

两尺度有限元粘塑性颗粒组合体压实模拟

吴宇清, 蔡云竹

(同济大学 建筑工程系, 上海 200092)

摘要: 采用一种基于均质化理论的两尺度有限元新方法, 模拟粘塑性颗粒组合体的压实全过程, 即在细尺度下, 通过跟踪颗粒基本单元体(代表体元)的细尺度行为, 来生成和更新颗粒组合体的粗尺度本构关系, 求得颗粒运动和变形的数学表达式, 并考虑了刚体运动与可变形微粒形变之间的耦合, 基于此关系式, 建立细尺度有限元模型, 用以模拟分析颗粒介质在受压过程中的粘塑性细尺度结构行为; 在粗尺度下, 将颗粒组合体视为均质的连续体, 采用粗尺度有限元模型, 模拟颗粒组合体的受压过程, 数值分析结果与文献实验数据基本一致, 验证了该数值方法的准确性和有效性。

关键词: 均质化; 两尺度; 代表体元; 压实; 颗粒组合体; 有限单元法

中图分类号: TB125

文献标志码: A

Homogenization-based Two-scale Finite Element Simulation for Compactions of Visco-plastic Granular Assemblies

WU Yuching, CAI Yunzhu

(Department of Building Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, China)

Abstract: A homogenization-based two-scale finite element method is developed to simulate compactions of visco-plastic granular assemblies. The new method is used to develop macro constitutive relationships in light of microscopic behavior. At the microscopic level, governing equations for the motion and deformation of particles, including coupling of rigid body motion and deformation of deformable bodies, are investigated. And an implicit fine-scale finite element model for granular media is developed to perform visco-plastic analysis for the assemblies. At the global scale level, the homogenized standard continuum is analyzed using a coarse-scale finite element model. To verify the accuracy and efficiency of the numerical method, a numerical example is simulated, and the results are in satisfactory agreement with

the experimental results in the literature. This method can be used in a variety of problems that can be represented using granular media, such as asphalt, polymers, aluminum, snow, and food products.

Key words: homogenization; two-scale; representative volume element; compaction; granular assembly; finite element method

关于颗粒在受压过程中的细尺度行为, 有学者从实验和理论的角度对其进行了研究^[1-2]. 随着多尺度理论的发展, 一些热心颗粒材料的学者试图将多尺度方法应用到对离散颗粒介质的分析中来. 如何建立两种尺度下物理参数的关系并依据颗粒基本单元(代表体元)的细尺度行为来生成和更新颗粒组合体的粗尺度本构关系, 从而导出粗尺度与细尺度的关系是多尺度方法应用于离散介质的关键. 因此有学者致力于细尺度与粗尺度之间关系的研究^[3]. 近来, 有学者提出了一种两尺度数值方法, 该方法将离散元法和有限元法结合起来用以模拟刚性颗粒的受压^[4-5].

本文提出的基于均质化理论的两尺度双有限元模型用于模拟粘塑性颗粒材料的压实. 在细尺度下, 通过细尺度有限元模型来模拟二维颗粒的响应; 在粗尺度下, 认为颗粒组合体是粘性的均质体并通过粗尺度有限元模型来模拟; 通过计算均质化方法来建立两种尺度间的联系. 该方法从颗粒组合体中随机选取一个基本单元作为代表体元, 给定代表体元边界条件并等效为颗粒组合体的边界条件. 通过模拟细尺度下代表体元的受压特性导出粗尺度本构模型, 再用于粗尺度有限元压实模拟. 该方法可广泛应用于对颗粒介质相关问题的研究.

本文提出的两尺度有限元方法旨在用于模拟颗

收稿日期: 2013-11-26

基金项目: 国家自然科学基金(10972162)

第一作者: 吴宇清(1969—), 男, 工学博士, 副教授, 主要研究方向为计算固体力学. E-mail: ycwu@tongji.edu.cn

通讯作者: 蔡云竹(1989—), 女, 工学硕士, 主要研究方向为计算固体力学. E-mail: caixinzi89@aliyun.com

粒组合体的压实. 该方法的关键在于两尺度概念以及如何在两尺度下实现有限元模拟. 此节将详细介绍有关颗粒介质的两尺度模型. 颗粒组合体被划分为两种尺度, 细尺度和粗尺度. 细尺度下, 单元是由不规则的固体微粒组成且由此组成的细尺度结构单元被称为代表体元. 通过数码成像, 随机从颗粒组合体中选取一个子单元作为代表体元. 接着, 跟踪描绘出代表体元内部微粒的几何和分布特征, 用于细尺度有限元模拟. 依据均质化理论, 认为粗尺度下的颗粒组合体是代表体元在二维空间的周期排列. 但是在粗尺度有限元模拟时, 颗粒介质被视为连续体. 为了实现对颗粒组合体压实过程的两尺度数值模拟, 必须从数值模型的角度构建粗尺度和细尺度之间的联系. 而这一联系的关键在于粗尺度本构关系的导出. 将该数值模型命名为代表体积单元法 (representative volume element method, RVEM). 该数值模型在两个尺度下均采用有限元方法. 从细尺度结构到粗尺度的转化是通过对粗尺度本构的等效计算实现的.

1 两尺度方程

1.1 细尺度数值模型

细尺度下的微粒被认为是不可压缩的; 考虑材料的粘性且控制方程满足线性动量守恒定理. 以此为前提, 本节导出了关于细尺度结构的有限元数值模型和模拟压实的迭代形式. 依据控制方程和应力边界条件, 可以得到满足边界条件的欧拉方程. 此时, 速度场由可压缩场和不可压缩场组成. 此处将平均应力的负值作为拉格朗日乘子, 因此 p 是拉格朗日乘子, 其物理意义为平均压应力且在方程中为独立参量.

ϕ 关于位移 u 的变分有:

$$\delta\phi = \int_V \delta\epsilon_{ij} 2G\epsilon_{ij} dV - \int_V \delta\epsilon_{ii} p dV - \int_{S_\sigma} \delta u_i \bar{l}_i dS - \int_V \delta u_i \rho X_i dV = 0 \quad (1)$$

式中: ϵ_{ii} 为应变张量; G 为剪切弹性模量; \bar{l}_i 为面牵引力; ρ 为密度; X_i 为体积力.

ϕ 关于 p 的变分有:

$$\delta\phi = - \int_V \delta p \cdot \epsilon_{ii} dV = 0 \quad (2)$$

引入有限单元形函数, 得到单元虚功方程的矩阵形式, 将单元矩阵合成总体矩阵得到细尺度有限元模型, 之后该模型以迭代法进行求解.

1.2 粗尺度数值模型

在粗尺度构建数值模型时, 颗粒组合体被认为是可压缩的粘性连续体. 因此, 其本构关系有别于细尺度. 构建该模型的关键在于如何获取未知的粗尺度粘性模量. 此处, 认为代表体元的粗尺度模量矩阵可以等效为粗尺度连续体的粘性模量矩阵. 代表体元的等效粗尺度应变率张量 \mathbf{E} 定义如下:

$$E_{ij}(u) = \frac{1}{2Y} \int_{\Gamma_e} (u_i n_j + u_j n_i) d\Gamma \quad (3)$$

式中: Y 为代表体元的体积或面积; Γ_e 为代表体元的外边界; u 为代表体元的细尺度速度; n_i 为单位法向量. 式(3)为代表体元的等效均质本构方程. 代表体元的粗尺度材性模量矩阵 $\bar{\mathbf{G}}$, 可通过式(4)计算获得.

$$\bar{G}_{ij} = \frac{\partial \Sigma_i}{\partial E_j} \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (4)$$

式中: Σ_i 为粗尺度应变能密度; E_j 为粗尺度应变. 对代表体元进行受压数值模拟可得到 $\bar{\mathbf{G}}$. 对其进行压实过程的数值模拟可以得到压实中每一步的 $\bar{\mathbf{G}}$. 由于假定颗粒组合体粗尺度连续体的粘性矩阵 \mathbf{D} 与代表体元粗尺度材性矩阵等效 $\bar{\mathbf{G}}$, 未知矩阵 \mathbf{D} 可以通过数值计算求得. 关于平面应力问题的变分矩阵形式的单元虚功方程如下:

$$\delta\Phi_e = \delta\mathbf{U}_e^T \bar{\mathbf{K}} \mathbf{U}_e - \delta\mathbf{U}_e^T \mathbf{F}_e = 0 \quad (5)$$

式中: $\delta\Phi_e$ 为单元虚功; \mathbf{U}_e 为结点位移向量; $\bar{\mathbf{K}}$ 为单元刚度矩阵; \mathbf{F}_e 为结点力向量. 将单元矩阵合成总体矩阵导出粗尺度下的有限元模型.

2 数值试验

在对颗粒组合体进行粗尺度压实模拟前, 先对细尺度结构单元 (代表体元) 进行压实数值模拟. 导出细尺度压实过程的相关数据, 用于粗尺度连续体的压实, 从而实现颗粒组合体的两尺度压实模拟.

2.1 细尺度压实试验

首先, 对代表体元进行垂直压实试验, 从而得到细尺度结构单元的压实曲线. 接着, 通过位移加载, 在每个压实步下对代表体元分别进行竖向压缩、侧向压缩和剪切实验, 以此得到每个加载步下代表体元的粗尺度材性模量矩阵.

2.1.1 代表体元的竖向压实试验

代表体元的逐步压实模拟借助自适应网格方法来实现^[6-7], 该加载和边界条件与粗尺度加载一致. 通过细尺度压实模拟, 可跟踪每一加载步下代表体元的几何特征并可得到完全压实所需的步数, 从而

获得代表体元的压实曲线. 在细尺度数值试验中, 需要得到三项数据或内容: 一是实现压实所需的加载步数; 二是跟踪每个加载步下代表体元内部微粒的分布和几何特征; 三是每一加载步时代代表体元的密度比值和竖向压力值.

2.1.2 代表体元的侧向压缩、竖向压缩和剪切试验

为了获取压实过程中每个加载步下代表体元的粗尺度材性模量矩阵, 对每个加载步下的代表体元进行侧向压缩、竖向压缩和剪切试验. 对于二维受力问题, 刚度矩阵 \bar{G} 为 3 行 3 列的方阵. 在侧向压缩试验中, 取代表体元的粗尺度应变率在水平 x 方向为单位值, 在其他方向则为 0 以此获得矩阵 \bar{G} 的第一列参数 \bar{G}_{11} ; 在竖向压缩试验中, 取其粗尺度应变率在垂直 y 方向为单位值, 其他方向为 0, 从而获得矩阵 \bar{G} 的第 2 列参数 \bar{G}_{22} ; 在剪切试验中, 取其粗尺度应变率在剪切方向为单位值, 其他方向为 0, 从而获得矩阵 \bar{G} 的第 3 列参数 \bar{G}_{33} . 在每个加载步下获得一组 \bar{G}_{11} 、 \bar{G}_{22} 、 \bar{G}_{33} 参数.

2.2 颗粒组合体的粗尺度压实试验

颗粒组合体在粗尺度水平被视为可压缩的粘性连续体, 但是其粘性模量在压实过程是不断变化的. 由于假定颗粒组合体粗尺度连续体的粘性模量矩阵同代表体元的粗尺度材性模量矩阵等效, 那么从细

尺度压实试验导出的每个加载步下关于 \bar{G} 的数据可作为压实过程中颗粒组合体粗尺度连续体的粘性模量. 在这里认为代表体元压实过程和颗粒组合体粗尺度压实过程是同步的. 如此一来, 颗粒材料粗尺度水平的压实模拟变得可行且简便. 依据细尺度压实试验导出的每个加载步下代表体元的粗尺度材性模量矩阵 \bar{G} , 持续更新压实过程中颗粒组合体的粗尺度粘性模量矩阵可最终实现颗粒组合体的粗尺度压实模拟.

3 数值结果

数值试验结果分为两个部分: ①是关于细尺度结构单元, 即代表体元; ②是关于颗粒组合体粗尺度连续体.

3.1 细尺度数值结果

3.1.1 代表体元的竖向压实曲线

通过自适应网格更新方法跟踪代表体元在压实过程中的几何特征、压力和密度比的变化. 通过有限元方法来实现代表体元的压实模拟. 数值结果表明到第 109 个加载步时, 代表体元基本完成压实 (图 1). 得到代表体元密度比和垂直压力的关系曲线 (图 2).

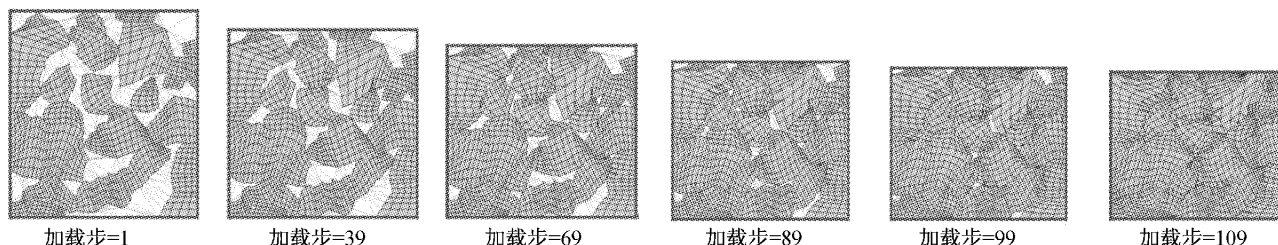


图 1 代表体元的竖向压实模拟

Fig.1 Simulation for vertical compaction of the representative element

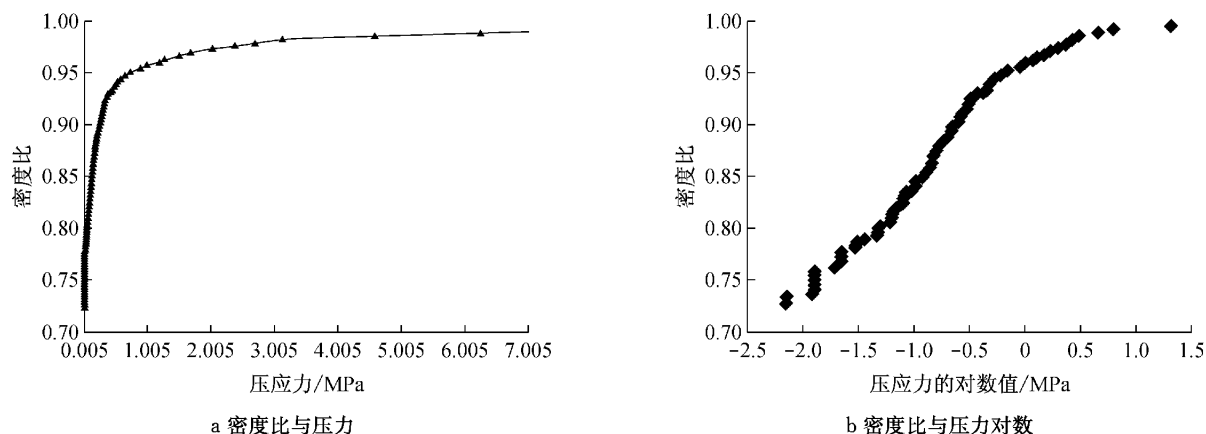


图 2 代表体元的压实曲线

Fig.2 Compaction curve of the representative elements

Cuitino 等^[1]以具有粘塑性的聚乙烯颗粒为实验对象,通过粉末压制技术对该颗粒材料进行压实试验所得出的压实曲线.比较可知:代表体元压实数值模拟所得的压实曲线与 Cuitino 等^[1]通过实验室实验所得的粘性颗粒材料压实曲线有相同的变化趋势;且 Cuitino 等^[1]所得压实曲线与代表体元压实曲线(图 2b)形状大小几乎一致.由此证实了代表体元压实数值模型的可行性以及相关有限元代码的可靠性和有效性.

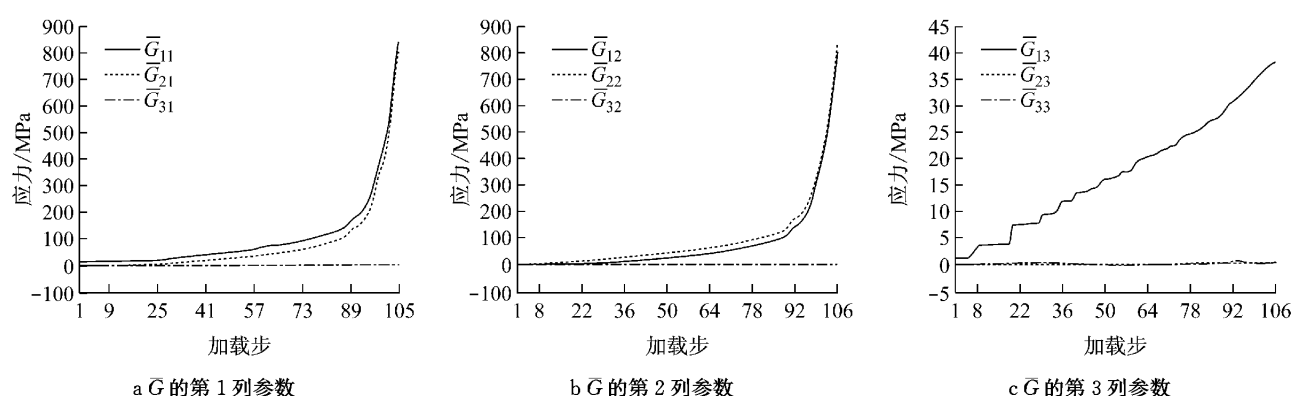


图 3 压实过程中矩阵 \bar{G} 内的参数变化

Fig.3 Parameter change of the matrix \bar{G} during compaction

在压实过程中,参数 \bar{G}_{11} 、 \bar{G}_{22} 、 \bar{G}_{21} (\bar{G}_{12}) 的变化趋势是相似的:加载初期缓慢增大,随着加载的进行,其增加幅度越来越大,这表明随着孔隙率的减小代表体元的平均刚度持续增大且增长率持续增高;相比于参数 \bar{G}_{11} 、 \bar{G}_{22} 、 \bar{G}_{21} (\bar{G}_{12}), \bar{G}_{33} 的变化是微小且缓慢的,其变化趋势也有别其他参数. \bar{G}_{33} 表示的是代表体元粗尺度剪切应变率与粗尺度剪应力间的关系.依据其变化趋势可知:随着加载的推进,代表体元的抗剪强度呈现阶段式跳跃增长,而这种阶段式跳跃的特性随着加载越来越弱.此外,相比于其他参数, \bar{G}_{13} (\bar{G}_{31}) 和 \bar{G}_{23} (\bar{G}_{32}) 的大小和变化是极为微小的.

3.2 粗尺度数值模拟结果

对颗粒组合体粗尺度连续体进行数值模拟时,随着加载的进行,持续更新每个加载步下的粘性模量矩阵 \bar{G} ,最终可获得粗尺度连续体在每个加载步下的位移和应力状况.图 4 所示的是压实过程中,颗粒组合体粗尺度的等效应力状况.

随着压实的推进,颗粒组合体区域内各点的粗尺度等效应力值的差异越来越小,到 109 个加载步

3.1.2 代表体元的粗尺度材性模量矩阵 (\bar{G})

通过侧向压缩、竖向压缩和剪切试验,可以得到每个加载步下代表体元的粗尺度粘性模量矩阵 \bar{G} .最终,可以得到完成压实的 109 个矩阵 \bar{G} .通过特定的代码可以导出关于 \bar{G} 的系列数据,再比较各加载步下 \bar{G} 内的参数,得到其在压实过程中的变化趋势和变化特性(图 3).同时,还可得知代表体元在压实过程中粗尺度应力 Σ_{ij} 和粗尺度应变率 E_{ij} 的关系.

时这种差异几乎消除.这表明从粗尺度上来看,颗粒组合体已基本实现压实.通过对颗粒材料的粗尺度压实模拟,可以得知非均质颗粒介质在压实过程中的整体位移变化以及总体应力状况,这对材料分析和工程研究是具有实际意义的.

4 结论

本文构建了一个新的两尺度双有限元模型,用以准确有效地模拟分析颗粒介质的压实.数值试验结果与实验室试验结果相吻合,以此验证了该模型的合理性.数值试验结果表明本文所搭建的两尺度关系具有一定的可靠性,并能有效反映颗粒材料的整体或局部特性.该研究成果推进了颗粒材料在数值方面的研究,为两尺度有限元模拟分析颗粒介质的进一步探讨和应用提供了参考.但是该模型在应用时仍具有一定的局限性以及模型建立中的相关假定会导致数值分析出现一定程度的误差,这都是待改善和发展之处.

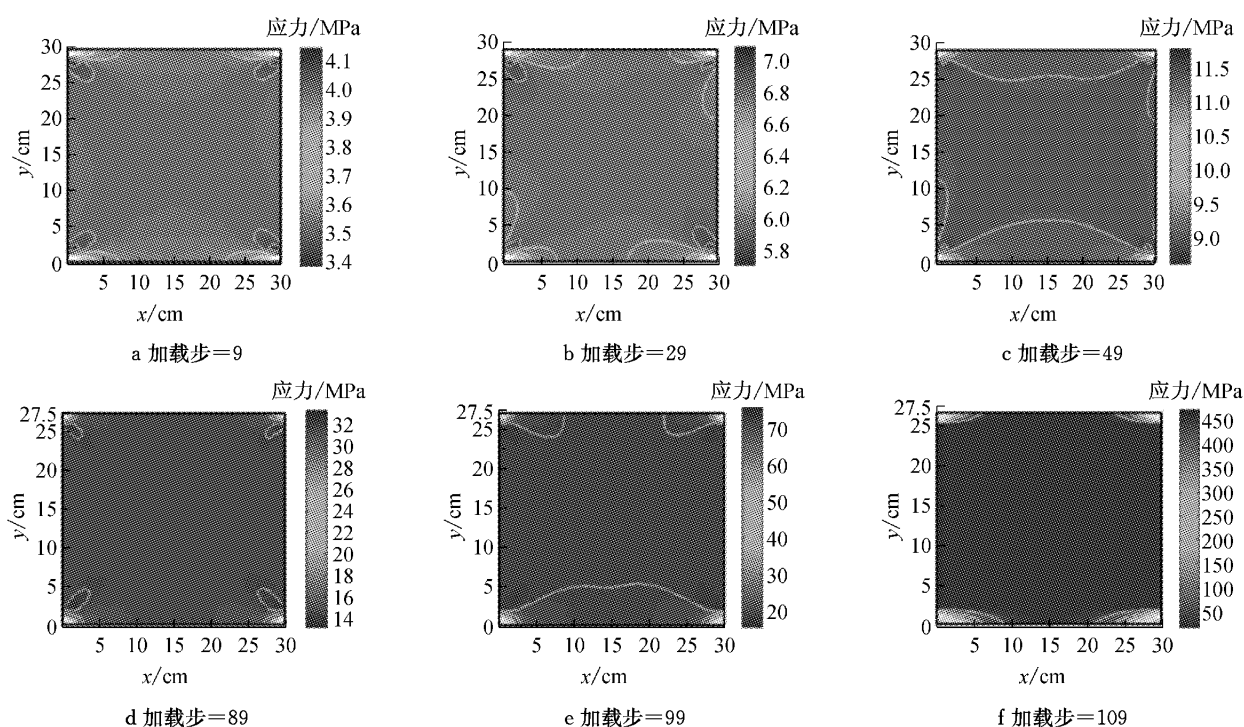


图 4 压实过程中颗粒组合体的粗尺度等效应力

Fig.4 Effective stress in coarse scale during compaction

参考文献:

- [1] Cuitino A M, Alvarez M C, Roddy M J, *et al.* Experimental characterization of the behavior of granular visco-plastic and visco-elastic solids during compaction[J]. *Journal of Material Science*, 2001, 36(22):5487.
- [2] Powers J M. Two-phase viscous modeling of compaction of granular materials[J]. *Physics of Fluids*, 2004, 16(8): 2975.
- [3] Li X, Yu H S, Li X S. Macro-micro relations in granular mechanics[J]. *International Journal of Solid and Structure*, 2009, 46(25/26): 4331.
- [4] Wu Y C. Automatic adaptive mesh upgrade schemes of the step-by-step incremental simulation for quasi linear viscoplastic granular materials[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2008, 197(17/18): 1479.
- [5] Miehe C, Dettmar J, Zah D. Homogenization and two-scale simulations of granular materials for different microstructural constraints[J]. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, 2010, 83(8/9): 1206.
- [6] Nitka M, Combe G, Dascalu C, *et al.* Two-scale modeling of granular materials: a DEM-FEM approach [J]. *Granular Material*, 2011, 13(3): 277.
- [7] Wu Y C, Xiao J Z, Zhu C M. The compaction of time-dependent viscous granular materials considering inertial forces[J]. *Acta Mechanica Sinica Sinica*, 2011, 24(6): 495.