

基于应变增量迭代的单桩分析方法

杨 军, 杨 敏

(同济大学 岩土及地下工程教育部重点实验室, 上海 200092)

摘要: 结合单桩荷载传递模型基本假定, 提出一种计算分层土中竖向受荷单桩桩身变形和内力的迭代算法. 该算法在假定桩顶沉降的前提下, 通过对桩身应变和桩周土弹簧反力积分, 求得桩身各部位的变形、内力及应变, 并以桩身应变增量收敛控制迭代过程, 进而得到桩身摩阻力和端阻力分布及相应的桩顶竖向荷载. 算例分析表明, 该算法对多种类型荷载传递函数具有良好的适应性, 计算值与实测值和其他方法的计算值具有较好的一致性.

关键词: 单桩; 应变增量; 荷载传递; 承载力; 沉降; 迭代算法

中图分类号: TU473.1⁺2

文献标志码: A

Single Pile Analysis Based on Strain Increment Iteration

YANG Jun, YANG Min

(Key Laboratory of Geotechnical and Underground Engineering of the Ministry of Education, Tongji University, Shanghai 200092, China)

Abstract: Combined with the basic assumption of load transferring method, an iterative algorithm was established for analyzing the deformation and axial force of pile shaft in layered soil. Given the settlement of pile top, the displacement, axial force and strain of pile shaft could be obtained through integrating the strain of pile shaft and the spring force of soil around pile. The procedure for iteration was dominated by the strain increment convergence of pile shaft. Then the pile side friction resistance, pile tip resistance and load on pile top were also obtained. A case study indicates that the proposed method has good adaptability with various load transferring functions and is generally in good agreement with the field-observed values and calculated results from other approaches.

Key words: single pile; strain increment; load transferring; bearing capacity; settlement; iteration algorithm

单桩竖向极限承载力和沉降量的确定是桩基础设计的重要内容. 目前, 计算单桩竖向承载力与沉降的方法主要包括弹性理论法^[1]、荷载传递法^[2]、剪切位移法^[3]、有限元法^[4]等. 其中, 荷载传递法因计算过程相对简便, 能较好地反映桩土间非线性关系和适应地层的复杂变化等优点, 更易于为工程界所接受.

传递函数确定和模型求解是决定荷载传递法能否成功应用的关键. 国内外学者围绕前者开展了丰富的研究工作, 提出了一系列实用性较强的荷载传递函数^[5-8], 如多折线函数、双曲线函数和指数函数等. 但是, 鲜有文献对模型求解方法进行探讨. 目前, 模型求解主要有解析法和数值法两种途径, 数值方法对桩身特性和地层变化具有更好的适应性, 并且能够方便地考虑土体非线性特性, 因而得到更为广泛的重视. 不同学者基于各种计算原理提出了相应的数值算法, 如位移协调法^[2,9]、矩阵位移法^[10]和能量法^[11-12].

位移协调法假定桩端产生某较小沉降量, 依次向上对桩身各单元荷载与位移进行传递, 以各单元位移增量收敛作为迭代的控制条件, 可得到桩顶荷载和相应沉降. 该方法既可以手算, 也可编制程序进行计算, 但桩身单元的位移迭代过程较为繁琐, 计算量较大. Kioussis 等^[9]对该方法进行改进, 将求解桩身各单元位移协调用桩身整体位移协调条件代替, 在划分较少单元数目的情况下仍能获得较为理想的计算精度, 但该方法仍采用自底向上的求解思路. 在求解桩身压缩性较大, 桩身下部桩土相对变形为零的长摩擦桩时, 需首先假定桩身某单元计算结点处产生某较小沉降, 从该位置开始沿桩身依次向上进行荷载位移传递, 经过多次试算才能得到桩顶荷载-位移关系曲线, 求解过程十分繁琐. 矩阵位移法实质

收稿日期: 2014-03-19

基金项目: 国家自然科学基金(41372274)

第一作者: 杨 军(1985—), 男, 博士生, 主要研究方向为桩基础. E-mail: yangjun851113@163.com

通讯作者: 杨 敏(1960—), 男, 教授, 博士生导师, 工学博士, 主要研究方向为桩基础和基坑工程. E-mail: yangmin@tongji.edu.cn

上是杆件系统的有限单元法,先假定桩身各结点初始刚度或初始位移,代入桩土体系所有结点力与位移的整体方程组进行位移迭代求解,直到计算的位移满足给定的收敛条件.但当桩顶荷载接近极限荷载时,桩土体系的静力平衡条件与位移协调条件不能满足,体系刚度矩阵接近奇异,迭代过程难以收敛,无法准确地计算极限荷载值及以后的桩身内力和变形.能量法基于最小势能原理,采用黄金分割、数学规划等算法进行迭代求解,由于算法本身的局限,当桩顶荷载接近极限或荷载-位移关系为软化型曲线时同样容易遇到计算难以收敛的问题.

本文尝试对位移协调法进行改进,通过采用一种自上而下的求解思路,即直接给定桩顶沉降,对所划分桩身各单元指定位置的应变和土弹簧反力进行积分,求得桩身不同位置的沉降量和桩身内力,以所有桩单元的应变增量收敛控制迭代计算过程,求得桩身各处的土弹簧反力,继而求得相应的桩顶竖向荷载.

1 算法假定和求解思路

本文算法对单桩荷载-传递模型进行求解,需要满足荷载传递法的若干基本假定,即将桩体视作由若干弹性单元组成,每个单元(包括桩端)与土之间均由非线性弹簧连接,这些非线性弹簧表示桩侧摩阻力 t (或桩端阻力 q)与位移 z 之间的关系,即图 1 所示的桩侧 $t-z$ 和桩端 $q-z$ 曲线,各弹簧之间荷载和变形互不影响.除此之外,本文还给出以下三点假定:

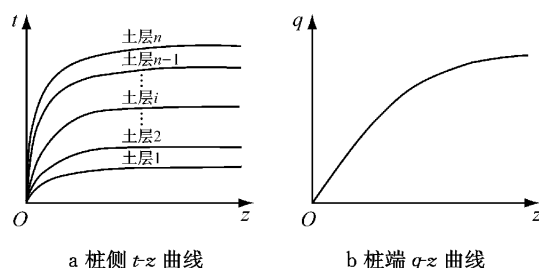


图 1 单桩荷载传递模型

Fig.1 Load transfer model of single pile

(1) 桩身材料始终处于线弹性状态,不发生塑性压缩变形.

(2) 划分的桩单元长度范围以内的土体侧摩阻力和桩端阻力为均匀分布,且单元平均侧摩阻力由该单元中心平面处的侧阻力表示.

(3) 桩身各单元的位移由该单元中心高度处的

位移表示,桩端位移与最底端桩单元中心高度处的位移近似相等.

本文求解桩顶荷载和桩身变形的分析步骤如下所示:

(1) 在已知桩侧 $t-z$ 曲线和桩端 $q-z$ 曲线及上述假定的前提下,对桩身进行计算单元剖分,各单元和计算结点的信息参见图 2. 如图 2 中所示,单桩被剖分为 n 个单元,桩身单元编号依此为 $1, 2, \dots, i, \dots, n$. 各桩单元的平均竖向位移和土体摩阻力计算结点均位于单元中心高度处.

(2) 给定桩顶沉降 w_{top} , 首先假定桩身各单元的初始应变向量 $\epsilon_0 = (\epsilon_0(1), \epsilon_0(2), \dots, \epsilon_0(n))^T$. 根据笔者的经验,为降低迭代求解的次数,使计算结果能够较快收敛到精确解附近,初次计算时桩身初始应变假定值不应太大,多数情况下建议取值不超过 10^{-6} .

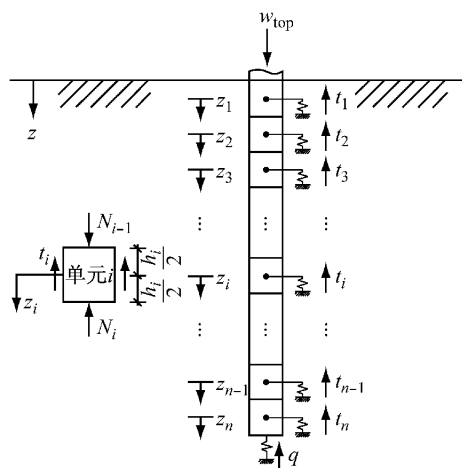


图 2 桩身单元离散示意图

Fig.2 Scheme of pile shaft discretization

(3) 采用各单元的初始应变 $\epsilon_0(z)$ 和桩顶沉降 w_{top} , 按下式计算各桩单元初始沉降量:

$$w_i = w_{\text{top}} - \int_0^{z_i} \epsilon_0(z) dz, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1)$$

式中: z_i 为桩顶至第 i 个单元中心位置的距离.

求得各桩身单元沉降共同组成桩身位移列向量 $w_0 = (w_0(1), w_0(2), \dots, w_0(n))^T$.

本文假定各桩身单元的位移与该单元中心高度处的位移相等,桩身位移向量中的各位移分量可由下式计算得到:

$$\begin{cases} w_0(1) = w_{\text{top}} - 0.5\epsilon_0(1)h_1, & i = 1 \\ w_0(i) = w_{\text{top}} - \sum_{j=1}^{i-1} \epsilon_0(j)h_j - 0.5\epsilon_0(i)h_i, & i = 2, \dots, n \end{cases} \quad (2)$$

式中: h_j 为第 j 个桩单元的长度。

若按上述计算求得的第 k 个桩单元沉降小于零,表明桩顶荷载与第 1 至第 $(k-1)$ 个单元的摩阻力之和基本满足静力平衡条件,桩单元 k 及以下各单元不再参与荷载位移传递,此时第 k 至第 n 个桩身单元的竖向位移很小,可令这些单元的竖向位移为零。

(4)由上述桩身单元的计算位移和单元中心处的地基土 $t-z$ 曲线获得桩周土发挥的侧摩阻力 t ,桩端阻力 q 可由靠近端部的桩身单元 n 的竖向位移 w_0 (n)和桩端地基土的 $q-z$ 曲线求得。

以所有桩身单元的侧摩阻力 t 和桩端阻力 q 计算桩顶荷载

$$Q_{\text{top}} = \int_0^L U(z)t(z)dz + q \frac{\pi d^2}{4} \quad (3)$$

式中: L 为桩长; $U(z)$ 为深度 z 处的桩截面周长; d 为桩身直径,对于桩端扩底的情况,取扩底端直径。

如桩径保持不变,式(3)可继续简化为

$$Q_{\text{top}} = U \sum_{j=1}^n t(j)h(j) + q \frac{\pi d^2}{4} \quad (4)$$

(5)桩身各单元底端平面处的轴力 N_i 可由下式进行计算:

$$N_i = Q_{\text{top}} - \int_0^{z_i} U(z)t(z)dz, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (5)$$

同理可简化为

$$N(i) = Q_{\text{top}} - U \sum_{j=1}^i t(j)h(j), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (6)$$

(6)对各桩单元上端平面和下端平面处的轴力取平均值用以计算单元平均应变 $\epsilon(i)$,如下所示:

$$\begin{cases} \epsilon(1) = \frac{N(1) + Q_{\text{top}}}{2EA}, & i = 1 \\ \epsilon(i) = \frac{N(i-1) + N(i)}{2EA}, & i = 2, \dots, n \end{cases} \quad (7)$$

式中: E 为桩身弹性模量; A 为桩的有效截面积。

上述求得各桩单元应变分量组成桩身应变列向量 $\boldsymbol{\epsilon} = (\epsilon(1), \epsilon(2), \dots, \epsilon(n-1), \epsilon(n))^T$ 。

将桩身应变向量 $\boldsymbol{\epsilon}$ 与初始假定的 $\boldsymbol{\epsilon}_0$ 进行比较,基于欧式范数的收敛判别思路计算应变向量的增量 $\Delta\boldsymbol{\epsilon} = \|\boldsymbol{\epsilon} - \boldsymbol{\epsilon}_0\|_2$ 。若 $\Delta\boldsymbol{\epsilon}$ 超过指定的容许误差 $[\Delta\epsilon]$ (如 10^{-8}),令 $\boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{\epsilon}_0$,重新计算桩身各单元的竖向位移、地基土反力和桩身内力,进而求得各单元的桩身应变,重复步骤(3)~(6),直至应变向量的增量小于给定的容许误差,从而满足精度要求的桩身内力和竖向位移得以确定。

按照上述求解思路,已知桩顶沉降可求得相应的桩顶荷载和桩身内力,进而得到完整的桩顶荷载-位移曲线及各级荷载作用下的桩身轴力分布曲线。

2 计算程序实现

根据上述计算原理编制了可用于单桩竖向承载特性分析的相关程序,计算程序的分析流程可参见图 3。

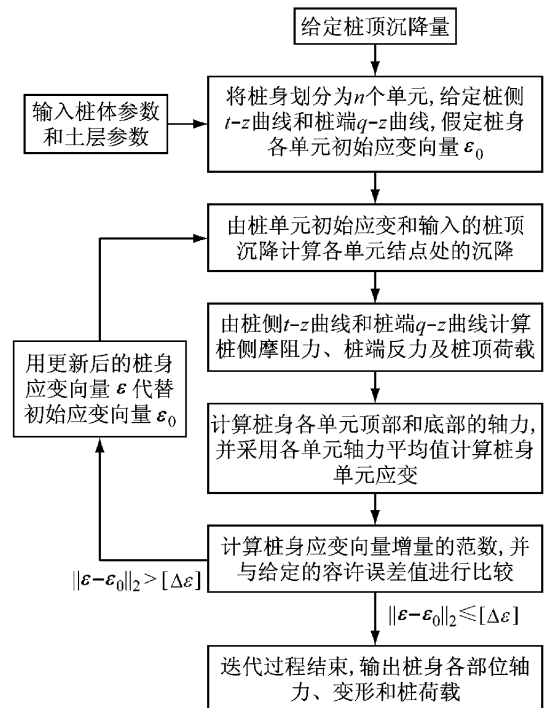


图3 算法计算流程示意图

Fig.3 Scheme of algorithm calculation process

不难看出,本文方法与位移协调法^[2,9]的不同之处在于采用了自顶向下的求解思路,先以假定的桩身应变求解桩身变形和轴力,再以计算结果重新修正桩身变形,直至各单元应变增量的范数满足给定的收敛条件。这种求解过程有效避免了矩阵位移法在桩顶荷载接近极限荷载时刚度矩阵容易出现奇异,从而导致算法难以收敛的问题,并且本文算法无需对桩底沉降进行假定,特别适用于在桩顶作用荷载不大时,桩端地基反力和桩身下部桩土相对变形为零的摩擦长桩分析。

需要说明的是,本文方法既可按场地分层情况进行桩身单元的划分,也可进行均匀划分,出于计算精度的考虑,建议划分的桩身单元数目不应太少,以降低桩单元荷载与位移假定对计算结果的影响。将天然地基的分层界面作为相邻单元划分的界面,以

保证各土层的荷载传递函数均能有效参与求解过程,降低因桩单元的长度较某一土层的厚度过大而引起的误差。

3 工程实例验证

采用以下三个现场试桩资料验证本文方法的合理性,并将计算结果与实测值和其他方法进行对比,本文算法的迭代容差均取 1.0×10^{-10} 。

3.1 案例1

文献[13]提供了某桥梁三根大直径灌注桩的现场勘察和试验资料,选取其中的试桩2进行分析。该试桩桩径为2.0 m,入土深度为40.0 m,桩身弹性模量取38 GPa。该场地土层性质较好,基桩埋置深度范围内主要为砂性土。按本文方法将桩身均匀剖分为20个单元,采用文献[13]建议的双曲线函数模拟桩土界面特性,桩侧与桩端的荷载-位移关系曲线见图4,模型参数确定参考文献[14]建议的方法。现场揭露的土层分布和计算采用的部分模型参数见表1,图4中 $z_{\text{ref},f}$ 和 $z_{\text{ref},e}$ 分别表示桩侧和桩端的参考位移。

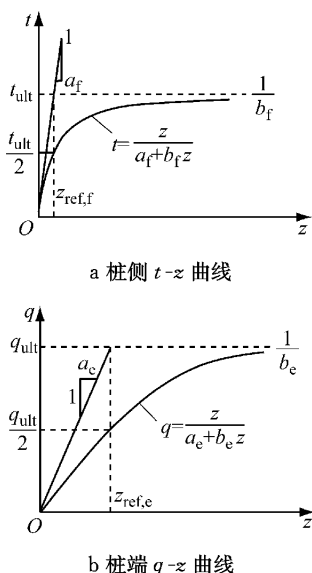


图4 双曲线应力-位移关系曲线

Fig.4 Hyperbolic stress-displacement curves

文献[13, 15-16]分别采用有限差分方法、非线性有限元法和经验分析法对该试桩的竖向承载特性进行分析。图5和6分别给出按不同方法计算的桩顶荷载-位移($Q-s$)曲线和桩身轴力分布曲线。

由图5可以看出,本文计算结果与实测值具有较好的一致性。当采用相同的传递函数时,即使计算原理不同,各种方法的计算值仍比较接近。文献[15]

采用有限元法建立桩土体系模型进行分析,由于考虑桩身混凝土受压破坏后的桩身抗压刚度发生退化,因此计算结果与其余方法差异显著,曲线表现出了较为明显的陡降特征。从图6能够看出,桩顶施加40 MN的竖向荷载时,各种方法的计算结果相差不大,本文计算结果基本能够反映桩身实际的荷载分布情况。

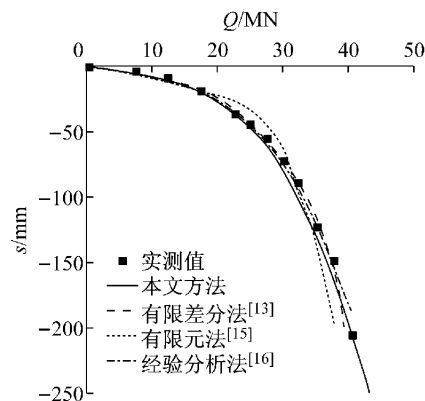


图5 案例1桩顶 $Q-s$ 曲线

Fig.5 $Q-s$ curves of pile top (Case 1)

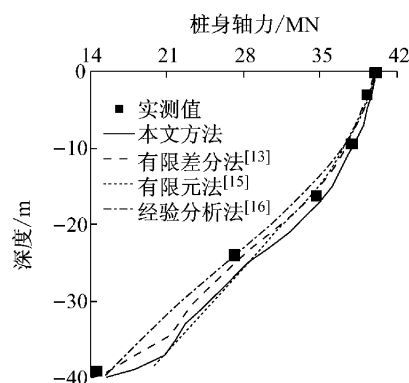


图6 案例1桩身轴力分布

Fig.6 Distribution of pile axial force (Case 1)

3.2 案例2

文献[17]提供了某大直径扩底灌注桩现场试桩资料,该试桩桩长13.35 m,桩径1.0 m,桩端有扩大头,扩大头直径1.8 m,高度1.7 m,桩身弹性模量32 GPa。桩周土层自上而下依次为填土、黏土、淤泥和砂质黏土(该层厚度较大,作为桩端持力层)。Liu等[17]基于传递矩阵方法,推导并得到了该试桩桩顶荷载-沉降关系的解析算式及相应各级荷载下的桩身内力。按照本文方法将桩身划分为10个单元,最底部2个单元的总长度为1.7 m,计算桩径取1.4 m,采用文献[17]建议的桩侧土三折线荷载传递软化和桩端土三折线全塑性荷载传递函数(见图7)建模,土层分布情况和模型相关参数见表2。由于地表

表 1 案例 1 土层分层与模型参数

Tab.1 Layering of soil and parameters of the model (Case 1)

土层类别	厚度/m	层顶标高/m	SPT-N 值	t_{ult}/kPa	q_{ult}/MPa	a_f	b_f	a_e	b_e
砂土	5.0	3.0	5	30		33.00×10^{-5}	0.033 3		
砂土	8.0	-2.0	10	60		17.00×10^{-5}	0.016 7		
砂土	4.0	-10.0	20	100		10.00×10^{-5}	0.010 0		
砂土	3.0	-14.0	30	120		8.30×10^{-5}	0.008 3		
砂土	3.0	-17.0	40	160		6.25×10^{-5}	0.006 3		
黏土	8.0	-20.0	20	120		8.33×10^{-5}	0.008 3		
黏土	4.0	-28.0	8	80		13.00×10^{-5}	0.012 5		
砂土	6.0	-32.0	30	225	18.0	4.44×10^{-5}	0.004 4	2.5×10^{-5}	5.0×10^{-5}

注: SPT-N 值为各土层的平均标贯值; t_{ult} , q_{ult} 分别为桩侧极限摩阻力和桩端极限阻力; a_f , b_f , a_e , b_e 分别为双曲线模型参数, 具体参见图 4a 和 4b.

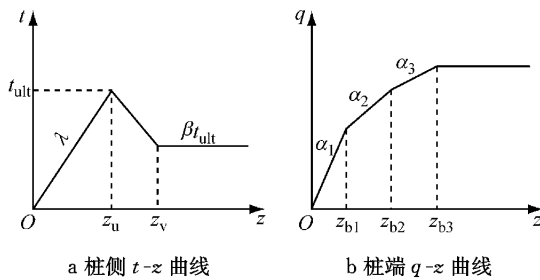


图 7 桩侧和桩端土体荷载-传递模型

Fig.7 Load-transfer models for pile side and tip soil

填土性质较为复杂, 未能得到可靠的土性参数, 因此不考虑该层土对桩基承载力的贡献. 将本文方法、传递矩阵法^[17]和位移协调法^[9]的计算结果进行比较, 如图 8 和 9 所示.

由图 8 能够看出, 本文方法和位移协调法的计算结果相当一致, 与传递矩阵法相比仅在加荷初期略有不同. 本文计算的桩顶荷载-位移($Q-s$)曲线在接近单桩极限荷载时出现较为明显的转折, 可能与多折线荷载-传递模型在临界位移点处土弹簧刚度存在突变有关. 该试桩未进行现场桩身应变测试, 没有可利用的实测数据与本文计算值进行对比, 只能将本文计算结果与其他两种方法进行比较. 由图 9 可知, 本文方法与位移协调法的计算结果基本一致, 但在桩顶荷载水平不大时与传递矩阵法的计算值略有差异. 桩身轴力分布规律基本能够反映桩侧软化型大直径扩底短桩的竖向承载特性.

3.3 案例 3

文献[18]提供了某桥梁试桩资料, 该试桩桩长 60.0 m, 桩径 1.0 m, 桩身弹性模量 34.7 GPa, 桩端持力土层为弱风化泥质砂岩. 按本文方法将桩身均匀划分为 60 个单元, 桩侧土荷载传递函数采用三折线模型, 场地土层分布及模型相关参数见表 3. 由相关资料可知, 该桩基为典型的超长摩擦桩, 试桩结果揭示桩身轴力最大传递深度约为 47 m, 以下土层(泥质砂岩)对试桩竖向承载力贡献极小, 因而在建

立桩身荷载传递模型时不计入弱风化泥质砂岩层的传递函数. 将本文方法、数学规划法^[12]的计算结果与现场实测数据进行对比, 如图 10 和 11 所示.

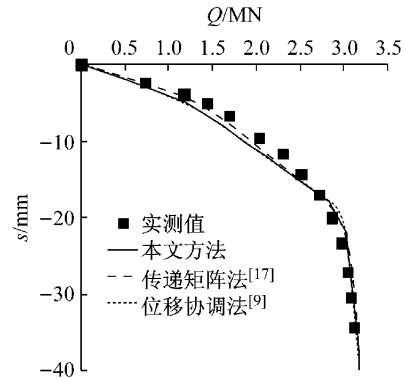


图 8 案例 2 桩顶 $Q-s$ 曲线

Fig.8 $Q-s$ curves of pile top (Case 2)

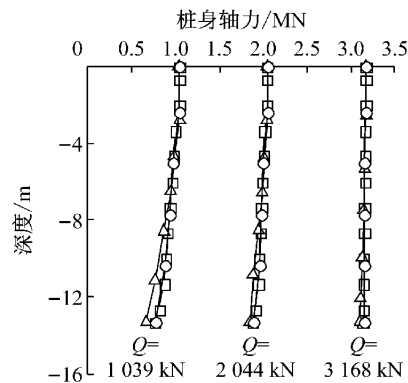


图 9 案例 2 桩身轴力分布

Fig.9 Distribution of pile axial force (Case 2)

由图 10 和 11 可以看出, 按本文方法得到的桩顶 $Q-s$ 曲线与实测数据较为接近, 但桩顶竖向刚度计算值略大于实测结果. 笔者推测可能因试桩在高荷载水平下桩身部分区域的混凝土发生塑性变形, 导致桩身竖向刚度发生退化, 本文假定桩身在受荷过程中始终处于弹性压缩状态, 因而计算沉降量偏

小于实测值. 桩顶作用竖向荷载分别为 5.5 MN, 11.0 MN和 15.0 MN 时,本文方法与数学规划法计算的桩身轴力基本一致,与实测数据差距也不大,基本反映出不同荷载水平下桩身轴力沿桩长的发展趋势,即随着桩顶荷载逐渐增大,桩身轴力沿桩身不断

向深部发展,桩身上部土体摩阻力发挥至极限后不再增长,更多的竖向荷载由桩身下部土体承担. 即便如此,在最大加载量超过 15.0 MN,桩顶沉降量接近 0.05D(D 为桩径)时,桩身荷载仍未传至桩底端平面,表现为较明显的摩擦桩竖向承载特征.

表 2 案例 2 土层分层与模型参数

Tab.2 Layering of soil and parameters of the model (Case 2)

土层类别	厚度/ m	$\lambda_1/$ ($\text{kN} \cdot \text{m}^{-2}$)	β	$z_u/$ mm	$z_v/$ mm	$\alpha_1/$ ($\text{kN} \cdot \text{m}^{-1}$)	$\alpha_2/$ ($\text{kN} \cdot \text{m}^{-1}$)	$\alpha_3/$ ($\text{kN} \cdot \text{m}^{-1}$)	$z_{b1}/$ mm	$z_{b2}/$ mm	$z_{b3}/$ mm
填土	2.8										
黏土	1.7	10.0×10^3	0.2	3.5	20.0						
淤泥	7.0	5.7×10^3	0.1	3.0	19.0						
砂质黏土	厚度较大	12.5×10^3	0	3.5	20.0	2.09×10^5	1.46×10^5	9.5×10^3	5.7	18.0	35.0

注: $\lambda, \beta, z_u, z_v, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, z_{b1}, z_{b2}, z_{b3}$ 的物理意义参见图 7a 和 7b.

表 3 案例 3 土层分层与模型参数

Tab.3 Layering of soil and parameters of the model (Case 3)

土层类别	厚度/m	$k_{s1}/(\text{kPa} \cdot \text{mm}^{-1})$	$k_{s2}/(\text{kPa} \cdot \text{mm}^{-1})$	s_1/mm	s_2/mm	t_{ult}/kPa
淤泥质黏土	12.5	45.59	10.71	0.51	2.23	41.67
黏土	9.1	163.05	9.02	0.51	4.12	115.71
细砂	11.6	14.64	7.71	4.71	8.30	96.63
砂砾石	2.9	13.56	10.52	9.11	12.08	154.77
砂卵石	5.0	16.93	13.91	11.28	13.11	216.42
细砂及泥质砂岩	6.2	10.59	9.70	13.10	16.13	168.12
泥质砂岩	12.7	0	0	0	0	0
泥质砂岩	桩底	0	0	0	0	0

注: k_{s1}, k_{s2} 为桩侧摩阻力刚度系数; s_1, s_2 为桩侧土弹性和塑性临界变形值.

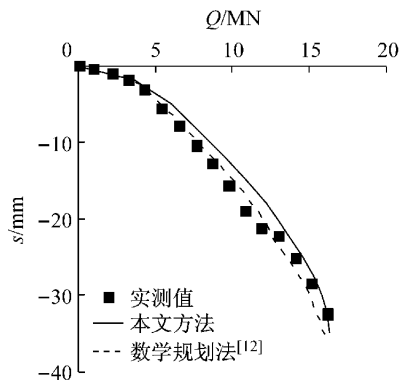


图 10 案例 3 桩顶 Q-s 曲线
Fig.10 Q-s curves of pile top (Case 3)

4 结论

(1)采用本文方法进行竖向受荷单桩承载特性分析是可行的. 该方法以桩单元的应变增量收敛作为迭代控制条件,自上而下对各桩身单元进行荷载和位移传递,得到满足静力平衡方程和桩身变形协调的桩身内力分布和桩顶荷载,进而获得完整的桩顶 Q-s 曲线. 桩身单元划分能够考虑土体非线性和分层特性及桩身截面特征变化,且在划分足够多的

单元时,计算假定引起的误差对结果影响很小.

(2)本文方法采用桩身变形计算桩身内力,再以内力修正变形的求解思路,对桩侧或桩端土为应变软化型荷载传递函数的情况同样适用,并且自上而下的求解过程可不受桩端位置桩土相对变形假定的限制,可对桩顶受较小荷载作用下的摩擦长桩进行分析,能够准确计算荷载极值点及其之后的桩土体系响应,从而有效克服传统位移协调法和矩阵位移法的不足.

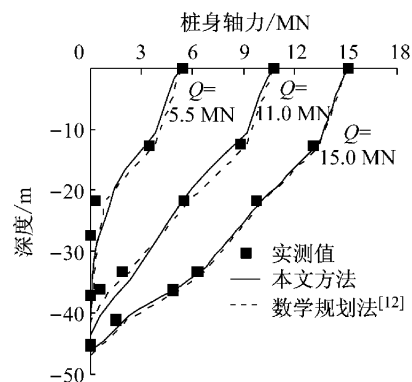


图 11 案例 3 桩身轴力分布
Fig.11 Distribution of pile axial force (Case 3)

(3)由案例分析可见,本文计算结果与现场实测

数据吻合较好。即使桩身离散方式、计算结点取值的假定不完全相同,在采用同样的桩土界面荷载-传递函数时,本文方法与其他算法的计算结果基本一致。模型预测精度主要取决于所采用的荷载传递函数在多大程度上能够反映真实的桩土界面特性,算法本身的计算误差远小于荷载传递模型选取和参数取值不当引起的误差。

参考文献:

- [1] Poulos H G, Davis E H. The settlement behaviour of single axially loaded incompressible piles and piers[J]. *Geotechnique*, 1968, 18(3): 351.
- [2] Coyle H M, Reese L C. Load transfer for axially loaded pile in clay[J]. *Journal of the Soil Mechanics and Foundations*, 1966, 92(SM2): 1.
- [3] Randolph M F, Wroth C P. Analysis of deformation of vertically loaded piles [J]. *Journal of the Geotechnical Engineering Division*, 1978, 104(12): 1465.
- [4] Desai C S. Numerical design-analysis of piles in sands[J]. *Journal of the Geotechnical Engineering Division*, 1974, 100(6): 613.
- [5] Kraft L M, Kagawa T, Ray R P. Theoretical t - z curves[J]. *Journal of the Geotechnical Engineering Division*, 1981, 107(11): 1543.
- [6] 洪鑫,雷国辉,施建勇. 双线性荷载传递函数的单桩荷载沉降关系统一解[J]. *岩土工程学报*, 2004, 26(3): 428.
HONG Xin, LEI Guohui, SHI Jianyong. Unified load-settlement solution of single piles based on bilinear load transfer[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2004, 26(3): 428.
- [7] 陈仁朋,周万欢,曹卫平,等. 改进的桩土界面荷载传递双曲线模型及其在单桩负摩阻力时间效应研究中的应用[J]. *岩土工程学报*, 2007, 29(6): 824.
CHEN Renpeng, ZHOU Wanhuan, CAO Weiping, *et al.* An improved load-transfer hyperbolic model for the pile-soil interface and its application to the study of negative friction of single piles considering time effect[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2007, 29(6): 824.
- [8] 张乾青,李术才,李利平,等. 考虑侧阻软化和端阻硬化的群桩沉降简化算法[J]. *岩石力学与工程学报*, 2013, 32(3): 615.
ZHANG Qianqing, LI Shucai, LI Liping, *et al.* Simplified method for settlement prediction of pile groups considering skin friction softening and end resistance hardening [J]. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*, 2013, 32(3): 615.
- [9] Kioussis P D, Elansary A S. Load settlement relation for axially loaded piles[J]. *Journal of Geotechnical Engineering*, 1987, 113(6): 655.
- [10] 朱百里,沈珠江. 计算土力学[M]. 上海:上海科学技术出版社, 1990.
ZHU Baili, SHEN Zhujiang. *Computational soil mechanics*[M]. Shanghai: Shanghai Scientific and Technical Publishers, 1990.
- [11] 魏刚. 基于能量法差分方程的基桩承载力数值计算方法[J]. *公路工程*, 2011, 35(6): 1.
WEI Gang. Pile bearing capacity numerical calculation method based on energy difference equation [J]. *Highway Engineering*, 2011, 35(6): 1.
- [12] 刘红军,上官士青,朴春德,等. 基于数学规划算法的单桩沉降计算分析研究[J]. *岩土工程学报*, 2012, 34(5): 868.
LIU Hongjun, SHANGGUAN Shiqing, PIAO Chunde, *et al.* Calculation and analysis of single pile settlement based on mathematical programming algorithm[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2012, 34(5): 868.
- [13] Hirayama H. Load-settlement analysis for bored piles using hyperbolic transfer functions[J]. *Soils and Foundations*, 1990, 30(1): 55.
- [14] Reese L C. Design and construction of drilled shafts [J]. *Journal of the Geotechnical Engineering Division*, 1978, 104(1): 91.
- [15] Lin S S. Use of filamented beam elements for bored pile analysis[J]. *Journal of Structural Engineering*, 1997, 123(9): 1236.
- [16] Omer J R, Delpak R, Robinson R B. An empirical method for analysis of load transfer and settlement of single piles[J]. *Geotechnical and Geological Engineering*, 2010, 28(4): 483.
- [17] Liu J, Xiao H B, Tang J, *et al.* Analysis of load-transfer of single pile in layered soil[J]. *Computers and Geotechnics*, 2004, 31(2): 127.
- [18] 刘齐建. 大直径桥梁基桩竖向承载力分析及试验研究[D]. 长沙: 湖南大学, 2002.
LIU Qijian. Analysis of axial load capacity and test research on large-diameter bridge pile[D]. Changsha: Hunan University, 2002.