

# 紧急变道工况鲁棒性车辆轨迹跟踪策略

刘 瑞<sup>1</sup>, 朱西产<sup>1</sup>, 李 霖<sup>2</sup>

(1. 同济大学 汽车学院, 上海 201804; 2. 同济大学 智能型新能源汽车协同创新中心, 上海 201804)

**摘要:** 提出一种基于凸多面体方法的鲁棒性静态反馈紧急工况轨迹跟踪策略. 使用侧向位移误差和车辆横摆角误差建立车辆轨迹跟踪模型. 针对车辆紧急避让中车辆动态特性高度非线性的问题, 使用凸多面体方法建立车辆轨迹跟踪的鲁棒性控制策略. 通过 Matlab 和 Carsim 软件的联合仿真表明, 本文的车辆轨迹跟踪策略具有较为良好的性能和鲁棒性.

**关键词:** 轨迹跟踪; 鲁棒控制; 凸多面体; 线性矩阵不等式  
**中图分类号:** U461.6 **文献标志码:** A

## Robust Trajectory Following Strategy during Emergency Lane-change Condition

LIU Rui<sup>1</sup>, ZHU Xichan<sup>1</sup>, LI Lin<sup>2</sup>

(1. School of Automotive Studies, Tongji University, Shanghai 201804, China; 2. Collaborative Innovation Center of Intelligent New Energy Vehicle, Tongji University, Shanghai 201804, China)

**Abstract:** In this paper, a robust static feedback emergency trajectory following strategy based on polytope method was proposed. The vehicle trajectory following model by using the lateral displacement error and the vehicle yaw angle error was studied. To deal with the nonlinear vehicle dynamic response properties during emergency avoidance, the robust control strategy based on polytope method was presented. Simulations based on Matlab and Carsim joint platform demonstrate that the robust trajectory following strategy is effective and efficient.

**Key words:** trajectory following; robust control; polytope; linear matrix inequality

自 20 世纪 70 年代以来, 以成员约束系统和车身耐撞性为代表的汽车被动安全技术极大地降低了驾驶员和成员在事故中的死亡率. 汽车被动安全技术将驾驶员作为理想驾驶员对待, 认为驾驶员始终

都会做出正确的操作. 但在实际中驾驶员由于分心、情绪波动、车辆极限状态下动力学特性的改变等原因往往无法在紧急状态下做出正确的判断. 统计表明<sup>[1]</sup>, 93% 的事故是由于驾驶员和驾驶环境之间的信息交互错误和驾驶员的误操作导致的. 因此以先进驾驶辅助系统 (advanced driver assistance systems, ADAS) 为代表的智能汽车主动安全技术成为近些年来的研究热点. ADAS 通过感知系统探测汽车行驶过程中的危险工况, 并向驾驶员发出警告或自动采取避撞操作.

轨迹跟踪是智能汽车研究中的一个基础问题, 在自动驾驶汽车的规划轨迹跟踪、V2X (vehicle-to-vehicle/infrastructure/pedestrian) 车队行驶、智能汽车自动紧急控制 (autonomous emergency control, AEC) 等方面都扮演着重要角色. 文献[2]研究了驾驶员在紧急工况下的避撞行为, 表明随着 TTC (time-to-collision) 减小, 越来越多的驾驶员选择转向或转向制动避撞. 驾驶员的这一选择是有其依据的. 文献[3-4]研究表明, 在高速工况下转向或转向制动避撞所需要的纵向距离比单纯制动小. 然而, 由于心理紧张和紧急工况下车辆动态特性的变化, 多数驾驶员在紧急状况下无法做出正确的操作. 因此智能汽车自动紧急变道避让策略就显得尤为重要. 紧急变道避让策略首先通过环境感知系统判断智能车能否实行紧急避让操作; 当环境允许时, 智能汽车规划避撞路径, 并跟踪规划路径. 在这种工况下, 车道变换路径 (lane-change) 是非常有效且实用的. 本文也选用变道路径作为目标轨迹. 在紧急变道工况下车辆动力学特性复杂而多变, 且车辆行驶过程中有大量的外部和内部干扰, 因此车辆轨迹跟踪的鲁棒性就显得尤为重要.

车辆轨迹跟踪误差可以使用侧向位移偏差、参考路径曲率偏差、车辆横摆角偏差等参数表示. 文献

收稿日期: 2016-05-28

基金项目: 国家重点研发计划(2016YFB0100904-2); 上海市科技成果转化和产业化项目(15DZ1100800)

第一作者: 刘 瑞(1989—), 男, 博士生, 主要研究方向为智能车评价与测试、自动驾驶研究、鲁棒控制. E-mail: liurui@tongji.edu.cn

通讯作者: 朱西产(1962—), 男, 教授, 博士生导师, 工学博士, 主要研究方向为汽车主、被动安全. E-mail: xczechu@163.com

[5]基于侧向位移偏差和参考轨迹曲率偏差建立了车辆轨迹跟踪模型,并进行了  $H_\infty$  轨迹跟踪算法研究;文献[6]使用侧向位移偏差和参考轨迹曲率偏差建立了车辆轨迹跟踪模型,并结合 GA (genetic algorithm) 和 LMI (linear matrix inequality) 进行了轨迹跟踪的静态输出反馈鲁棒性设计. 基于侧向位移偏差和参考轨迹曲率偏差建立的车辆轨迹跟踪模型的误差较大,这给轨迹跟踪控制器设计带来了困难. 文献[5]使用非线性控制方法处理这一问题. 文献[6]采用 T-S 模型来处理模型不确定性,但需要使用 GA 算法结合 LMI 进行控制器设计. 本文基于侧向位移偏差和车辆横摆角偏差建立车辆轨迹跟踪模型.

车辆轨迹跟踪算法包括离线算法和在线算法. 近些年,以 MPC (model predictive control)<sup>[7-9]</sup> 和自抗扰控制<sup>[10]</sup> 为代表的在线算法在智能汽车轨迹跟踪算法中有较多应用. 在线算法可以保证系统具有较好的鲁棒性. 但在线算法需要在系统运行过程中实时更新参数,这大大增加了智能汽车的计算负担. 特别地,由于 MPC 等在线算法是针对化学反应等变化缓慢的系统所开发的,当自动驾驶汽车高速行驶时,在线算法往往由于来不及更新参数而使控制效果恶化. 因此本文采用静态反馈的凸多面体方法进行车辆轨迹跟踪的鲁棒性设计.

本文基于车辆横摆角偏差和侧向位移偏差建立车辆轨迹跟踪模型,并使用凸多面体方法进行静态轨迹跟踪策略的鲁棒性设计,研究较实用的车辆轨迹跟踪策略.

## 1 车辆轨迹跟踪模型

智能汽车在紧急避撞中的车道变换路径可以采用多种方法来拟合. 文献[11]对比了圆弧、五次多项式、七次多项式、双曲线、螺旋线、B 样条曲线等对车辆变道轨迹的拟合效果. 圆弧轨迹是所有拟合曲线中车辆临界速度最高的,但圆弧轨迹在 2 段圆弧轨迹相交处有向心加速度突变,因此圆弧轨迹并不符合车辆动力学特性. 五次多项式具有较高的临界速度,可以较好拟合轨迹的边界条件,并且更高次数的多项式并没有表现出特别优良的特性,因此文献[11]认为五次多项式是一种较好的轨迹拟合函数. 同时,文献[9]也使用五次多项式曲线拟合智能汽车的规划轨迹. 因此选择五次多项式来拟合智能车轨迹.

车辆变道轨迹的侧向速度和侧向加速度在始端和终端都需要满足零边界条件,因此车辆变道轨迹的五次多项式描述可以表示为

$$Y(X) = 10 \frac{y_e}{x_e^3} X^3 - 15 \frac{y_e}{x_e^4} X^4 + 6 \frac{y_e}{x_e^5} X^5 \quad (1)$$

式中:  $Y(X)$  为  $X$  位置对应的车辆横向位移,  $X$  表示车辆纵向位置;  $x_e$  为变道参考轨迹纵向距离;  $y_e$  为变道参考轨迹横向距离.

利用参考轨迹的侧向位移误差和朝向角误差来描述车辆的轨迹跟踪误差.  $e_1$  表示车辆质心(CG)到参考轨迹的距离,  $e_2$  表示车辆横摆角与参考轨迹朝向角之间的偏差,即

$$\begin{aligned} \tilde{e}_1 &= a_y - a_{yr} = (\ddot{y} + v_x \dot{\psi}) - \ddot{y}_r \\ e_2 &= \psi - \psi_r \end{aligned} \quad (2)$$

式中:  $y$  为车辆侧向位移;  $y_r$  为参考轨迹侧向位移;  $\psi$  为车辆横摆角;  $\psi_r$  为参考轨迹朝向角;  $a_y$  为车辆侧向加速度;  $a_{yr}$  为参考轨迹侧向加速度;  $v_x$  为车辆纵向速度.

选取  $e_1, e_2$  以及  $e_1, e_2$  的一阶导数为状态变量,车辆轨迹跟踪模型可以表示为<sup>[12]</sup>

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_1 \\ \ddot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \\ \ddot{e}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} e_1 \\ \dot{e}_1 \\ e_2 \\ \dot{e}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2C_f/m \\ 0 \\ 2aC_f/I_z \end{bmatrix} \delta + \mathbf{B}_w \begin{bmatrix} \dot{y}_r \\ \ddot{y}_r \\ \dot{\psi}_r \\ \ddot{\psi}_r \end{bmatrix} \quad (3)$$

其中

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2C_f+2C_r}{mv_x} & \frac{2C_f+2C_r}{m} & -\frac{2aC_f-2bC_r}{mv_x} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{2aC_f-bC_r}{I_z v_x} & \frac{2aC_f-2bC_r}{I_z} & -\frac{2a^2C_f+2b^2C_r}{I_z v_x} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_w = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{2C_f+2C_r}{mv_x} & -1 & -\frac{2aC_f-2bC_r}{mv_x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{2aC_f-2bC_r}{I_z v_x} & 0 & -\frac{2a^2C_f+2b^2C_r}{I_z v_x} & -1 \end{bmatrix}$$

式中:  $C_f$  为前轮侧偏刚度;  $C_r$  为后轮侧偏刚度;  $m$  为整车整备质量;  $a$  为车辆质心到前轴中心的距离;  $b$  为车辆质心到后轴中心的距离;  $I_z$  为整车绕  $z$  轴的转动惯量;  $\delta$  为前轮转角;  $v_y$  为车辆侧向速度.

本文使用的轨迹跟踪模型以车辆二自由度自行车模型为基础描述车辆的动态特性,因此具有与二自由度自行车模型同样的局限性. 这种局限性主要

表现在:

(1) 为了实现运动解耦,二自由度自行车模型预先假定了车辆纵向速度为定值.但在车辆实际行驶过程中,车辆速度不可能一直保持不变,甚至无法保证车辆纵向速度在预先设定值的可接受误差范围内,这给基于模型的车辆操稳性研究带来诸多不确定性.

(2) 为了得到车辆操稳性线性模型,二自由度自行车模型的轮胎侧偏刚度为定值.但车辆轮胎侧偏刚度是一个强非线性参数,特别是在车辆运动侧向加速度比较大的情况下(大于  $0.4g$ ),这种非线性带来的不确定性将会非常大.魔术公式<sup>[13]</sup>可以较好地拟合轮胎侧偏特性,但魔术公式同样是一个强非线性公式,难于应用在基于模型的轨迹跟踪算法中.

由于以上 2 个原因,基于线性时不变模型的车辆控制算法往往难以得到满意的效果.本文将车辆轨迹跟踪模型作为线性时变系统处理,这样就可以在车辆操稳性研究中将纵向速度和侧偏刚度的非线性特性考虑进去,同时又保证系统模型仍然是一个线性系统.车辆轨迹跟踪模型中的时变参数矩阵的时变变量包括  $C_f, C_r, 1/v_x$  3 个,将它们表示为如下具有乘性不确定性的参数:

$$\begin{cases} 1/v_x = (1 + q_1)/v_{x0} \\ C_f = C_{f0}(1 + q_2) \\ C_r = C_{r0}(1 + q_3) \end{cases} \quad (4)$$

式中:  $v_{x0}$  为车辆标称纵向速度;  $C_{f0}$  为标称前轮侧偏刚度;  $C_{r0}$  为标称后轮侧偏刚度;  $q_1, q_2, q_3$  为参数不确定性.

## 2 状态反馈系统的稳定性

线性时不变系统的线性微分包含可以表示为

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} \\ \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0 \end{aligned} \quad (5)$$

式中:  $\mathbf{x}$  为系统状态向量;  $\mathbf{A}$  为系统状态矩阵;  $\mathbf{x}(0)$  为系统初始状态;  $\mathbf{x}_0$  为常数向量.

如式(5)所表述系统渐进稳定的充要条件可以表示为<sup>[14]</sup>:存在一个正定矩阵  $\mathbf{P} > 0$  满足

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} < 0 \quad (6)$$

对于状态反馈控制系统,渐进稳定的充要条件为存在一个正定矩阵  $\mathbf{P} > 0$ ,满足

$$(\mathbf{A} + \mathbf{BK})^T \mathbf{P} + \mathbf{P}(\mathbf{A} + \mathbf{BK}) < 0 \quad (7)$$

通过参考文献[15-16]中提供的方法,式(7)可以进一步表述为:存在一个正定矩阵  $\mathbf{Q} > 0$  和一个  $\mathbf{Y}$

满足

$$\mathbf{A}\mathbf{Q} + \mathbf{Q}\mathbf{A}^T + \mathbf{B}\mathbf{Y} + \mathbf{Y}^T \mathbf{B}^T < 0 \quad (8)$$

## 3 凸多面体方法

如式(5)所示的线性时不变微分包含的时变形式为

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}(t)\mathbf{x} \\ \mathbf{A}(t) &\in \Omega \end{aligned} \quad (9)$$

式中:  $\mathbf{x}$  为系统状态向量;  $\mathbf{A}(t)$  为系统时变状态矩阵;  $\Omega \subseteq \mathbf{R}^{m \times m}$ , 其中  $m$  表示  $m$  维空间维数.

类似于线性时不变系统,如式(9)所示的线性时变系统的渐进稳定性的充要条件为:存在对称正定矩阵  $\mathbf{P}$  满足

$$\begin{cases} \mathbf{P} > 0 \\ \mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} < 0 \end{cases} \quad (10)$$

对所有  $\mathbf{A} \in \Omega$  成立.

$\Omega$  可以有多种表示形式,使用凸多面体方法研究线性时变系统.如式(3)所描述的车辆轨迹跟踪模型以及式(4)所描述的系统模型不确定性,线性时变车辆跟踪模型为

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{B}(t)\mathbf{u} + \mathbf{B}_w(t)\mathbf{w} \quad (11)$$

式中:  $\mathbf{u}$  为系统控制输入;  $\mathbf{w}$  为系统参考输入;  $\mathbf{A}(t)$  为系统时变状态矩阵;  $\mathbf{B}(t)$  为系统时变控制输入矩阵;  $\mathbf{B}_w(t)$  为系统时变参考输入矩阵.

系统具有  $n$  个不确定性参数  $q_i(t)$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ), 且这  $n$  个不确定参数均为有界的,即

$$q_i^- \leq q_i(t) \leq q_i^+ \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (12)$$

式中:  $q_i^-$  为第  $i$  个不确定性参数的下界;  $q_i^+$  为第  $i$  个不确定性参数的上界.用  $\mathbf{A}_0, \mathbf{B}_0$  表示系统的标称参数矩阵(nominal matrix),则有

$$\begin{cases} \mathbf{A}(t) = \mathbf{A}_0 + \sum_{i=1}^n \mathbf{A}_i q_i(t) \\ \mathbf{B}(t) = \mathbf{B}_0 + \sum_{i=1}^n \mathbf{B}_i q_i(t) \end{cases} \quad (13)$$

使用凸多面体的顶点表示线性时变状态反馈系统,则

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} \\ \mathbf{A}(t) \in \Omega \\ \Omega = \text{Co}\{(\mathbf{A}_1, \mathbf{B}_1), (\mathbf{A}_2, \mathbf{B}_2), \dots, (\mathbf{A}_l, \mathbf{B}_l)\} \\ l = 2^n \end{cases} \quad (14)$$

式中:  $(\mathbf{A}_j, \mathbf{B}_j)$  ( $j=1, 2, \dots, l$ ) 为凸多面体的第  $j$  个顶点.

根据式(8)和式(10),线性时变系统状态反馈渐

进稳定控制算法可以转化为如下 LMI (linear matrix inequality):

find  $Q, Y$

s. t.  $Q > 0$

$$A_j Q + Q A_j^T + B_j Y + Y^T B_j^T + B_{wj} B_{wj}^T < 0$$

$$(j = 1, 2, \dots, l) \quad (15)$$

系统的静态反馈增益可以表示为

$$K = YQ^{-1} \quad (16)$$

这样就将本文的鲁棒性控制问题用一个 LMI 可行性问题来描述,近些年发展起来的内点法可以非常有效求解这一 LMI. 需要注意的是,虽然在分析中没有单独将  $B_w$  列出,但由于  $B_w$  的不确定性顶点与  $A$  完全相同,因此这对结论不会产生影响.

## 4 仿真结果及分析

根据实际车辆参数选取的车辆标称参数如表 1.

表 1 车辆标称参数

Tab. 1 Vehicle nominal parameters

参数	数量	参数	数量
$a$	1.0 m	$I_z$	1 443.1 kg · m <sup>2</sup>
$b$	1.5 m	$C_f$	30 kN · rad <sup>-1</sup>
$m$	1 270 kg	$C_r$	30 kN · rad <sup>-1</sup>

取  $q_1$  为  $1/v_x$  的不确定性,  $q_2$  为  $C_f$  的不确定性,  $q_3$  为  $C_r$  的不确定性; 设定  $x_e$  为 50 m,  $y_e$  为 3.5 m; 并设定系统预设镇定度为  $0.2^{[17]}$ . 选取 3 个不确定参数上下界如表 2 所示.

表 2 不确定性参数上下界

Tab. 2 Upper and lower bound of the uncertain parameters

参数	下界	上界
$v_x$	15 m · s <sup>-1</sup>	30 m · s <sup>-1</sup>
$C_f$	15 kN · rad <sup>-1</sup>	30 kN · rad <sup>-1</sup>
$C_r$	15 kN · rad <sup>-1</sup>	30 kN · rad <sup>-1</sup>

使用 Matlab 与 Carsim 软件联合仿真对轨迹跟踪效果进行验证. 仿真中车辆行驶 10 m 后向左侧车道变道, 分别在 100 km · h<sup>-1</sup>、80 km · h<sup>-1</sup>、60 km · h<sup>-1</sup> 3 种工况下对变道轨迹的跟踪效果进行仿真分析. 3 种工况下仿真结果如图 1 所示. 通过图 1 可以看出, 随着速度增加, 轨迹跟踪误差有所增加, 但在 3 种工况下都保证了车辆轨迹跟踪的稳定性. 分析 3 种工况下轨迹跟踪的均方根误差 (root mean square error, RMSE) 如图 2 所示.

可以看出, 随着速度增加, 轨迹跟踪误差随之增加. 但即使在轨迹跟踪误差最大的 100 km · h<sup>-1</sup> 工况下, 轨迹跟踪的均方根误差也不超过 0.035, 这表明本

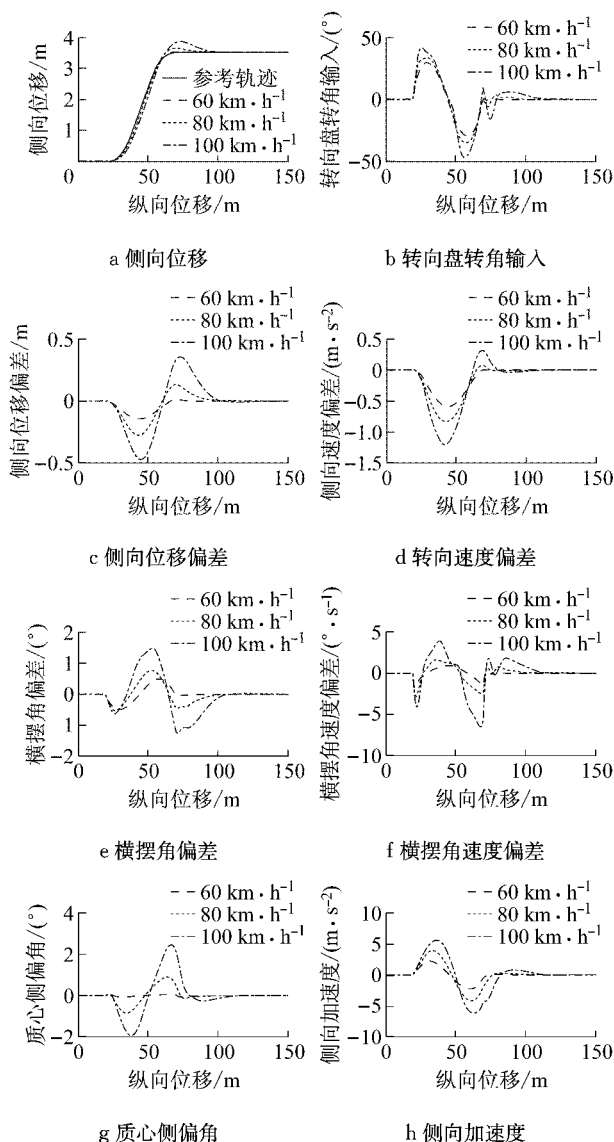


图 1 不同速度下仿真结果

Fig. 1 Simulation results during different speeds

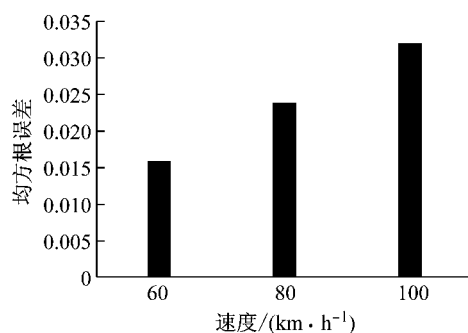


图 2 轨迹跟踪均方根误差

Fig. 2 RMSE of the trajectory following

文的轨迹跟踪策略能够保证良好的轨迹跟踪效果. 由于在 100 km · h<sup>-1</sup> 工况下, 车辆侧向加速度已经大于 0.4g, 而 100 km · h<sup>-1</sup> 工况下的轨迹跟踪效果没有明显恶化, 这表明轨迹跟踪策略能够保证车辆轨迹跟踪

的鲁棒性.

## 5 结论

(1) 基于侧向位移偏差和车辆横摆角偏差建立了车辆轨迹跟踪模型.

(2) 采用线性时变系统方法将车速、前后车辆侧偏刚度作为不确定性参数,得到了车辆轨迹跟踪的线性时变系统渐进稳定条件.

(3) 使用凸多面体方法进行了轨迹跟踪策略的鲁棒性设计.

(4) Matlab 和 Carsim 软件的联合仿真表明本文方法能够保证良好的轨迹跟踪效果.

## 参考文献:

- [1] TREAT J R, TUMBAS N, MCDONALD S, *et al.* Tri-level study of the causes of traffic accidents: final report[R]. Washington D C: National Highway Traffic Safety Administration, 1979.
- [2] ECKERT A, HARTMANN B, SEVENICH M, *et al.* Emergency steer & brake assist: a systematic approach for system integration of two complementary driver assistance systems [C]// 22nd International Technical Conference on the Enhanced Safety of Vehicles. Washington D C: National Highway Traffic Safety Administration, 2011: 1-9.
- [3] BEVAN G, GOLLEE H, O'REILLY J. Trajectory generation for road vehicle obstacle avoidance using convex optimization [J]. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part D: Journal of Automobile Engineering, 2010, 224(4): 455.
- [4] HATTORI Y, ONO E, HOSOE S. Optimum vehicle trajectory control for obstacle avoidance problem [J]. IEEE/ASME Transactions on Mechatronics, 2006, 11(5): 507.
- [5] MORIWAKI K. Autonomous steering control for electric vehicles using nonlinear state feedback  $H_{\infty}$  control[J]. Nonlinear Analysis, 2005, 63(3): 2257.
- [6] HU Chuan, JING Hui, WANG Rongrong, *et al.* Robust  $H_{\infty}$  output-feedback control for path following of autonomous ground vehicles[J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2016, 70/71(2): 414.
- [7] FALCONE P, BORRELLI F, ASGARI J, *et al.* Predictive active steering control for autonomous vehicle systems [J]. IEEE Transactions on Control Systems Technology, 2007, 15(3): 566.
- [8] NANA O M, OHTSUKA T. Nonlinear model predictive control for vehicle collision avoidance using C/GMRES algorithm[C]// 2010 IEEE International Conference on Control Applications. Yokohama: IEEE, 2010: 1630-1635.
- [9] 龚建伟, 姜岩, 徐威. 无人驾驶车辆模型预测控制[M]. 北京: 北京理工大学出版社, 2014.  
GONG Jianwei, JIANG Yan, XU Wei. Model predictive control for self-driving vehicles[M]. Beijing: Beijing Institute of Technology Press, 2014.
- [10] 赵又群, 王健, 季学武, 等. 紧急避让路径跟踪自抗扰控制[J]. 同济大学学报(自然科学版), 2015, 43(8): 1200.  
ZHAO Youqun, WANG Jian, JI Xuewu, *et al.* Path tracking for evasive collision avoidance based on active disturbance rejection control[J]. Journal of Tongji University (Natural Science), 2015, 43(8): 1200.
- [11] SLEDGE N H, MARSHEK K M. Comparison of ideal vehicle lane-change trajectories[C]// SAE Technical Paper Series. Detroit: SAE Publication Group, 1997: 971062.
- [12] SOUDBAKHSH D, ESKANDARIAN A. A collision avoidance steering controller using linear quadratic regulator [C]// SAE Technical Paper Series. Detroit: SAE Publication Group, 2010: 2010-01-0459.
- [13] 米奇克, 瓦伦托维兹. 汽车系统动力学[M]. 陈荫三, 余强, 译. 北京: 清华大学出版社, 2009.  
MITSCHKE M, WALLENTOWITZ H. Vehicle dynamics [M]. Translated by CHEN Yinsan, YU Qiang. Beijing: Tsinghua University Press, 2009.
- [14] CHEN Chi-Tsong. Linear system theory and design[M]. 4th ed. Oxford: Oxford University Press, 2012.
- [15] BOYD S, GHAOUI L E, FERON E, *et al.* Linear matrix inequalities in system and control theory[M]. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1994.
- [16] SCHWEPPE F C. Uncertain dynamic systems[M]. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1973.
- [17] ANDERSON B D O, MOORE J B. Linear system optimization with prescribed degree of stability[C]// Proceedings of the Institution of Electrical Engineers. London: The Institution of Engineering and Technology, 1969: 2083-2087.