

组合风险的重要性抽样方法

徐承龙^{1,2}, 吴倩¹, 孙丽华³

(1. 同济大学 数学系, 上海 200092;

2. 上海师范大学, 上海市科学计算 E-研究院及上海市科学计算重点实验室, 上海 200234;

3. 同济大学 经济与管理学院, 上海 200092)

摘要: 针对资产组合的市场风险或信用风险的任意边际分布的 Gaussian Copula 模型, 首先将损失转化成高维正态分布的函数, 然后对该模型进行重要性采样蒙特卡罗模拟以提高模拟效率, 并分别使用牛顿法和基于大偏差理论估计测度变换的系数, 并在此基础上提出了常数凝固估计法. 数值实验表明, 提出的算法与通常的蒙特卡罗方法相比, 大大减小了模拟误差, 从而提高了计算效率.

关键词: 重要性抽样; 蒙特卡罗模拟; 组合风险; Gaussian Copula 模型

中图分类号: F830.9, O242.1

文献标志码: A

Importance Sampling Method for Portfolio Risk

XU Chenglong^{1,2}, WU Qian¹, SUN Lihua³

(1. Department of Mathematics, Tongji University, Shanghai 200092, China; 2. Shanghai E-Institute of Scientific Computing and Shanghai Key Laboratory of Scientific Computing, Shanghai Normal University, Shanghai, 200234, China; 3. School of Economics and Management, Tongji University, Shanghai, 200092, China)

Abstract: Based on the Gaussian Copula model with arbitrary marginal distribution in portfolio's market risk or credit risk; To improve the efficiency in Monte Carlo simulation with importance sampling, we first transform loss to a function of a high-dimensional normal vector, then the Newton's method and a method based on the large deviation theory are used to estimate the coefficients in measure transformation, and the method of freezing coefficient is also proposed. Numerical experiments show that compared with standard Monte Carlo method, the algorithm proposed in the paper reduce simulation error greatly and therefore improve computational efficiency.

Key words: importance sampling; Monte Carlo simulation; portfolio risk; Gaussian Copula model

定量风险管理中的两个重要的度量工具是 VaR 和 CVaR^[1-4], VaR 是资产组合损失的分位数, CVaR 是资产组合损失超过某一临界值的条件期望. 无论是 VaR 还是 CVaR, 都与资产组合损失的分布有密切关系, 因而风险计算的核心是组合损失的分布. 文献[5]指出, 在信用风险中, 99.9% 的 VaR 水平已成为行业标准, 因而风险计算的关键是资产组合损失分布的尾部特征.

在计算组合损失的分布时, 由于各个资产之间的关联性, 资产组合损失通常情况下没有解析解, 常常需依赖蒙特卡罗模拟来实现. 蒙特卡罗模拟方法在风险管理中有广泛的应用, 但是它明显的缺点是收敛速度慢, 模拟误差大, 因而需要结合方差减小技术如控制变量方法或重要性抽样等方法. 方差减小用于定量风险管理时遇到的主要挑战有两个, 一是要准确估计大额损失的概率, 二是各个资产之间复杂的相关性使得方差减小技术更难适用.

本文关于组合风险的模型是具有任意边际损失分布的 Gaussian Copula 模型, 该模型首先在文献[6]中提出. 由于模型的一般性, 其适用范围广泛, 特殊情形即为常见的 Gaussian Copula 模型, 即边际分布均为表示违约与否的示性函数, 因而称本文的模型为推广的 Gaussian Copula 模型.

在估计损失大于某一临界值的概率时, 在 Gaussian Copula 模型下做重要性抽样时, 可以对高维独立的正态分布做平移, 最优平移参数的求解在最小化方差的意义下可转化成随机优化问题. 对随机因子的期望做平移可以产生更多的大损失样本, 从而使得更多样本落在关注的重点区域, 在此基础上乘以权重(或称为似然比)而使得方差大大减小. 针对 Gaussian Copula 模型, 已有的对随机因子的期

望做平移的重要性抽样方法的文献有很多,如文献[7-11].

针对本文研究的一般模型,即推广的 Gaussian Copula 模型,文献[6]提出了基于模拟的超平面分割的想法,在二元线性分类下得到近似的超平面将样本分成两类,从而得到重要性抽样的参数,即为该超平面的法向量乘以原点到该平面的距离.该方法有直观的几何解释,但是由于试图用超平面将性质模糊的样本分开,中间的近似处理太粗糙,因而其数值效果不好,方差减小倍数仅达到 2~3 倍.此外,文献[6]并没有针对该模型做出理论分析.

本文首先将损失转化成正态分布的函数,然后在最小化方差意义下求解关键的重点取样测度变换中的最优平移参数,参数的近似求解分别采用牛顿迭代法、文献[7]提出的基于大偏差理论的估计法以及本文提出的常数凝固估计法.基于大偏差理论的估计法的理论分析表明最优参数即为使得损失大于临界值的二范数最小的正态变量,该结果支撑了文献[6]中超平面分割的参数求解方法,但相对超平面分割该方法更容易求解,且有理论支撑,数值实验表明在低维效果很好,大大减小了模拟方差.常数凝固估计法是在求解最优参数时,用期望代替部分随机变量,因而称之为常数凝固估计法,该方法下最优参数为损失大于临界值的随机因子的平均值,相对于基于大偏差理论的估计法,常数凝固估计法的结果是使得损失大于临界值的随机因子的平均而不是范数最小的随机因子,因而对随机因子的生成方式依赖小,因而计算更稳定.高维时基于大偏差理论的估计法非常不稳定,偏差大,而常数凝固估计法则继续保持数值计算稳定性,因而高维情形下的本文的方法误差更小.

牛顿法计算时需要进行反复迭代,而当损失大于临界值的概率不断变小时,其梯度和 Hessian 矩阵都需要用依赖于随机因子的样本平均近似代替,而随着概率变小,这种近似处理方式的误差变大,因此与基于大偏差理论的估计法和常数凝固估计法相比,用牛顿迭代计算小概率时,计算量较大而计算效率很低.

总而言之,本文提出的常数凝固估计法,无论是低维问题还是高维问题,或是小损失概率的计算问题,都能得到很好的数值计算效果.

1 组合风险模型

定量风险管理的核心是估计资产组合在给定期

间内发生大损失的概率,即对大的临界值 c ,估计 $\alpha = P\{L > c\}$,从而得到风险度量 VaR 或 CVaR 的估计.如文献[6],本文假设损失函数 L 为具有任意边际损失分布的模型,即:

$$L = \mathbf{a}^T \mathbf{X} = a_1 X_1 + a_2 X_2 + \cdots + a_n X_n \quad (1)$$

其中常数向量 $\mathbf{a} = [a_1, a_2, \cdots, a_n]^T \in \mathbf{R}^n$ 是投资在各个资产的份额, $\mathbf{X} = [X_1, X_2, \cdots, X_n]^T \in \mathbf{R}^n$ 表示单位资产损失的随机向量.如果 X_i 均为表示违约与否的示性函数,即 $X_i = 1_{\{Y_i > y_i\}}$, Y_i 是一维标准正态分布时,该模型称为 Gaussian Copula 模型,关于 Gaussian Copula 模型的更多介绍见文献[8, 12-14],本文的一般模型(1)称为推广的 Gaussian Copula 模型.

本文的目标是风险度量时,运用重要性蒙特卡罗抽样(简称重要性抽样)来减小模拟误差,从而提高模拟效率.本文中 \mathbf{X} 是具有任意边际分布的随机向量, L 的分布特性很难得知,由于已有的重要性取样大都基于高斯正态分布,因而如何提高模拟效率是一个很挑战的问题.首先对 \mathbf{X} 做如下的逆变换,将其转化为高维正态分布的函数.在此基础上再试图使用测度变换从而得到最佳的重点取样参数.

引入高维正态随机向量 \mathbf{V} ,且用 \mathbf{V} 的各变量之间的相关性来刻画各个资产之间的相关性,即:

$$X_i = F_i(\Phi(V_i)), i = 1, 2, \cdots, n \quad (2)$$

这里 $V_i \sim N(0, 1)$, $\Phi(\cdot)$ 是一维标准正态分布函数, $F_i(\cdot)$ 是 X_i 的边际分布函数, $F_i^{-1}(\cdot)$ 是 $F_i(\cdot)$ 的逆函数.为刻画 X_i 之间的相关性,设 V_i 之间的相关性矩阵为 Σ_V ,即 $\mathbf{V} = [V_1, V_2, \cdots, V_n]^T$ 服从高维正态分布 $N(0, \Sigma_V)$.不失一般性,可假设 Σ_V 正定.令 Σ_V 为 \mathbf{X} 的相关系数矩阵,于是由式(2),通过文献[15]中的方法计算得到 Σ_V .为简化问题,本文假设 Σ_V 已经求出.令:

$$\Sigma_V = \mathbf{C}\mathbf{C}^T \quad (3)$$

是相关系数矩阵 Σ_V 的 Cholesky 分解.取随机向量 $\mathbf{Z} = [Z_1, Z_2, \cdots, Z_n]^T$,

$$\mathbf{Z} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{V} \quad (4)$$

于是 Z_1, Z_2, \cdots, Z_n 是 n 个独立的标准正态随机变量.

如果上述 \mathbf{X} 的相关系数矩阵 Σ_V 为半正定,此时仍可以采取奇异值分解结合降秩方法处理.

通过式(2)和式(4),随机向量 \mathbf{X} 是 \mathbf{Z} 的函数,从而资产组合损失 L 是 \mathbf{Z} 的函数.即具有任意边际损失分布的组合损失可转化成正态分布的函数,于是蒙特卡罗模拟和相关的方差减小技术都可以通过正

态分布实施,从而将原来复杂的异质问题转化成常见的正态分布问题。

2 重要性抽样

设 $Z \sim N(0, I_n)$, 期望值 $\alpha = P\{L > c\} = E^P[1_{\{L(Z) > c\}}]$ 的蒙特卡罗估计量为

$$\bar{\alpha}_m = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m 1_{\{L(Z^i) > c\}}$$

其中 $Z^i (i=1, 2, \dots, m)$ 是从 $N(0, I_n)$ 中产生的 m 个独立同分布的样本。 α 的方差为

$$\text{Var}(\alpha) = E[1_{\{L(Z) > c\}}] - (E[1_{\{L(Z) > c\}}])^2 = \alpha - \alpha^2$$

从而 $\bar{\alpha}_m$ 的方差为 $\frac{(\alpha - \alpha^2)}{m}$, $\bar{\alpha}_m$ 的相对误差(标准差除以期望)为

$$\sqrt{\frac{(\alpha - \alpha^2)}{m}} / \alpha = \sqrt{\frac{1}{m} \left(\frac{1}{\alpha} - 1 \right)} \xrightarrow{m \text{ 固定}, \alpha \rightarrow 0} \infty$$

所以估计小概率事件时,蒙特卡罗模拟的误差很大,其相对误差趋近于无穷大,需要结合方差减小技术来模拟。

文献[16]指出,重要性抽样是一种广泛使用的减小蒙特卡罗模拟方差的方法,其实质是作测度变换,使得在新测度产生更多在重点区域的样本。由于风险管理中大多数问题是小概率事件,因此重要性抽样常用于风险管理。

设在新测度 P^θ 下 $Z \sim N(\theta, I_n)$, $\theta \in \mathbf{R}^n$, 即对正态分布做平移,则似然比和 α 分别为

$$\frac{dP}{dP^\theta} = e^{-\theta^T Z + \frac{1}{2} \theta^T \theta} \quad (5)$$

$$\alpha = P\{L > c\} = P\{L(Z) > c\} = E^P[1_{\{L(Z) > c\}}] = E^{P^\theta}[1_{\{L(Z) > c\}} e^{-\theta^T Z + \frac{1}{2} \theta^T \theta}] \quad (6)$$

即在新测度 P^θ 下 α 的估计量为

$$\bar{\alpha}_m = \sum_{i=1}^m \frac{1}{m} 1_{\{L(Z^i) > c\}} e^{-\theta^T Z^i + \frac{1}{2} \theta^T \theta}$$

其中 $Z^i, i=1, 2, \dots, m$ 是从 $N(\theta, I_n)$ 中产生的 m 个独立同分布的样本。由式(6),重要性抽样估计是无偏估计,因而比较其方差仅需比较其二阶矩:

$$E^{P^\theta}[(1_{\{L(Z) > c\}} \frac{dP}{dP^\theta})^2] = E^{P^\theta}[1_{\{L(Z) > c\}} e^{-2\theta^T Z + \theta^T \theta}] = E^P[1_{\{L(Z) > c\}} e^{-\theta^T Z + \frac{1}{2} \theta^T \theta}] \quad (7)$$

重要性抽样的效果取决于参数的选取,最优参数 θ^* 选择使得方差最小,由于该估计为无偏估计,方差最小等价于二阶矩最小,即:

$$\theta^* = \arg \min_{\theta} E^P[1_{\{L(Z) > c\}} e^{-\theta^T Z + \frac{1}{2} \theta^T \theta}] \quad (8)$$

2.1 直接取样牛顿法

对式(8)的随机优化问题,可用牛顿法求解, $f(\theta)$ 的一阶和二阶导数分别为

$$\nabla f(\theta) = E^P[(-Z + \theta) 1_{\{L(Z) > c\}} e^{-\theta^T Z + \frac{1}{2} \theta^T \theta}]$$

$$\text{Hess}(f(\theta)) = E^P[(-Z + \theta)(-Z + \theta)^T + I_n] 1_{\{L(Z) > c\}} e^{-\theta^T Z + \frac{1}{2} \theta^T \theta}]$$

牛顿迭代格式如下:

$$\theta^{k+1} = \theta^k - \text{Hess}(f(\theta^k))^{-1} \nabla f(\theta^k), k = 1, 2, \dots, K$$

由于此处 $\nabla f(\theta^k)$ 与 $\text{Hess}(f(\theta^k))$ 均无法直接计算,因此实际计算时可用其蒙特卡罗模拟值即样本平均值代替(通常选择 $m_1 \leq m$):

$$\nabla \bar{f}(\theta^k) = \frac{1}{m_1} \sum_{i=1}^{m_1} (-Z^i + \theta^k) 1_{\{L(Z^i) > c\}} e^{-(\theta^k)^T Z^i + \frac{1}{2} (\theta^k)^T \theta^k}$$

$$\text{Hess}(\bar{f}(\theta^k)) = \frac{1}{m_1} \sum_{i=1}^{m_1} ((-Z^i + \theta^k)(-Z^i + \theta^k)^T + I_n) 1_{\{L(Z^i) > c\}} e^{-(\theta^k)^T Z^i + \frac{1}{2} (\theta^k)^T \theta^k}$$

牛顿法每次迭代时,需要对 $\nabla f(\theta^k)$ 与 $\text{Hess}(f(\theta^k))$ 用其蒙特卡罗模拟值即样本平均代替,且 $\nabla f(\theta^k)$ 与 $\text{Hess}(f(\theta^k))$ 中均包含示性函数,当要估计的概率趋近于 0 时,同本节前面的分析,这种近似的代替误差较大,因而此时牛顿迭代求解的误差大,其次牛顿法需计算每次迭代 Hessian 矩阵的逆,计算量大,特别是对于高维问题,此时 Hessian 矩阵的阶数较大。文献[7]中针对式(8)右边的期望,用 Laplace 估计近似代替期望,从而近似求解问题,大大简化了问题。该方法称为基于大偏差理论的估计法。

2.2 基于大偏差理论的估计法

设 $D = \{Z \in \mathbf{R}^n : L(Z) > c\}$, $\alpha = E^P[1_{\{L(Z) > c\}}] = E^P[1_D(Z)]$, 则式(8)变为

$$\theta^* = \arg \min_{\theta} E^P[1_{D(Z)} e^{-\theta^T Z + \frac{1}{2} \theta^T \theta}] \quad (9)$$

经典的积分 Laplace 方法^[17]表明,对任意 θ ,

$$E^P[1_{D(Z)} e^{-\theta^T Z + \frac{1}{2} \theta^T \theta}] = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_D e^{-\theta^T z + \frac{1}{2} \theta^T \theta} e^{-\frac{1}{2} z^T z} dz \approx c_{\text{on}} \cdot \exp(\max_{z \in D} \{-\theta^T z + \frac{1}{2} \theta^T \theta - \frac{1}{2} z^T z\})$$

代入式(9),近似求解最优 θ 等价于鞍点问题: $\min_{\theta} \max_{z \in D} \{-\theta^T z + \frac{1}{2} \theta^T \theta - \frac{1}{2} z^T z\}$ 。可转化为问题: $\min_{z \in D} \max_{\theta} \{-\theta^T z + \frac{1}{2} \theta^T \theta - \frac{1}{2} z^T z\}$ 。即最优参数为使得损失大于临界值的二范数最小的正态变量。可用蒙特卡罗模拟数值求解:

$$\bar{z} = \arg \min \{(z^i)^T z^i : L(z^i) > c, i = 1, 2, \dots, m_1\} \quad (10)$$

于是最优参数 $\theta_1^* = \bar{z}$.

与牛顿法相比,式(10)不需要迭代,因此具有计算量少,求解简单的特点.但式(10)近似求解问题 $\min_{z \in D} z^T z$ 的好坏取决于蒙特卡罗模拟的次数 m_1 ,由于最后得到的参数是满足损失大于临界值里的最小范数的随机数,因而还高度依赖于随机数的生成方式,计算过程并不稳定.第 3 节中数值实验表明,对于低维问题,这种不稳定性的表现还不太明显,但是对高维问题,最后求得的参数可能远离理论最优参数,因而重要性抽样的模拟效果不佳.

2.3 常数凝固估计法

式(8)的随机优化问题的解 θ_2^* 满足 $\nabla f(\theta_2^*) = 0$,即 θ_2^* 满足方程:

$$E^P[-1_{\{L(Z)>c\}} e^{-\theta_2^{*T} Z + \frac{1}{2} \theta_2^{*T} \theta_2^*} Z] + E^P[1_{\{L(Z)>c\}} e^{-\theta_2^{*T} Z + \frac{1}{2} \theta_2^{*T} \theta_2^*} \theta_2^*] = 0$$

由于 $e^{-\theta_2^{*T} Z + \frac{1}{2} \theta_2^{*T} \theta_2^*}$ 为常数,因而可以约去,得到:

$$E^P[-1_{\{L(Z)>c\}} e^{-\theta_2^{*T} Z} Z] + \theta_2^* E^P[1_{\{L(Z)>c\}} e^{-\theta_2^{*T} Z}] = 0$$

于是可以推出:

$$\theta_2^* = \frac{E^P[1_{\{L(Z)>c\}} e^{-\theta_2^{*T} Z} Z]}{E^P[1_{\{L(Z)>c\}} e^{-\theta_2^{*T} Z}]} \quad (11)$$

如果式(11)右边分子分母期望里的随机项 $e^{-\theta_2^{*T} Z}$ 均用常数代替,则得到 θ_2^* 的一个估计:

$$\theta_2 = E^P[1_{\{L(Z)>c\}} Z] / E^P[1_{\{L(Z)>c\}}] \quad (12)$$

式(12)可以用蒙特卡罗数值求解:

$$\bar{\theta}_2^* = \sum_{i=1}^{m_1} 1_{\{L(Z^i)>c\}} Z^i / \sum_{i=1}^{m_1} 1_{\{L(Z^i)>c\}} \quad (13)$$

由于这里近似处理时用常数代替随机变量,因而称之为常数凝固估计法.与牛顿法相比,式(15)具有算法简单、容易编程实现的特点,此外,相比于式(10)为满足损失大于临界值的二范数最小随机因

子,式(13)则是满足损失大于临界值的随机因子的平均,因而求解的参数更稳定.理论上讲,上述近似处理方法可能有误差,下节中的高维情形的数值实验表明,在 α 为小概率情形下,这种常数凝固估计最佳 θ 的近似方法比牛顿法和基于大偏差理论的估计法更有效,与最佳测度变换下的计算效果基本没有区别.

3 数值实验

为比较上述方法的方差减小效果,对文献[6]给出的数值例子,计算 α 和方差减小倍数等.

3.1 数值实验一

模型参数见表 1.

表 1 二维实例

Tab.1 Two-dimensional example		
随机变量	边际分布	权重系数 α
X_1	$N(10, 5)$	5
X_2	$\exp(0, 9)$	25

$$\Sigma_V = \begin{bmatrix} 1 & 0.5428 \\ 0.5428 & 1 \end{bmatrix}.$$

模拟次数取 $m=20\ 000$, 计算最优 θ 时模拟次数 $m_1=1\ 000$, 数值计算结果见表 2.

表 2 是 2 维时的方差减小结果,其中 α 为 $P\{L>c\}$ 的真实值,是蒙特卡罗模拟 100 000 次的结果, $\bar{\alpha}_{mc}$ 是 $m=20\ 000$ 的蒙特卡罗估计值, $\bar{\alpha}_1$ 、 $\bar{\alpha}_2$ 、 $\bar{\alpha}_3$ 分别为牛顿法、基于大偏差理论的估计法、常数凝固估计法求出的近似最优测度下对 α 的重要性抽样估计. θ_1^* 、 θ_2^* 、 θ_3^* 分别三种方法对应求出的近似最优测度变换的参数, R_1 、 R_2 、 R_3 分别为对应的方差减小倍数.

表 2 二维例子的数值结果

Tab.2 Numerical results of two-dimensional example							
$P(L>c)$	$c=160$	$c=180$	$c=200$	$c=220$	$c=240$	$c=260$	$c=280$
$\alpha/\%$	3.02	1.57	0.851	0.42	0.21	0.10	0.048
$\bar{\alpha}_{mc}/\%$	3.07	1.59	0.85	0.46	0.23	0.10	0.055
$\bar{\alpha}_1/\%$	3.11	1.60	0.82	0.42	0.22	0.12	0.058
R_1	14.6	24	47	84	136	50	108
θ_1^*	(1.35, 1.68)	(1.37, 2.00)	(1.61, 1.99)	(1.57, 2.31)	(1.72, 2.7)	(2.96, 1.87)	(2.96, 1.87)
$\bar{\alpha}_2/\%$	3.02	1.55	0.79	0.41	0.21	0.11	0.054
R_2	14.7	25.6	36	46	76	212	437
θ_2^*	(1.27, 1.44)	(1.36, 1.68)	(1.9, 1.56)	(2.38, 1.76)	(2.38, 1.76)	(1.7, 2.81)	(2.4, 2.5)
$\bar{\alpha}_3/\%$	3.05	1.58	0.81	0.41	0.21	0.11	0.054
R_3	14.2	25.1	47	81	146	263	437
θ_3^*	(1.40, 1.82)	(1.63, 1.98)	(1.76, 2.07)	(2.18, 2.30)	(2.18, 2.30)	(2.05, 2.66)	(2.40, 2.50)

由表2的结果知,在二维情况下,三种方法都有显著的方差减小效果.当要估计的概率较大时,基于大偏差理论的估计法不如牛顿法和常数凝固估计法,但是当估计的概率趋近于0时,基于大偏差理论的估计法和常数凝固估计法的效果远好于牛顿法,这是因为牛顿法在迭代时其梯度和Hessian矩阵都需要用样本平均代替期望,概率趋近于0时,由于梯度和Hessian矩阵中均包含示性函数,这种代替的误差也越来越大,因而求出的最优测度的参数误差很大而效果不如基于大偏差理论的估计法和常数凝固估计法,此外,后两种方法都具有求解简单的特

点.

3.2 数值实验二,100维实例

考察 $n=100$,权重系数向量 \mathbf{a} 为全1向量,其中50个变量为正态变量,另50个变量服从指数分布,其参数随机,相关系数矩阵随机.模拟次数为 $m=20\,000$ 次,计算最优 θ 时模拟次数 $m_1=10\,000$ 次.

表3是100维时的方差减小结果,其中 α 为 $P\{L>c\}$ 的真实值,是蒙特卡罗模拟100 000次的结果, $\bar{\alpha}_{mc}$ 是 $m=20\,000$ 的蒙特卡罗估计, $\bar{\alpha}_1$ 、 $\bar{\alpha}_2$ 分别为牛顿法、常数凝固估计法求出的近似最优测度下对 α 的估计. R_1 、 R_2 分别为对应的方差减小倍数.

表3 $n=100$ 时数值结果

Tab.3 Numerical results for $n=100$

$P(L>c)$	$c=1\,100$	$c=1\,200$	$c=1\,300$	$c=1\,400$	$c=1\,500$	$c=1\,600$	$c=1\,700$
$\alpha/\%$	6.88	5.25	3.96	2.92	2.17	1.62	1.19
$\bar{\alpha}_{mc}/\%$	7.03	5.54	4.05	2.86	2.17	1.61	1.20
$\bar{\alpha}_1/\%$	6.83	5.20	3.85	2.89	2.14	1.58	1.17
R_1	7.4	9.5	11.4	12.9	14.8	16.2	17.9
$\bar{\alpha}_2/\%$	6.82	5.13	3.85	2.88	2.13	1.57	1.15
R_2	5.88	6.8	7.6	8.3	9.6	9.7	9.9

此外,考虑每一次求解最优测度时的随机因子生成方式不一样,即生成随机数时去掉固定种子.由于最优测度是高维向量,其样本方差用每个维度的方差的平均来度量.表4表明高维时基于大偏差理论的估计法求解最优测度不稳定,对随机因子的生成方式依赖大,因而计算出的最优测度远离理论上的最优测度,导致计算结果偏差很大,因而在高维时不考虑这种方法.

表4 不同方法下最优测度的样本方差

Tab.4 Sample variances for optimal measure in different methods

$c=1\,100$, $n=100$	基于大偏差理论 的估计法	常数凝固估计法	牛顿法
样本方差	0.772 6	0.038 0	0.023 7
时间/s	29.5	25.3	1 208

在用牛顿法计算最优参数时,由于迭代以及模拟次数多,计算时间为10 s左右,而用常数凝固估计法求最优测度时,同样的模拟次数,计算时间为0.6 s.表3的计算结果表明牛顿法的方差减小倍数大约是常数凝固估计法的1.3~2.0倍,考虑到计算时间,常数凝固估计法更有效,能在短时间内达到较好的方差减小效果.即常数凝固估计法提供了一个快速有效的算法.

4 结论

本文针对文献[6]中提出的关于组合风险的推

广的Gaussian Copula模型,首先通过变换将损失转化成高维正态分布的函数.然后对该模型的重要性抽样,应用了牛顿法和文献[7]的基于大偏差理论的估计法求解最优参数,并提出了一个新的统一的重要性抽样估计法——常数凝固估计法.理论分析和数值实验结果表明,常数凝固估计法相对于牛顿法和文献[7]中的基于大偏差理论的估计方法更有效.低维时,由于牛顿迭代在概率趋近于0时,其求解过程中近似的误差很大,以及由于要多次迭代和蒙特卡罗模拟,不仅求解速度慢,其方差减小效果也不如基于大偏差理论的估计法和常数凝固估计法.基于大偏差理论的估计法和常数凝固估计法具有求解简单,在小概率事件估计时仍效率高的优点.但是当维度很高时,基于大偏差理论的估计法的最优参数为满足损失大于临界值里范数最小的随机因子,因而对随机因子的生成方式依赖很大,计算出的参数非常不稳定,有可能离理论最优参数很远,因而计算结果偏差很大,而常数凝固估计法的参数是满足损失大于临界值的随机因子的平均,相对更稳定,求出的参数仍在理论最优参数附近,因而比基于大偏差理论的估计法更有优势.且常数凝固估计法相对牛顿法具有算法简单,容易实现,且计算时间少的特点.此外,本文的计算框架既可用于计算市场风险,又可用于计算信用风险,也适用于非正态的情形.本文的方法为许多复杂的异质问题转化成正态分布以及在此基础上的蒙特卡罗方差减小技术提供了有效的新

思路.

本文针对的是损失函数已知的情形,对损失函数待求的情形,需使用嵌套蒙特卡罗模拟,下一步考虑在这种情形下的蒙特卡罗加速方法.

感谢与香港城市大学管理科学系刘广梧教授的有益讨论.

参考文献:

- [1] 王春峰. 金融市场风险管理[M]. 天津:天津大学出版社, 2001.
WANG Chunfeng. Management of financial market risk[M]. Tianjin: Tianjin University Press, 2001.
- [2] 余素红,张世英,宋军. 基于 GARCH 模型和 SV 模型的 VaR 比较[J]. 管理科学学报, 2004, 7(5): 61.
YU Suhong, ZHANG Shiyong, SONG Jun. Comparison of VaR based on GARCH and SV models[J]. Journal of Management Sciences in China, 2004, 7(5): 61.
- [3] Jorion P. Value at risk[M]. New York: McGraw-Hill, 2001.
- [4] Rockafellar R T, Uryasev S. Optimization of conditional value at risk[J]. Journal of Risk, 2000, 2(3): 21.
- [5] Basel Committee on Banking Supervision. International Convergence of Capital Measurement and Capital Standards; A Revised Framework [M]. Basel: Bank for International Settlements, 2004.
- [6] Huang P, Subramanian D, Xu J. An importance sampling method for portfolio CVaR estimation with Gaussian copula models[C]// Proceedings of the 2010 Winter Simulation Conference (WSC). Savannah: WSC, 2010: 2790-2800.
- [7] Glasserman P, Heidelberger P, Shahabuddin P. Asymptotic optimal importance sampling and stratification for pricing path-dependent options[J]. Mathematical Finance, 1999, 9: 117.
- [8] Glasserman P, Li J. Importance sampling for portfolio credit risk[J]. Management Science, 2005, 51(11): 1643.
- [9] Glasserman P, W Kang, Shahabuddin P. Fast simulation of multifactor portfolio credit risk[J]. Operation Research, 2008, 56: 1200.
- [10] Egloff D, Leippold M, Jöhri S, et al. Optimal importance sampling for credit portfolios with stochastic approximation [Z]. Zürich: University of Zürich. Zürcher Kantonalbank and Swiss Banking Institute, 2005.
- [11] Reitan T, Aas K. A new robust importance-sampling method for measuring value-at-risk and expected shortfall allocations for credit portfolios[J]. Journal of Credit Risk, 2010, 6(4): 113.
- [12] Gupton G M, Finger C C, Bhatia M. Creditmetrics: technical document[M]. [S. l.]: JP Morgan & Co., 1997.
- [13] Dunkel J, Weber S. Efficient Monte Carlo methods for convex risk measures in portfolio credit risk models[C]// Simulation Conference. [S. l.]: IEEE, 2007: 958-966.
- [14] Kalkbrener M, Kennedy A, Popp M. Efficient calculation of expected shortfall contributions in large credit portfolios[J]. Journal of Computational Finance, 2007, 11(2): 45.
- [15] Cario M C, Nelson B L. Modeling and generating random vectors with arbitrary marginal distributions and correlation matrix[R]. Illinois: Northwestern University. Department of Industrial Engineering and Management Sciences, 1997.
- [16] Glasserman P. Monte Carlo methods in financial engineering [M]. New York: Springer, 2004.
- [17] Bleistein N, Handelsman R A. Asymptotic expansions of integrals[M]. New York: Holt McDougal, 1975.