab 计算 时间/s	快速 SVD				加速比
			时间/s	左正交精度	右正交精度	SVD 精度	
286×162	13×9	0.546 0	0.327 6	1.28×10^{-13}	9.98×10^{-14}	7.62×10^{-13}	1.666 7
1 296×1 012	27×23	45.552 3	13.618 9	8.28×10^{-15}	1.51×10^{-14}	2.58×10^{-13}	3.344 8
5 500×4 896	55×51	4 739.903 2	900.391 0	2.09×10^{-15}	3.49×10^{-15}	8.42×10^{-14}	5.264 3
8 694×7 930	69×65	23 516.854 3	3 640.376 9	3.12×10^{-16}	5.09×10^{-15}	1.06×10^{-13}	6.460 0

原始信号,信号矩阵大小为 299×99 ,对应生成的 BHBB 矩阵的大小为 $7\,500 \times 7\,500$,添加随机噪声如图 1b,利用 Cadzow 滤波法结合 BHBB 矩阵的快

速 SVD 分解方法降低矩阵的秩到 50,得到的去噪后信号如图 1c,而图 1d 为 f_{xy} 预测滤波法得到的结果.比较图 1c,1d 可知,Cadzow 滤波法效果更明显.

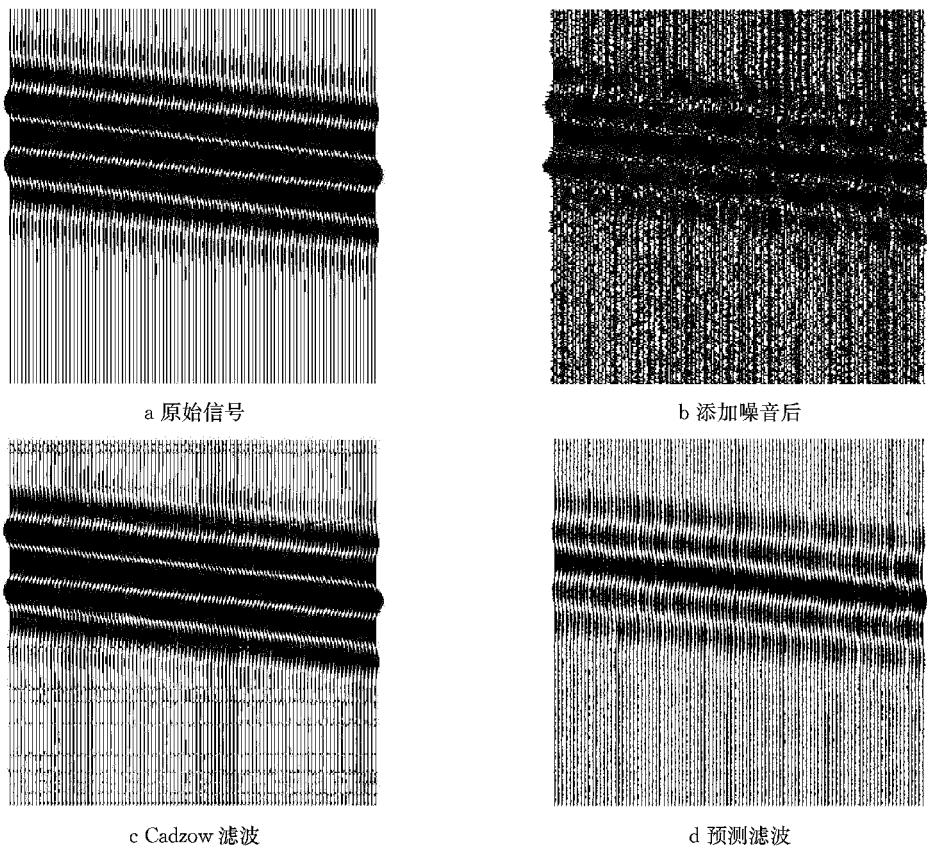


图1 基于阻尼余弦子波构造的2维信号

Fig.1 Artificial 2-D signal based on damped cosine wavelet.

接下来,构造相对复杂的3维地震信号体,截取某一剖面,如图2所示.图2a显示了原始剖面信号,信号矩阵大小为 101×101 ,生成的 BHBB 矩阵的大小为 $2\,601 \times 2\,601$,添加随机噪声如图2b,利用 Cadzow 滤波法结合 BHBB 矩阵的快速 SVD 分解方法降低矩阵的秩到 100,得到的去噪后信号结果如图2c,图2d为预测滤波得到的结果.比较图2c,2d可知,Cadzow 滤波法不仅保护了更多原始信号,而且更大限度地去除了地震波里的随机噪声.

第三个信号处理的例子截取了一部分真实测量的信号数据,如图3所示.图3a显示了原始信号,信

号矩阵大小为 349×69 ,生成的 BHBB 矩阵的大小为 $6\,125 \times 6\,125$,利用 Cadzow 滤波法结合 BHBB 矩阵的快速 SVD 分解方法降低矩阵的秩到 200,得到的去噪后信号结果如图3b,图3c为预测滤波法得到的结果.从图3b,3c可以看出,Cadzow 滤波法能够更加有效地去除噪声.

表1~4表明,本文提出的 BHBB 矩阵的 SVD 分解算法比 MATLAB 自带 svd 函数速度更快,而且随着块规模的增大,快速算法所需要的时间相对减少,加速比不断增大,算法的优势越来越明显.图1~3表明,Cadzow 滤波结合 BHBB 矩阵的快速

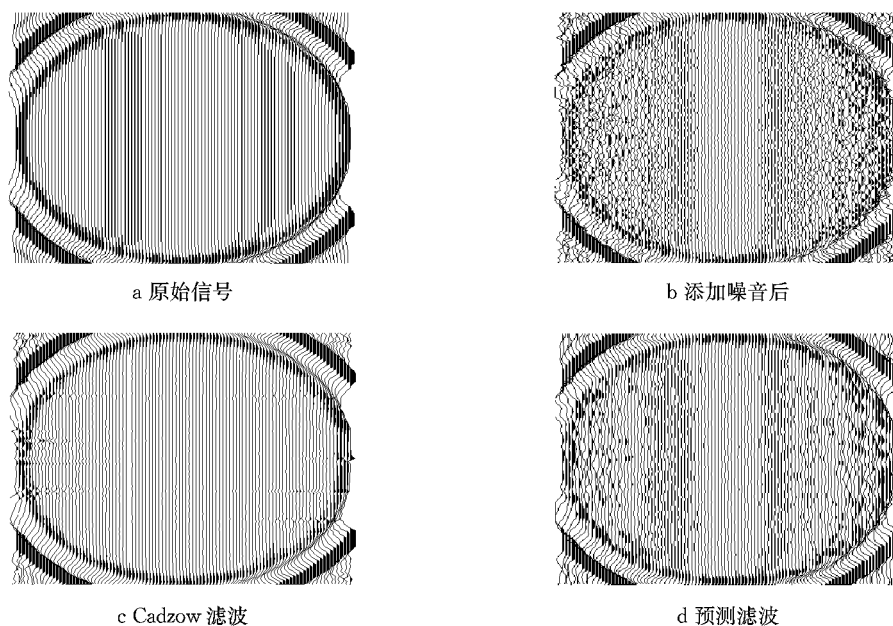


图 2 构造 3 维地震信号体切片

Fig.2 Inline section through a noisy artificial 3-D volume.

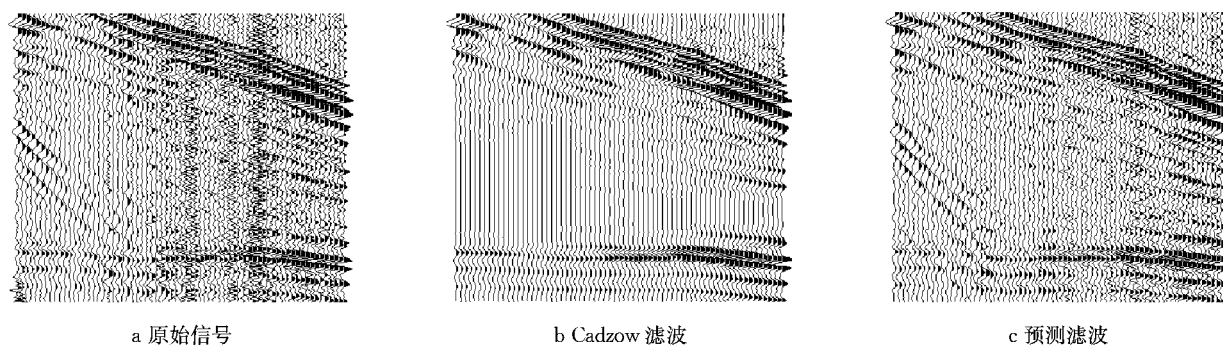


图 3 真实测量得到的 2 维信号

Fig.3 A real 2-D seismic signal

SVD 分解算法改进了去噪效率,并且滤波效果很好,比经典的 f - xy 预测滤波法更有优势。

5 结论

本文基于 Cadzow 滤波方法构造的 BHHB 矩阵的结构特点,提出了快速稳定的对 BHHB 矩阵进行 SVD 分解的方法,解决了随着矩阵规模扩大计算代价非常昂贵的难题。该方法分为两个阶段:二对角化和对角化。第一阶段进行 Lanczos 分解,将 BHHB 矩阵二对角化,若是对称 BHHB 矩阵,则进行三对角化来保持对称性;然后利用 Twisted 分解方法对实二对角方阵(或对称三对角矩阵)进行 SVD 分解,此快速 SVD 算法的优势在于,提出了新的 BHHB 矩阵与向量的快速乘法,以 1 维 FFT 代替多维 FFT,加快计算速度的同时减少了存储量;第二阶段

Twisted 分解采用局部 SVD 而不是整体 SVD,从而节约了计算时间。

数值试验结果表明,快速 SVD 算法大大提高了计算效率,减少了存储空间;地震信号的实验结果说明,Cadzow 滤波方法比目前常用的 f - xy 预测滤波技术效果更好,结合本文提出的快速 SVD 算法之后,能够快速有效去除信号中的噪声。因此,块 Hankel 矩阵的快速 SVD 分解算法,在地震信号处理和其他涉及块 Hankel 矩阵的实际应用中,尤其是解决大规模问题方面,有很好的发展前景。

参考文献:

- [1] 崔树果,朱凌燕,王建华. f - x 域 Cadzow 技术分块压制随机噪声及其应用[J]. 石油物探, 2012, 51(1):43.
CUI Shuguo, ZHU Lingyan, WANG Jianhua. Block f - x Cadzow filtering in random noise suppression and its application[J].

- Geophysical Prospecting for Petroleum, 2012, 51(1):43.
- [2] Canales L L. Random noise reduction [C]// 54th Annual International Meeting. Atlanta: SEG, 1984:525-572.
- [3] 张军华, 吕宁, 田连玉, 等. 地震资料去噪方法综合评述[J]. 石油地球物理勘探, 2005, 40(增刊): 121.
ZHANG Junhua, LÜ Ning, TIAN Lianyu, et al. Comprehensive review of seismic data denoising [J]. Oil Geophysical Prospecting, 2005, 40(Supplement): 121.
- [4] Cadzow J A. Signal enhancement—a composite property mapping algorithm [J]. IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing, 1988, 36(1): 49.
- [5] 彭更新, 邓晓东, 菊益志, 等. f - x 域 Cadzow 滤波随机噪声衰减及其局限性分析[J]. 石油天然气学报, 2013, 35(1):63.
PENG Gengxin, DENG Xiaodong, JU Yizhi, et al. f - x Cadzow filtering on random noise and its limitation [J]. Journal of Oil and Gas Technology, 2013, 35(1):63.
- [6] Trickett R S. f - x eigen noise suppression [C]// CSEG Geophysics. Calgary: CSEG, 2002: 1-3.
- [7] Oropeza V E, Sacchi M D. Multifrequency singular spectrum analysis [C]// Expanded Abstracts of 79th SEG Annual Meeting and International Exposition. Houston: SEG, 2009: 3193-3197.
- [8] Sacchi M D. f - x singular spectrum analysis [C] // CSPG CSEG CWLS Convention. Calgary: CSEG, 2009: 392-395.
- [9] Yuan S Y, Wang S X. A local f - x Cadzow method for noise reduction of seismic data obtained in complex formations [J]. Petroleum Science, 2011, 8(3): 269.
- [10] 冯兴强, 杨长春, 龙志伟. 基于奇异值分解的 f - x - y 域滤波方法 [J]. 物探与化探, 2005, 29(2): 171.
FENG Xingqiang, YANG Changchun, LONG Zhiyi. The filtering method in f - x - y domain based on singular value decomposition [J]. Geophysical and Geochemical Exploration, 2005, 29(2): 171.
- [11] Trickett R S, Burroughs L. Prestack rank-reduction-based noise suppression [J]. CSEG Recorder, 2009, 34: 3193.
- [12] Trickett R S. f - x - y Cadzow noise suppression [C]// CSPG CSEG CWLS Convention. Calgary: CSEG, 2008: 303-306.
- [13] Falkovskiy A, Floreani E, Schlosser G. FX Cadzow / SSA random noise filter: frequency extension [C] // CSPG CSEG CWLS Convention. Calgary: CSEG, 2011: 1-8.
- [14] 张磊, 彭伟才, 原春晖, 等. 奇异值分解降噪的改进方法 [J]. 中国舰船研究, 2012, 7(5): 83.
ZHANG Lei, PENG Weicai, YUAN Chunhui, et al. An improved method for noise reduction based on singular value decomposition [J]. Chinese Journal of Ship Research, 2012, 7(5): 83.
- [15] Browne K, Qiao S Z, Wei Y M. A Lanczos bidiagonalization algorithm for Hankel matrices [J]. Linear Algebra and Its Applications, 2009, 430: 1531.
- [16] Xu W, Qiao S Z. A fast SVD algorithm for square Hankel matrices [J]. Linear Algebra and Its Applications, 2008, 428: 550.
- [17] Xu W, Qiao S Z. A twisted factorization method for symmetric SVD of a complex symmetric tridiagonal matrix [J]. Numerical Linear Algebra with Application, 2009, 16: 801.
- [18] Qiao S Z, Liu G H, Xu W. Block Lanczos tridiagonalization of complex symmetric matrices [C]// Advanced Signal Processing Algorithms, Architectures, and Implementations XV. [S. L.]: SPIE, 2005: 1-11.
- [19] Xu W, Qiao S Z. A divide-and-conquer method for takagi factorization [J]. SIAM Matrix Analysis and Application, 2008, 30: 142.
- [20] Jin X Q. Preconditioning techniques for Toeplitz systems [M]. Beijing: Higher Education Press, 2010.
- [21] 苑益军, 周芝旭, 牛滨华, 等. 浅谈地震资料处理中的提高信噪比处理技术 [J]. 石油地球物理勘探, 2005, 40(2): 168.
YUAN Yijun, ZHOU Zhixu, NIU Binhua, et al. The technology to improve SNR in the seismic data processing [J]. Oil Geophysical Prospecting, 2005, 40(2): 168.
- [22] 张恒超. 叠前多域去噪技术应用开发研究 [D]. 北京: 中国地质大学, 2006.
ZHANG Hengchao. Prestack noise suppression in multi-domain and its application [D]. Beijing: China University of Geosciences, 2006.
- [23] 刘志鹏, 赵伟, 陈小宏, 等. 局部频率域 SVD 压制随机噪声方法 [J]. 石油地球物理勘探, 2012, 47(2): 202.
LIU Zhipeng, ZHAO Wei, CHEN Xiaohong, et al. A local SVD method to suppress random noise in frequency domain [J]. Oil Geophysical Prospecting, 2012, 47(2): 202.