

使用新算法的剪切型子结构振动台试验稳定性

傅 博^{1, 2}, 蒋欢军^{1, 2}

(1. 同济大学 土木工程学院, 上海 200092; 2. 同济大学 土木工程防灾国家重点实验室, 上海 200092)

摘要: 提出了使用无条件稳定显式 Chen-Ricles(CR)积分新算法的剪切型子结构振动台试验方法, 包括子结构划分以及试验流程图. 通过推导子结构的运动方程进行子结构方法的数值验证, 考虑了两种不同量级试验子结构频率的情况. 结果表明: 当试验子结构频率较小时, 子结构方法可以保证稳定性和准确性, 反之则不能. 最后利用离散控制理论推导出子结构方法方框图的离散闭环传递函数, 通过求解传递函数的极点位置判断离散系统的稳定性, 进一步论证了数值模拟发现的结果.

关键词: 子结构; 振动台试验; 稳定性; 离散控制理论

中图分类号: P315.8

文献标志码: A

demonstrate the findings from the numerical simulation.

Key words: substructure; shaking table testing; stability; discrete control theory

传统的抗震试验方法包括拟静力试验、振动台试验和拟动力试验. 振动台试验通过直接输入地震动加速度或位移来驱动振动台, 从而可直接研究试验对象的抗震性能. 由于振动台台面尺寸和承载力等限制, 超高层建筑结构等大型结构必须以很小的缩尺模型进行试验, 而尺寸效应会严重影响振动台试验结果的准确性. 通过引入子结构技术, 拟动力试验将整体结构中较难准确进行数值模拟的部分或构件进行试验, 为试验子结构, 剩余的部分进行数值模拟, 为分析子结构, 因此拟动力试验亦被称作混合模拟试验. 由于数值积分算法、计算机计算效率、作动器性能以及控制等因素的限制, 传统混合模拟试验加载速率较慢. 近年来, 由于越来越多的研究评估带有速度依赖性阻尼器的结构抗震性能, 因此传统的混合模拟试验已无法满足其要求而逐渐发展为实时混合模拟试验.

实时混合模拟试验的“实时”要求分析子结构计算得到的位移或者力实时地加载到试验子结构上, 无疑对积分算法的效率提出了很高的要求. 在计算时间上, 显式积分算法由于不用迭代明显优于隐式积分算法. 然而, 传统的显式积分算法皆为条件性稳定, 意味着系统的最高频率不能太大, 否则需要很小的时间步长方可满足稳定性要求. 近年出现的新型积分算法如 Chen 和 Ricles 提出的 CR 算法^[1]兼具无条件稳定和显式两种特性, 故具有很高的计算效率, 非常适合实时混合模拟试验^[2-4].

与传统混合模拟试验类似, 绝大部分已有实时混合模拟试验采用作动器作为加载设备, 给试验子

Stability of Shear-Type Substructure Shaking Table Testing Using a New Algorithm

FU Bo^{1, 2}, JIANG Huanjun^{1, 2}

(1. College of Civil Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, China; 2. State Key Laboratory of Disaster Reduction in Civil Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, China)

Abstract: A shear-type substructure shaking table testing (SSTT) method, which includes the substructure partition and the testing flowchart, was proposed using the unconditionally stable explicit Chen-Ricles (CR) new integration algorithm. The substructure method was numerically verified by deducing the equations of motion (EOMs) of the substructures. Two cases with different magnitudes of the frequency for the experimental substructure were considered. The results show that the stability and the accuracy of the substructure method can be guaranteed if the frequency of the experimental substructure is relatively small, and vice versa. Finally, the discrete control theory was applied to deduce the discrete closed-loop transfer function of the block diagram for the substructure method. In addition, the locations of the poles for the transfer function was used to judge the stability of the discrete system so as to further

收稿日期: 2015-10-30

基金项目: 国家自然科学基金(51478354)

第一作者: 傅 博(1990—), 男, 博士生, 主要研究方向为抗震试验方法. E-mail: fubo2006_2006@126.com

通讯作者: 蒋欢军(1973—), 男, 教授, 博士生导师, 工学博士, 主要研究方向为高层及超高层结构抗震. E-mail: jhj73@tongji.edu.cn

结构施加位移,测出恢复力作为反馈,这要求试验子结构的惯性力相对较小可以忽略。如果试验子结构惯性力不能忽略时,子结构振动台试验(振动台加载型实时混合模拟试验)可以准确地反映试验子结构的惯性力。这种试验方法尤其适合上部带有附属结构或设备(如调谐质量阻尼器(TMD)^[5-6]、调谐液体阻尼器(TLD)^[7-8])的主体结构,附属结构和主体结构分别作为试验子结构和分析子结构。最近, Mosalam 和 Günay^[9]将子结构振动台试验方法推广至评估高压电立式断路器隔离开关的抗震性能,下部支撑结构和上部绝缘支柱分别作为分析子结构和试验子结构。同时,子结构振动台试验技术还被用于研究土-结构相互作用问题^[10-11],上部结构和下部土体分别作为试验子结构和分析子结构。此外还有少量关于振动台和作动器联动加载型实时混合模拟试验的研究^[12-14]。

大部分子结构振动台试验研究中分析子结构的最高频率较小,即便使用条件性稳定积分算法(如中心差分法、显式 Newmark 算法和线性加速度法)来求解分析子结构运动方程,也无需很小的时间步长来满足积分算法的稳定,故以往研究者鲜有关心积分算法的稳定性问题。然而当分析子结构最高频率较大时,积分算法的选取显得格外重要。由于 CR 算法提出的时间不长,有关该算法在子结构振动台试验的适用性的研究非常少。Zhu^[15]等人研究了使用 CR 积分算法子结构振动台试验方法的稳定性,但是该方法的建立基于求解整体结构的运动方程而非求解分析子结构的运动方程,无疑在原理上与子结构方法相悖。

根据上述研究背景,本文首先针对两层剪切型结构提出了采用 CR 积分算法的子结构振动台试验方法,包括子结构的划分和试验的流程图;基于运动方程进行了子结构方法的数值模拟验证,结果表明不同量级的试验子结构的频率会造成子结构方法不同的稳定性;最后,利用离散控制理论进一步论证了数值模拟的结果。

1 试验方法

1.1 子结构的定义

本文研究的整体结构为两层剪切型结构,首层与第二层分别定义为分析子结构和试验子结构。图1为子结构的定义,包含子结构的质量、阻尼、刚度以及子结构的隔离体受力图。图中: m 、 c 和 k 分别是质

量、阻尼和刚度; F 和 f 分别是等效地震力和界面力; \ddot{x} 和 \ddot{x}_g 分别是结构的相对加速度和地震动加速度;下标 e 和 a 分别代表试验子结构和分析子结构;下标 $i+1$ 代表下一时间步。

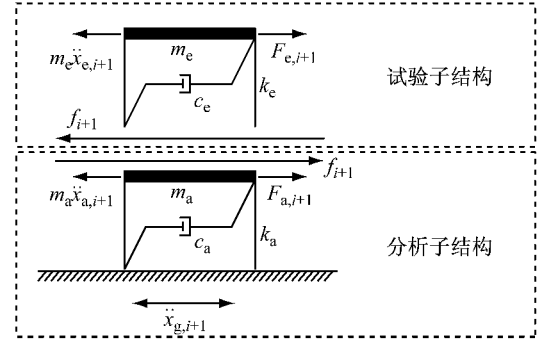


图1 子结构的定义

Fig.1 Definition of substructuring

1.2 试验流程

根据分析子结构的隔离体受力图可得到其下一时间步的运动方程

$$m_a \ddot{x}_{a,i+1} + c_a \dot{x}_{a,i+1} + k_a x_{a,i+1} = F_{a,i+1} + f_{i+1} = P_{a,i+1} \quad (1)$$

式中: \dot{x} 为速度; x 为相对地面的相对位移; P 为等效外力。下一时间步的速度和位移可以使用 CR 算法根据当前时间步的加速度、速度和位移计算出

$$\dot{x}_{a,i+1} = \dot{x}_{a,i} + \Delta t \alpha_{a,1} \ddot{x}_{a,i} \quad (2)$$

$$x_{a,i+1} = x_{a,i} + \Delta t \dot{x}_{a,i} + (\Delta t)^2 \alpha_{a,2} \ddot{x}_{a,i} \quad (3)$$

式中: Δt 为积分时间步长; $\alpha_{a,1}$ 和 $\alpha_{a,2}$ 为积分参数

$$\alpha_{a,1} = \alpha_{a,2} = \frac{4m_a}{4m_a + 2\Delta t c_a + (\Delta t)^2 k_a} \quad (4)$$

根据式(1)可得分析子结构下一时间步的加速度为

$$\ddot{x}_{a,i+1} = m_a^{-1} (F_{a,i+1} + f_{i+1} - c_a \dot{x}_{a,i+1} - k_a x_{a,i+1}) \quad (5)$$

需要注意的是,式(5)只适用于分析子结构为线弹性时,更一般的情形可以用分析子结构的恢复力 $R_{a,i+1}$ 替代 $k_a x_{a,i+1}$,式(5)进行相应的修改,在此不再赘述。

求解式(5)仍需要下一时间步的界面力 f_{i+1} ,可通过试验子结构(图2)测得。

图2中 u 为绝对位移。对于两层剪切型结构而言,界面处的位移与分析子结构的位移相同;根据位移协调条件,界面处的位移为绝对位移,而非式(3)计算出的相对位移,绝对位移与相对位移的关系如下:

$$u_{a,i+1} = x_{a,i+1} + x_{g,i+1} \quad (6)$$

式中: x_g 为地震动位移, 由 \ddot{x}_g 积分得到.

综上可得两层剪切型结构使用 CR 算法的子结构振动台试验流程图(图 3). 本文所提的试验流程图很容易推广至两层剪切型结构使用其他显式积分算法的子结构振动台试验方法.

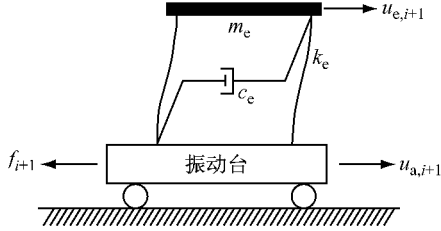


图 2 试验子结构的加载模式

Fig. 2 Loading scheme of experimental substructure

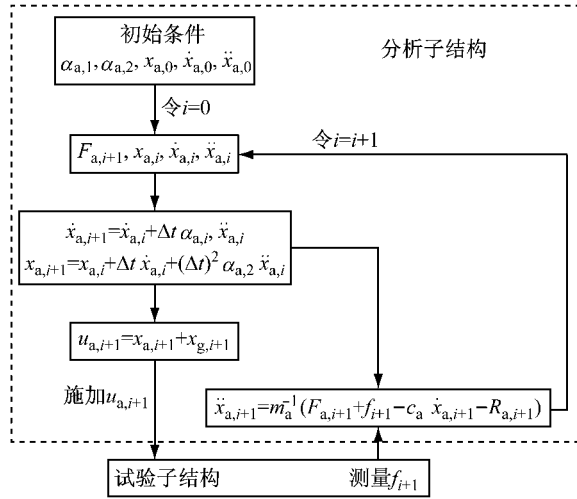


图 3 两层剪切型结构使用 CR 算法子结构振动台试验流程

Fig. 3 Flowchart of SSTT using CR algorithm for two-story shear-type structure

2 子结构方法的数值模拟验证

由上文可知, 界面力在整个试验过程中起到重要的作用. 因此, 在子结构方法进行数值模拟验证时, 关键在于如何得到较精确的界面力.

根据试验子结构的隔离体受力图可以得到界面力的表达式

$$f_{i+1} = F_{e,i+1} - m_e \ddot{x}_{e,i+1} = -m_e (\ddot{x}_{g,i+1} + \ddot{x}_{e,i+1}) = -m_e \ddot{u}_{e,i+1} \quad (7)$$

式中: \ddot{u} 为绝对加速度. 由式(7)可知, 进行子结构振动台试验时除可直接测量界面力外, 亦可通过测量试验子结构的绝对加速度来间接得到界面力. 因此, 在数值模拟中, 关键在于如何得到试验子结构的加速度. 试验子结构处于线弹性状态时运动方程如下

式:

$$m_e \ddot{x}_{e,i+1} + c_e (\dot{x}_{e,i+1} - \dot{x}_{a,i+1}) + k_e (x_{e,i+1} - x_{a,i+1}) = F_{e,i+1} \quad (8)$$

求解式(8)需知道试验子结构下一时间步的速度 $\dot{x}_{e,i+1}$ 和位移 $x_{e,i+1}$, 为保持算法的一致性, 同样采用 CR 算法求解, 表达式及积分参数与分析子结构类似, 公式如下:

$$\dot{x}_{e,i+1} = \dot{x}_{e,i} + \Delta t \alpha_{e,1} \ddot{x}_{e,i} \quad (9)$$

$$x_{e,i+1} = x_{e,i} + \Delta t \dot{x}_{e,i} + (\Delta t)^2 \alpha_{e,2} \ddot{x}_{e,i} \quad (10)$$

$$\alpha_{e,1} = \alpha_{e,2} = \frac{4m_e}{4m_e + 2\Delta t c_e + (\Delta t)^2 k_e} \quad (11)$$

综上, 试验子结构的数值模拟过程总结如下: 利用 CR 算法(式(9)和(10))计算出试验子结构下一时间步的速度 $\dot{x}_{e,i+1}$ 和位移 $x_{e,i+1}$; 再利用式(8)得到试验子结构相对地面的加速度 $\ddot{x}_{e,i+1}$; 最后利用式(7)得到下一时间步的界面力 f_{i+1} .

将上述方法应用到两个具有不同量级的试验子结构频率的例子验证时, 发现试验子结构频率较小时, 子结构方法可以得到稳定并较为准确的结果; 而当试验子结构频率较大时, 子结构方法无法得到稳定的结果.

2.1 频率较小的试验子结构

本算例的子结构基本参数为: $m_a = m_e = 300 \text{ kg}$; $\omega_a = \omega_e = 10 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$; $\xi_a = \xi_e = 0.02$; $k_a = k_e = 30\,000 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$; $c_a = c_e = 120 \text{ N} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-1}$; 时间步长 $\Delta t = 0.01 \text{ s}$. ω 和 ξ 分别代表圆频率和阻尼比.

El Centro NS, 1940 地震波作为地震动输入, 同时采用整体结构分析和子结构方法进行分析. 整体结构分析也使用 CR 积分算法, 所用的参数与子结构方法相同. 两种方法得到的首层结构位移(分析子结构的位移)对比如图 4 所示.

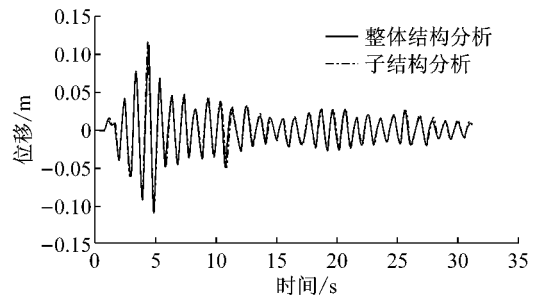


图 4 首层结构位移反应对比

Fig. 4 Comparison of displacement at first floor

使用归一化均方误差来量化子结构方法得到的首层结构位移的精度, 定义如下:

$$\frac{X_{a,vel}(z)}{P_a(z)} = \frac{n'_2 z^2 + n'_1 z + n'_0}{d'_2 z^2 + d'_1 z + d'_0} \quad (18)$$

$$G_3(z) = \frac{X_{e,acc}(z)}{P_e(z)} = \frac{n''_2 z^2 + n''_1 z + n''_0}{d''_2 z^2 + d''_1 z + d''_0} \quad (19)$$

式(17)~(19)分子与分母的系数如下:

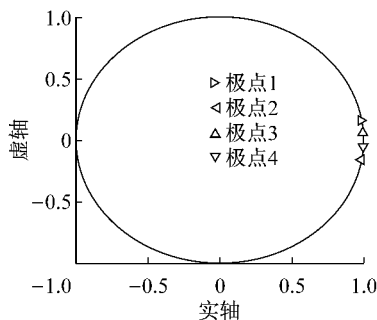
$$\begin{aligned} n_2 &= 0, n_1 = \alpha_{a,2} \Delta t^2, n_0 = (\alpha_{a,1} - \alpha_{a,2}) \Delta t^2, n'_2 = 0, \\ n'_1 &= \alpha_{a,1} \Delta t, n'_0 = -\alpha_{a,1} \Delta t, n''_2 = 1, n''_1 = -2, n''_0 = 1, \\ d_2 &= m_a, d_1 = \alpha_{a,2} k_a \Delta t^2 + \alpha_{a,1} c_a \Delta t - 2m_a, d_0 = (\alpha_{a,1} \\ &- \alpha_{a,2}) k_a \Delta t^2 - \alpha_{a,1} c_a \Delta t + m_a, d'_2 = m_a, d'_1 = \alpha_{a,2} k_a \Delta t^2 \\ &+ \alpha_{a,1} c_a \Delta t - 2m_a, d'_0 = (\alpha_{a,1} - \alpha_{a,2}) k_a \Delta t^2 - \alpha_{a,1} c_a \Delta t + \\ &m_a, d''_2 = m_e, d''_1 = \alpha_{e,2} k_e \Delta t^2 + \alpha_{e,1} c_e \Delta t - 2m_e, d''_0 = \\ &(\alpha_{e,1} - \alpha_{e,2}) k_e \Delta t^2 - \alpha_{e,1} c_e \Delta t + m_e. \end{aligned}$$

将式(17)~(19)代入公式(16)可得闭环离散传递函数的最终表达式

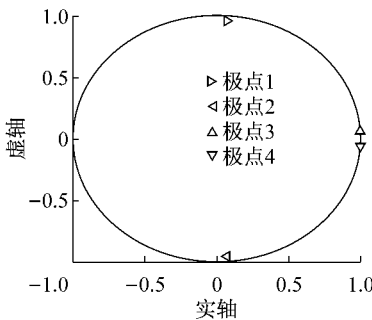
$$G_{cl}(z) = \frac{N_3 z^3 + N_2 z^2 + N_1 z + N_0}{D_4 z^4 + D_3 z^3 + D_2 z^2 + D_1 z + D_0} \quad (20)$$

式(20)中分子和分母的系数如下:

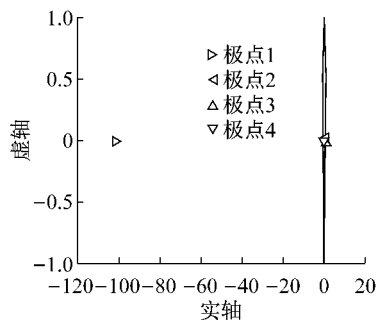
$$\begin{aligned} N_3 &= n_1 [(m_e)^2 n''_2 - m_a d''_2 - m_e d''_2] \\ N_2 &= n_0 [(m_e)^2 n''_2 - m_a d''_2 - m_e d''_2] + n_1 [(m_e)^2 n''_1 - \\ &m_a d''_1 - m_e d''_1] \\ N_1 &= n_0 [(m_e)^2 n''_1 - m_a d''_1 - m_e d''_1] + n_1 [(m_e)^2 n''_0 - \\ &m_a d''_0 - m_e d''_0] \\ N_0 &= n_0 [(m_e)^2 n''_0 - m_a d''_0 - m_e d''_0] \end{aligned}$$



a $\omega_e = 10 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$



b $\omega_e = 100 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$



c $\omega_e = 1000 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$

图6 闭环离散传递函数的极点

Fig.6 Poles of discrete closed-loop transfer function

4 结论及展望

(1) 利用离散控制理论可有效地论证本文所提出的子结构方法。

(2) 当试验子结构频率相对较小时,使用CR积分算法的子结构振动台试验方法能保证其稳定性,并且与整体结构分析比较有较高的精度。

(3) 当试验子结构频率相对较大时,使用CR积

$$D_4 = d_2 d''_2$$

$$D_3 = c_e m_e n'_1 n''_2 + k_e m_e n_1 n''_2 + d_1 d''_2 + d_2 d''_1$$

$$D_2 = c_e m_e (n'_0 n''_2 + n'_1 n''_1) + k_e m_e (n_0 n''_2 + n_1 n''_1) + d_0 d''_2 + d_1 d''_1 + d_2 d''_0$$

$$D_1 = c_e m_e (n'_0 n''_1 + n'_1 n''_0) + k_e m_e (n_0 n''_1 + n_1 n''_0) + d_0 d''_1 + d_1 d''_0$$

$$D_0 = c_e m_e n'_0 n''_0 + k_e m_e n_0 n''_0 + d_0 d''_0$$

3.2 稳定性分析

由公式(20)可看出闭环离散传递函数分母为 z 的四阶表达式,表明系统有4个极点。

当子结构的结构参数及时间步长已知,子结构的积分参数可由公式(4)和(11)求得;从而可求出 $G_1(z)$, $G_2(z)$ 和 $G_3(z)$ 分子和分母的系数;进而可求得闭环离散传递函数最终表达式中分子、分母系数,这样便可通过极点位置来判断系统的稳定性。

使用第2.1节的结构参数和时间步长,为进一步论证试验子结构频率对离散系统稳定性的影响, ω_e 取10,100和1000 $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$ 三个值。图6显示离散闭环传递函数极点的位置,可知当 ω_e 取10和100 $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$ 时,4个极点全都位于单位圆内,表明系统稳定;当 $\omega_e = 1000 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ 时,极点1位于单位圆外,表明系统不稳定。这一结果很好地论证了本文的数值模拟结果。

分算法的子结构振动台试验方法会失去稳定性,仍需要进一步的研究。

(4) 与文献[2]对比发现,CR积分算法应用到作动器加载型实时混合模拟试验和子结构振动台试验两种试验方法时稳定性差异很大。而且后者的稳定性分析更加复杂。前者不存在试验子结构(一般只是结构构件)的频率大小问题,在没有时滞时,CR积分算法将会保持其稳定性;而对于后者,如果试验子结构频率较大时,即便没有时滞CR算法也会失去

稳定性。

此外,本文所提出的试验方法基于一些假定,仍需进一步的试验验证。而且试验成功与否除了取决于积分算法的稳定性,还在很大程度上取决于试验水平和仪器精度等因素。

参考文献:

- [1] CHEN Cheng, Ricles J. Development of direct integration algorithms for structural dynamics using discrete control theory [J]. *Journal of Engineering Mechanics*; ASCE, 2008, 134(8): 676.
- [2] CHEN Cheng, Ricles J, Marullo T M, *et al.* Real-time hybrid testing using the unconditionally stable explicit CR integration algorithm [J]. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, 2009, 38(1): 23.
- [3] CHEN Cheng, Ricles J, Karavasilis T, *et al.* Evaluation of a real-time hybrid simulation system for performance evaluation of structures with rate dependent devices subjected to seismic loading [J]. *Engineering Structures*, 2012, 35: 71.
- [4] CHEN Cheng, Ricles J. Large-scale real-time hybrid simulation involving multiple experimental substructures and adaptive actuator delay compensation [J]. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, 2012, 41(3): 549.
- [5] Horiuchi T, Inoue M, Konno T. Development of a real-time hybrid experimental system using a shaking table [C/OL]// *Proceedings of 12th World Conference on Earthquake Engineering*. Auckland; New Zealand Society for Earthquake Engineering, 2000. [2015-10-30]. <http://www.iitk.ac.in/nicee/wcee/article/0843.pdf>.
- [6] Igarashi A, Iemura H, Suwa T. Development of substructured shaking table test method [C/OL]// *Proceedings of 12th World Conference on Earthquake Engineering*. Auckland; New Zealand Society for Earthquake Engineering, 2000. [2015-10-30]. <http://www.iitk.ac.in/nicee/wcee/article/1775.pdf>.
- [7] Lee S K, Park E C, Min K W, *et al.* Real-time hybrid shaking table testing method for the performance evaluation of a tuned liquid damper controlling seismic response of building structures [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2007, 302(3): 596.
- [8] Malekghasemi H, Ashasi-Sorkhabi A, Ghaemmaghami A R, *et al.* Experimental and numerical investigations of the dynamic interaction of tuned liquid damper-structure systems [J]. *Journal of Vibration and Control*, 2015, 21(14): 2707.
- [9] Mosalam K M, Günay S. Seismic performance evaluation of high voltage disconnect switches using real-time hybrid simulation: I. System development and validation [J]. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, 2013, 43(8): 1205.
- [10] WANG Qiang, WANG Jinting, JIN Feng, *et al.* Real-time dynamic hybrid testing for soil-structure interaction analysis [J]. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 2011, 31(12): 1690.
- [11] ZHOU Mengxia, WANG Jinting, JIN Feng, *et al.* Real-time dynamic hybrid testing coupling finite element and shaking table [J]. *Journal of Earthquake Engineering*, 2014, 18(4): 637.
- [12] Shao X, Reinhorn A M, Sivaselvan M V. Real-time hybrid simulation using shake tables and dynamic actuators [J]. *Journal of Structural Engineering*; ASCE, 2010, 137(7): 748.
- [13] Nakata N, Stehman M. Substructure shake table test method using a controlled mass: formulation and numerical simulation [J]. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, 2012, 41(14): 1977.
- [14] 彭天波,谢馨,曾忠,等. 采用 Chang 方法的混合试验的稳定性和精度[J]. *同济大学学报:自然科学版*, 2014, 42(12): 1790.
- PENG Tianbo, XIE Xin, ZENG Zhong, *et al.* Stability and accuracy of shaking table-actuator hybrid test with Chang method [J]. *Journal of Tongji University: Natural Science*, 2014, 42(12): 1790.
- [15] ZHU Fei, WANG Jinting, JIN Feng, *et al.* Stability analysis of MDOF real-time dynamic hybrid testing systems using the discrete-time root locus technique [J]. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, 2015, 44(2): 221.
- [16] Ogata K. *Discrete-time control systems* [M]. 2nd ed. Upper Saddle River: Prentice Hall, 1995.