

含有多种最低利益保证的变额年金定价

董冰, 许威

(同济大学 数学科学学院, 上海 200092)

摘要: 我国人口老龄化速度加快, 具有抗通胀、养老和投资功能的变额年金产品引起了人们的关注. 对同时含有多种最低利益保证的变额年金定价进行研究. 首先在跳扩散模型下, 提出了柳树法定价变额年金的数值方法. 同时考虑了返回初值型、Roll-up 型和 Ratchet 型的最低利益保证. 本文方法可以很容易推广到其他的随机过程, 并且柳树构建过程和定价过程相互独立, 在不同的风险资产价格过程下定价, 无需额外的工作量, 具有较高的通用性. 相比于现有的方法, 降低了计算维度, 减少了计算时间. 最后通过数值试验, 与蒙特卡洛法进行对比, 说明了本文方法的准确性、高效性.

关键词: 变额年金定价; 最低利益保证; 跳扩散模型; 柳树法

中图分类号: O29

文献标志码: A

Pricing Variable Annuities Embedding Various Guaranteed Minimum Benefits

DONG Bing, XU Wei

(School of Mathematical Sciences, Tongji University, Shanghai 200092, China)

Abstract: With the acceleration of population aging in China, the variable annuities have drawn a lot of attentions due to its anti-inflation, pension and investment functions. This paper studies the valuation of variable annuities embedding various guaranteed minimum benefits. We propose a willow tree method for pricing variable annuities under the jump-diffusion model in three guarantee types, including return of premium, Roll-up and Ratchet types. Our tree structure can be easily extended to other stochastic models. The willow tree construction and pricing procedure are independent of each other. Thus, for different stochastic models, it does not need extra work and has better applicability. Finally, numerical experiments demonstrate the accuracy and high efficiency of the proposed method compared with Monte Carlo method.

Key words: variable annuity valuation; guaranteed minimum

benefits; jump-diffusion model; willow tree method

随着金融市场的不断发展和人口老龄化进程的加快, 养老问题受到社会的日益关注. 养老保险制度的三大支柱为社会基本养老保险、企业年金和个人商业养老保险. 在我国, 社会基本养老保险占主导地位. 企业年金发展较为缓慢且覆盖率很低. 根据《中国社会保险发展年度报告 2016》的统计结果, 参加企业年金的职工人数为 2 325 万, 占参加城镇职工基本养老保险总人数的 6.13%, 有 7.63 万户企业建立了企业年金, 仅占企业法人单位数量的 0.35%. 正是因为企业年金的发展效率低, 个人商业养老保险市场存在着巨大的发展空间^[1], 同时其重要性也愈发明. 但是随着通货膨胀的加剧, 曾经作为商业养老保险主要产品的定额年金已然不足以满足现有的养老保障需求, 投资者更为关注的是购买力的稳定. 于是保险公司将目光投向证券市场, 开始提供同证券市场相关联、与投资收益挂钩的变额年金产品.

中国保监会从 2010 年起逐步推荐变额年金的开发与试点工作, 以丰富寿险产品结构, 促进养老保险产品发展, 满足保险消费者的需求, 提升行业管理水平. 2010 年 3 月, 保监会印发《2010 年人身保险监管工作要点》^[2]中表示, 要启动变额年金产品研究, 选择适当时机审慎开展变额年金业务试点. 2011 年 5 月, 中国保监会发布了《关于开展变额年金保险试点的通知》和《变额年金保险管理暂行办法》^[3], 变额年金产品正式进入我国的保险市场.

变额年金是一种与投资账户关联的保险合同. 投保者可以共享投资账户的市场收益, 并且能规避市场下跌的风险. 由于具有最低利益保证以及投资资产价值可随资本市场变动调节的功能, 变额年金

收稿日期: 2019-01-25

基金项目: 国家自然科学基金面上项目(71771175)

第一作者: 董冰(1992—), 女, 博士生, 主要研究方向为金融数学. E-mail: dong_bing@tongji.edu.cn

通信作者: 许威(1978—), 男, 副教授, 博士生导师, 理学博士, 主要研究方向为金融数学. E-mail: wdxu@tongji.edu.cn

产品引起了各界人士的广泛关注,并逐渐成为可以信赖的长期养老规划选择.授权的保险公司也都在积极讨论变额年金的定价和风险控制方法,因此,变额年金定价研究有积极的理论与现实意义.

变额年金的定价在国内外吸引了大量的学者研究.常见的最低利益保证包括:最低死亡利益保证(GMDB)、最低提取利益保证(GMWB)、最低累积利益保证(GMAB)和最低收入利益保证(GMIB).Bauer等^[4]在几何布朗运动下,运用了蒙特卡洛法和一种基于高维网格的数值方法对含有GMDB、GMWB、GMAB和GMIB的变额年金进行定价.但是其数值计算维度比较高,计算比较耗时.在一般随机模型下进行定价,目前二叉树方法实现起来比较困难.同时由于变额年金产品相对复杂,合约中多个账户价值路径依赖性较强,在一般随机模型下微分方程(PDE)的构建也比较困难.所以现有的方法基本都是基于蒙特卡洛法进行计算.Bacinello等^[5]运用了蒙特卡洛法对变额年金进行定价,考虑了GMDB和一种最低生存利益保证(GMLB)合约,该方法没有将多种利益保证同时包含进来,并且计算成本也比较高.Kelani和Quittard-Pinon^[6]在Lévy过程下,对变额年金的定价与风险管理方法进行研究,他们只考虑了GMAB(GMMB)和GMDB条款.赵桂芹等^[7]也是只考虑了含有GMAB和GMDB条款的变额年金定价,难度最大的GMWB条款没有在定价中考虑.近几年,许多学者对GMWB的定价方法进行研究,提出了一系列的方法,如文献[8-15].以上的定价方法中,Bauer等^[4]的方法数值计算维度比较高,计算比较耗时,并且其风险资产的价格只考虑了几何布朗运动模型.其他现有的定价方法仅考虑了GMDB、GMWB、GMAB和GMIB中的一个或者部分利益保证,没有将所有的利益保证同时考虑,并且都是在指定的风险资产价格过程下进行定价,很难将其推广到其他模型.

本文对包含GMDB、GMWB、GMAB和GMIB多种最低利益保证的变额年金定价.首先对标的风险资产的价格进行采样估计,采用了柳树法的思想(Curran^[16], Xu等^[17]),以Merton跳扩散模型^[18]为例,建立风险资产价格柳树.相比于常见的几何布朗运动模型,跳扩散模型能够更好地拟合标的资产收益尖峰厚尾的特性.本文的方法可以很容易推广到其他的风险资产价格过程,可以根据风险资产价格过程的四阶矩来构建柳树,例如CEV模型^[14]

和一般的Lévy过程等,具有较高的通用性.然后在此基础上,提出一种准确、快速的数值定价方法,可以对同时含有GMDB、GMWB、GMAB和GMIB条款的变额年金合约定价.相比于Bauer等^[4]的方法,降低了计算的维度.并且风险资产价格柳树的构建过程和定价过程相互独立,可以很容易实现不同模型的转换.最后,通过数值实验,与蒙特卡洛法结果进行对比,并进行敏感性分析.同时也考虑了返回初值型(return of premium)、Roll-up型和Ratchet型最低利益保证的变额年金的定价.数值结果显示了本文数值方法的有效性,并且大大缩短了计算时间.

1 变额年金合约介绍

假设合约到期日为 T ,初始时刻投保者投资 A_0 到一个风险资产账户.记 t 时刻投资账户价值为 A_t ,投资账户的价值根据风险资产的收益、投保者提取收益以及保费 α 决定.

若变额年金合约含有GMDB条款,如果投保者在 t 时刻死亡,合约保证投保者在死亡时刻得到最低死亡利益保证 G_t^D .

若变额年金合约含有GMAB或GMIB条款,如果投保者在合约到期日 T 还存活,合约给予投保者在到期日的最低利益保证.GMAB保证投保者在到期日收到最低累积利益保证 G_T^A .GMIB在合约到期日提供给投保人3种选择:①提取账户余额;②将账户余额转变成一个固定年金;③将最低利益保证 G_T^I 按照合约初始时刻约定的年金转换因子(annuitization rate)转变成固定年金.

若变额年金合约含有GMWB条款,合约保证投保者在整个合约的期限内可以提取指定的金额 G^W (通常为初始投资 A_0).无论账户价值是否为零,投保者可以按照合约规定,从账户中定期提取一定比例 X_w 的收益.同时,投保者提取金额可以大于或者小于合约约定的金额,但超出部分需要收取一定比例 η 的罚金.

假设合约期限 $[0, T]$ 内共有 N 个提现日 $\{t_n, n=1, \dots, N\}$,记为 $0=t_0 < t_1 < \dots < t_N = T, t_n = n\Delta t$.定义 W_t 为初始时刻到 t 时刻累积的提取收益(贴现到 t 时刻), D_t 为 t 时刻的死亡收益, L_T 为到期收益.在整个合约的期限内,最低到期收益保证可能随着时间变化,故令 G_t^A 和 G_t^I 代表到期日最低累积利益保证和最低收入利益保证在 t 时刻的

值. 同样, 令 G_t^W 代表最低提取利益保证值, G_t^F 代表每个提现日合约规定的提取金额. 用 $(\cdot)^-$ 和 $(\cdot)^+$ 分别代表提现之前和之后的瞬间对应的变量的值. 记风险资产价格在 t 时刻的价格为 S_t . 后文的推导都是在提现日 $t_n, n=1, \dots, N$ 进行, 为了简化符号, 在后文中用下标 n 代替 t_n , 即 $S_n \equiv S_{t_n}$.

给定提取策略 $\xi = \{\xi_n\}, n=1, \dots, N$, 若投保者在 t_n 时刻死亡(把在 $(t_{n-1}, t_n]$ 时间内死亡均看作在 t_n 时死亡), 投保者会得到一定的死亡收益和提取收益, 将其贴现到 T 时刻分别为 $D_T(t_n; \xi)$ 和 $W_T(t_n; \xi)$. 若投保者在合约到期日 T 时刻还存活, 则会收到到期收益 $L_T(T+1, \xi)$ 和提取收益 $W_T(T+1, \xi)$. 因此, 含有以上所有利益保证的变额年金合约的初始价值 V_0 为^[4]:

$$V_0(\xi) = \sum_{n=1}^N \tilde{P}_{x_0, t_{n-1}} \cdot \tilde{Q}_{x_0+t_{n-1}, \Delta} \cdot E_Q[e^{-rT} (W_T(t_n; \xi) + D_T(t_n; \xi))] + \tilde{P}_{x_0, T} E_Q[e^{-rT} (L_T(T+1; \xi) + W_T(T+1; \xi))] \quad (1)$$

式中: $\tilde{P}_{x_0, t}$ 是年龄为 x_0 的投保者在未来 t 年的生存概率; $\tilde{Q}_{x_0+t_{n-1}, \Delta}$ 是年龄为 x_0 的投保者在 t_{n-1} 时刻存活的条件下在 $(t_{n-1}, t_{n-1} + \Delta t]$ 时间内的死亡概率.

由于含有 GMWB、GMDB、GMAB 和 GMIB 的变额年金合约条款比较复杂, 账户价值、利益保证值和合约价值具有较强的路径依赖性, 定价公式(1)中的各个变量以及期望值的求解难度比较大, 通常只能运用蒙特卡洛法^[4].

2 柳树法定价变额年金

首先在跳扩散模型下建立风险资产价格柳树, 然后对账户价值和利益保证值进行推导和估计, 在此基础上提出变额年金的定价方法.

2.1 风险资产价格柳树的构建

柳树法由 Curran^[16] 提出, Xu 等^[17] 对其进行了改进. 柳树法是用每个时刻上离散值表示资产价格的分布, 用转移概率刻画分布随时间的变化. 图 1 为一个含有 4 个时刻和 5 个空间节点的柳树结构示意图. 对于一般的柳树结构, 每个时刻的空间节点数相同, 可以是任意常数, 空间节点数一般取 30 至 50.

假设风险资产价格服从 Merton 跳扩散过程

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = (r - \lambda \bar{k}) dt + \sigma dB(t) + [Y(t) - 1] dN(t) \quad (2)$$

式中: r 是无风险利率; $B(t)$ 是标准的 Q 布朗运动;

$\ln Y(t)$ 服从均值为 α_j 方差为 σ_j^2 的正态分布; $Y(t)-1$ 的期望为 $\bar{k} = E[Y(t)-1]$; $N(t)$ 是强度为 λ 的泊松过程.

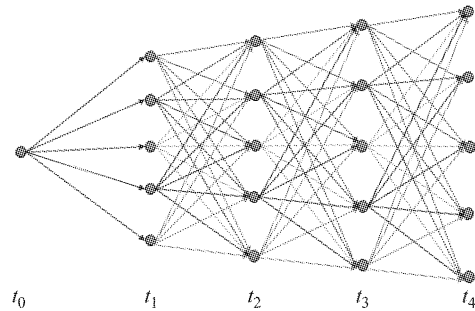


图 1 含有 4 个时刻和 5 个空间节点的柳树示意

Fig.1 Graphical depiction of the willow tree lattice with 4 time nodes and 5 space nodes

构造柳树结构包括两部分: 资产价格的估计和转移概率的计算. Xu 和 Yin^[19] 提出了跳扩散模型下柳树的构建方法, 姚怡等^[20] 在此基础上对转移概率做了进一步修正. 本文在 Xu 和 Yin^[19] 和姚怡等^[20] 构建的柳树的基础上进行定价.

2.1.1 资产价格估计

在 Merton 跳扩散模型下, 在每个提现日 t_n , 假设有 m 个资产价格 $S_n^i, i=1, 2, \dots, m$. 考虑对数收益 $X_t = \ln(S_t/S_0)$, 根据 Ballotta 和 Kyriakou^[21] 的推导, 可以得到 X_t 的期望 μ 、方差 ν 、偏度 κ_3 和峰度 κ_4 分别为

$$\begin{cases} \mu = (r - \sigma^2/2 - \lambda \bar{k} + \lambda \alpha_j) t \\ \nu = (\sigma^2 + \lambda \alpha_j^2 + \lambda \sigma_j^2) t \\ \kappa_3 = \frac{1}{\sqrt{t}} \left(\frac{\lambda (\alpha_j^3 + 3\alpha_j \sigma_j^2)}{(\sigma^2 + \lambda \alpha_j^2 + \lambda \sigma_j^2)^{3/2}} \right) \\ \kappa_4 = 3 + \frac{1}{t} \left(\frac{\lambda (\alpha_j^4 + 6\alpha_j^2 \sigma_j^2 + 3\sigma_j^4)}{(\sigma^2 + \lambda \alpha_j^2 + \lambda \sigma_j^2)^2} \right) \end{cases}$$

给定 X_t 的四阶矩, 可利用 Johnson 曲线^[22] 转换公式的逆变换, 将一个标准正态分布的随机变量 z 的估计转换成给定分布 X_t 的估计. 根据 X_t 的四阶矩, 可以得到 $X_n^i, i=1, \dots, m$ 的估计为

$$X_n^i = \varepsilon g^{-1} \left(\frac{z_i - \gamma}{\delta} \right) + \nu$$

其中, $\gamma, \delta, \nu, \varepsilon$ 和 $g^{-1}(\cdot)$ 可以由 Hill 提出的算法^[23] 根据随机变量 X_n 的四阶矩得到, z_i 是离散的正态分布的代表值(见 Xu 等^[17]). 从而得到柳树上每一点的风险资产价格为 $S_n^i = S_0 e^{X_n^i}$.

2.1.2 转移概率计算

从 $\ln S_n^i$ 到 $\ln S_{n+1}^i$ 的转移概率为(见 Xu 和 Yin^[19])

$$p_{ij}^n = P(A < X_{n+1}^j < B | X_n^i) =$$

$$\int_A \sum_{l=0}^B \frac{e^{-\lambda \Delta t} (\lambda \Delta t)^l}{l!} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_l}} \exp\left(-\frac{(x-\mu_l)^2}{2\sigma_l^2}\right) dx$$

其中 $A = (X_{n+1}^- + X_{n+1}^+)/2$, $B = (X_{n+1}^+ + X_{n+1}^-)/2$, $\mu_l = X_n^i + \left(r - \lambda \bar{k} - \frac{\sigma^2}{2}\right) \Delta t + l\alpha_j$ 和 $\sigma_l^2 = \sigma^2 \Delta t + l\sigma_j^2$.

记从 t_n 时刻到 t_{n+1} 时刻的转移概率矩阵为 $[p_{ij}^n]_{m \times m}$, 从 t_0 时刻到 t_1 时刻的转移概率记为 $q_1 = [q_1^1, q_1^2, \dots, q_1^m]$, 其中 q_1^i 为从 $\ln S_0$ 到 $\ln S_1^i$ 的转移概率.

2.2 变额年金的定价方法

变额年金合约中各个变量的演变过程比较复杂, 具有很强的路径依赖性. 变额年金的价值依赖于账户价值和多种利益保证值, 其定价问题是一个高维的问题. 下面在柳树法框架下对账户价值进行估计, 然后在此基础上将多种利益保证值进行推导, 可以将此高维问题进行降维处理, 然后基于公式(1)对变额年金定价.

首先介绍变额年金中的账户价值变化. 从 t_{n-1} 到 t_n 时刻, 若风险资产价格从 S_{n-1} 变为 S_n , 给定保费 α 以及提取策略 $\xi = \{\xi_n\}$, 投资账户 A_n 的价值变化如下:

$$A_n^- = A_{n-1}^+ \frac{S_n}{S_{n-1}} e^{-\alpha \Delta t}$$

$$A_n^+ = \max\{A_n^- - \xi_n, 0\}$$

对于任意一条资产价格的路径从 S_0 到 $S_n (n > 0)$, 若将平均收益 $y \equiv \sqrt[n]{S_n/S_0} = \sqrt[n]{S_n}$ 视为相邻 2 个提现日的收益(假设 $S_0 = 1$). 给定提款策略 $\xi = \{\xi_n\}$, 投资账户价值可以根据如下定理计算.

定理 1 给定提款策略 $\xi = \{\xi_n\}$ 、保费 α 和初始投资 A_0 , 当风险资产价格从 S_0 变到 S_n , 2 个相邻提现日的平均收益为 $y \equiv \sqrt[n]{S_n/S_0} = \sqrt[n]{S_n}$, 在 t_n 时刻投资账户价值为

$$A_n^- = \max\left\{A_0 S_n e^{-n\alpha \Delta t} - A_0 \sum_{k=1}^{n-1} \xi_k (ye^{-\alpha \Delta t})^{n-k}, 0\right\}$$

$$A_n^+ = \max\{A_n^- - \xi_n, 0\} =$$

$$\max\left\{A_0 S_n e^{-n\alpha \Delta t} - A_0 \sum_{k=1}^n \xi_k (ye^{-\alpha \Delta t})^{n-k}, 0\right\}$$

证明 下面运用数学归纳法证明.

当 $t = t_1$, 平均收益 $y \equiv S_1$, $A_1^- = A_0 ye^{-\alpha \Delta t}$, $A_1^+ = \max\{A_1^- - \xi_1, 0\} = \max\{A_0 ye^{-\alpha \Delta t} - \xi_1, 0\}$.

假设当 $t = t_{n-1}$ 时, 有

$$A_{n-1}^- = \max\left\{A_0 S_{n-1} e^{-(n-1)\alpha \Delta t} - A_0 \sum_{k=1}^{n-2} \xi_k (ye^{-\alpha \Delta t})^{n-k-1}, 0\right\}$$

$$A_{n-1}^+ = \max\{A_{n-1}^- - \xi_{n-1}, 0\} =$$

$$\max\left\{A_0 S_{n-1} e^{-(n-1)\alpha \Delta t} - A_0 \sum_{k=1}^{n-1} \xi_k (ye^{-\alpha \Delta t})^{n-k-1}, 0\right\}$$

成立, 则当 $t = t_n$ 时, 平均收益为 $y \equiv \sqrt[n]{S_n}$, 有

$$A_n^- = \max\left\{A_0 S_n e^{-n\alpha \Delta t} - A_0 \sum_{k=1}^{n-1} \xi_k (ye^{-\alpha \Delta t})^{n-k}, 0\right\}$$

$$A_n^+ = \max\{A_n^- - \xi_n, 0\} =$$

$$\max\left\{A_0 S_n e^{-n\alpha \Delta t} - A_0 \sum_{k=1}^n \xi_k (ye^{-\alpha \Delta t})^{n-k}, 0\right\}$$

根据定理 1, 对于任意一条资产价格的路径从 S_0 到 $S_n^i (n > 0)$, 若将平均收益 $y \equiv \sqrt[n]{S_n^i/S_0} = \sqrt[n]{S_n^i}$ 视为相邻 2 个提现日的收益. 投资账户价值 A_n^i 从 S_0 到 $S_n^i (n > 0)$ 可以估计为

$$A_n^{i-} = \max\left\{A_0 S_n^i e^{-n\alpha \Delta t} - A_0 \sum_{k=1}^{n-1} \xi_k (ye^{-\alpha \Delta t})^{n-k}, 0\right\} \quad (3)$$

$$A_n^{i+} = \max\{A_n^{i-} - \xi_n, 0\} =$$

$$\max\left\{A_0 S_n^i e^{-n\alpha \Delta t} - A_0 \sum_{k=1}^n \xi_k (ye^{-\alpha \Delta t})^{n-k}, 0\right\} \quad (4)$$

因此, 给定提取策略 $\xi = \{\xi_n\}$, 对于任意一个风险资产价格 S_n^i , 可以得到投资账户价值 A_n^{i-} 和 A_n^{i+} .

若给定提取策略 $\xi = \{\xi_n\}$ 、风险资产价格 $\{S_n^i\}$ 以及投资账户价值 $\{A_n^i\}$, 对于含有 GMDB、GMWB、GMAB 和 GMIB 的变额年金合约, 定价公式(1)中的各个到期收益随时间变化的计算方法如下.

(1) 在初始时刻 $t = 0$, 死亡收益和累积提取收益为零, 即 $D_0^+ = 0, W_0^+ = 0$. 如果合约含有相应的最低利益保证, 则 $G_0^{D^+/W/A/I^+} = A_0, G_0^{E^+} = X_w G_0^W$. 反之, 对应的最低利益保证为零.

(2) 如果投保者在 $(t_{n-1}, t_n]$ ($1 \leq n \leq N$) 内死亡, 需要计算 $D_T(t_n; \xi)$ 和 $W_T(t_n; \xi)$ 的值. 在 t_n 时刻, 投资账户价值 A_n^{i-} 可以根据式(3)、(4)计算. 如果投保者在 $(t_{n-1}, t_n]$ 内死亡, 当风险资产价格为 S_n^i 时, 会得到收益为 $\max\{G_{n,i}^{D^-}, A_n^{i-}\}$. 所以, 对应的死亡收益 $D_T^i(t_n; \xi)$ 为

$$D_T^i(t_n; \xi) = e^{r(N-n)\Delta t} \max\{G_{n,i}^{D^-}, A_n^{i-}\}, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

其中, $G_{n,i}^{D^-}$ 为对应的最低死亡利益保证, 其计算方法会在后文进行介绍. 提取收益累积按照无风险利率累积到 T 时刻的价值 $W_T(t_n; \xi)$ 为

$$W_T(t_n; \xi) = W_{n-1}^+ e^{r(N-n+1)\Delta t}$$

其中, W_{n-1}^+ 为 t_{n-1}^+ 时刻的累积提取收益.

(3) 若投保者在 $(t_{n-1}, t_n]$ 时间内存活, t_n 时刻投保者从账户中提取 ξ_n , 累积提取收益 W_n 为

$$W_n^- = W_{n-1}^+ e^{r\Delta t}$$

$$W_n^+ = \begin{cases} W_n^- + \xi_n, & \xi_n \leq E_n \\ W_n^- + E_n + (1 - \eta)(\xi_n - E_n), & \xi_n > E_n \end{cases}$$

其中, E_n 是合约约定每次提取的金额, 即 $E_n = \min\{G_n^{W-}, G_n^{E-}\}$.

(4) 在合约到期日 T , 如果投保者仍然存活, 累积提取收益为

$$W_T(T+1; \xi) = W_n^+$$

此时, GMAB 和 GMIB 生效, 当风险资产价格为 S_n 时, 对应的到期收益 $L_T^i(T+1; \xi)$ 为

$$L_T^i(T+1; \xi) = L_T^{i+} \text{ 或 } L_T^{i-}, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

其中 $L_T^{i+} = \max\{A_n^{i+}, G_{n,i}^{i+}\}$, $L_T^{i-} = \max\{A_n^{i-}, G_{n,i}^{i-} \cdot \bar{g} \cdot \bar{a}_T\}$, \bar{a}_T 为一个每年支付一元到期日为 T 的固定年金的市场价格, \bar{g} 为变额年金初始时刻指定的年金转换因子. 如果变额年金合约既不含有 GMAB 也不含有 GMIB, 则 $L_T(T+1; \xi) = 0$.

下面介绍最低利益保证 $G_{n,i}^{D/A/1}$ 和 $G_n^{W/E}$ 的计算方法. 如果 GMDB/GMAB/GMIB 是返回初值型 (return of premium), 在 t_n 时刻, 最低利益保证变化为 $G_n^{D/A/1-} = G_{n-1}^{D/A/1+}$ 和 $G_n^{D/A/1+} = G_{n-1}^{D/A/1-} \cdot \frac{A_n^+}{A_n^-}$.

定理 2 当风险资产价格从 t_0 时刻 S_0 变到 t_n 时刻 S_n , 在 t_n 时刻, 给定保费 α 和 t_n 时刻投资账户价值 A_n^- 和 A_n^+ , 返回初值型最低死亡利益保证 G_n^D 为

$$G_n^{D-} = G_{n-1}^{D+} = \frac{A_{n-1}^-}{e^{-n\alpha\Delta t} S_{n-1}}$$

$$G_n^{D+} = G_n^{D-} \frac{A_n^+}{A_n^-} = \frac{A_n^+}{e^{-n\alpha\Delta t} S_n}$$

证明 下面运用数学归纳法进行证明. 假设风险资产价格路径为 $S_0, S_1, S_2, \dots, S_n$.

在 t_0 时刻, $G_0^{D+} = A_0$.

在 t_{n-1} 时刻, 若 $G_{n-1}^{D-} = \frac{A_{n-1}^-}{e^{-(n-1)\alpha\Delta t} S_{n-1}}$ 成立, 则在 t_n 时刻, 有

$$G_n^{D-} = G_{n-1}^{D+} = \frac{A_{n-1}^+}{e^{-(n-1)\alpha\Delta t} S_{n-1}} = \frac{A_n^- \frac{S_{n-1}}{S_n} e^{\alpha\Delta t}}{e^{-(n-1)\alpha\Delta t} S_{n-1}} = \frac{A_n^-}{e^{-n\alpha\Delta t} S_n}$$

$$G_n^{D+} = G_n^{D-} \frac{A_n^+}{A_n^-} = \frac{A_n^+}{e^{-n\alpha\Delta t} S_n}$$

根据定理 2, 对于任意的风险资产价格路径从 S_0 到 S_n^i , 可以得到最低死亡利益保证 G_n^D 为: $G_{n,i}^{D-} = \frac{A_n^{i-}}{e^{-n\alpha\Delta t} S_n^i}$, $G_{n,i}^{D+} = \frac{A_n^{i+}}{e^{-n\alpha\Delta t} S_n^i}$, 从而 $G_{n,i}^{D/A/1}$ 的表达式为

$$\begin{cases} G_{n,i}^{D/A/1-} = \frac{A_n^{i-}}{e^{-n\alpha\Delta t} S_n^i} \\ G_{n,i}^{D/A/1+} = \frac{A_n^{i+}}{e^{-n\alpha\Delta t} S_n^i} \end{cases} \quad (5)$$

如果 GMDB/GMAB/GMIB 是 Roll-up 型, 在

第一次提现之前, 最低利益保证变化为 $G_n^{D/A/1-} = G_{n-1}^{D/A/1+} (1+i_r)$, $G_n^{D/A/1+} = G_{n-1}^{D/A/1-} \cdot \frac{A_n^+}{A_n^-}$, 其中, i_r 是

每年的 roll-up 比率. 类似可得 $G_{n,i}^{D/A/1}$ 的表达式为

$$G_{n,i}^{D/A/1-} = \frac{A_n^{i-} (1+i_r)^{\bar{n}}}{e^{-n\alpha\Delta t} S_n^i}, \quad G_{n,i}^{D/A/1+} = \frac{A_n^{i+} (1+i_r)^{\bar{n}}}{e^{-n\alpha\Delta t} S_n^i}.$$

其中

$$\bar{n} = \begin{cases} n, & \text{如果 } t_n \text{ 前没有取款} \\ n_1 - 1, & \text{如果 } t_{n_1} \text{ 时刻第 1 次取款} \end{cases}$$

对于 Ratchet 型 GMDB/GMAB/GMIB 合约, 在 t_n 时刻, GMDB、GMAB 和 GMIB 最低利益保证更新为 $G_n^{D/A/1-} = G_{n-1}^{D/A/1+}$, $G_n^{D/A/1+} = \max\left\{G_{n-1}^{D/A/1-} \cdot \frac{A_n^+}{A_n^-}, A_n^+\right\}$.

下面以 Ratchet 型 GMDB 为例, 介绍 G_n^D 的变化.

当 $n=1$ 时, 有

$$G_{1,i}^{D-} = G_0^{D+} = A_0$$

当 $n>1$ 时, 最低死亡利益保证估计为

$$G_{n,i}^{D-} = \sum_{j=1}^m p_{ji}^{n-1} G_{n-1,j}^{D+}$$

其中 p_{ji}^{n-1} 是样本点 S_{n-1}^j 到 S_n^i 的转移概率, 即条件概率 $P(\ln S_n^i | \ln S_{n-1}^j)$.

对于任意的 $n \geq 1$, 有

$$G_{n,i}^{D+} = \max\left\{G_{n,i}^{D-} \cdot \frac{A_n^{i+}}{A_n^{i-}}, A_n^{i+}\right\}$$

同理, 可以用同样的方法估计 $G_{n,i}^{A/1}$ 的值.

如果合约含有 GMWB 条款, 在 t_n 时刻, 其最低提取利益保证 $G_n^{W/E}$ 为

$$G_n^{W/E-} = G_{n-1}^{W/E+}$$

$$G_n^{W+} = G_n^{W-} - \xi_n, \quad G_n^{E+} = G_n^{E-} \cdot \frac{G_n^{W+}}{G_n^{W-}}$$

基于以上风险资产价格柳树的构建以及变额年金定价公式中各个变量的计算, 若给定提取策略 $\xi = \{\xi_n\}$ 和保费 α , 式(1)中变额年金合约的初始价值可表示为

$$V_0 = \sum_{n=1}^N \tilde{P}_{x_0, t_{n-1}} \cdot \tilde{Q}_{x_0+t_{n-1}, \Delta t} \sum_{i=1}^m q_n^i e^{-rT} [W_T(t_n) + D_T^i(t_n)] + \tilde{P}_{x_0, T} \sum_{i=1}^m q_n^i e^{-rT} [L_T^i(T+1) + W_T(T+1)] \quad (6)$$

其中, q_n^i 为 t_n 时刻柳树上每个节点 $\ln S_n^i$ 出现的概率. 在 t_1 时刻, q_1^i 为从 $\ln S_0$ 到 $\ln S_1^i$ 的转移概率,

记 $\mathbf{q}_1 = [q_1^1, q_1^2, \dots, q_1^m]$. 在 t_n 时刻, q_n^i 为柳树上每个节点 $\ln S_n^i$ 出现的概率, 可以根据转移概率求得, 表示为

$$\mathbf{q}_n = [q_n^1, q_n^2, \dots, q_n^m] = \mathbf{q}_{n-1} \cdot [p_{ij}^{n-1}]$$

柳树法可以对定价公式(1)中的期望通过定价公式(6)中求和方式进行简单的估计. 可以看出, 柳树法可以很容易解决合约中较强的路径依赖性问题, 简化了账户价值以及多种利益保证值的计算, 从而降低了计算维度, 节省了计算时间.

若要对保费进行定价, 由于 V_0 随着保费 α 单调递减, 故可以运用一般的零点求解方法(例如: 二分法), 令 $V_0 = A_0$, 求解保费 α .

3 数值结果

在跳扩散模型下, 对变额年金进行定价, 将提出的数值方法与蒙特卡洛法进行对比. 假设投保者为 40 岁男性(生存概率和死亡率采用 1994 Group Annuitant Mortality (GAM) 和 1994 Mortality Improvement Projection Scale^[24]), 投资账户的初始价值为 $A_0 = 100$, 风险资产初始价格 $S_0 = 1$. 考虑含有 GMDB、GMWB 和 GMAB 的变额年金合约(GMIB 的定价与 GMAB 类似, 这里以 GMAB 为例). 除非特别说明, 投保者的提取策略为每年从账户中提取合约约定的金额, 即 $\{\xi_n = E_n\}$, 最低利益保证为返回初值型, 参数选取为 $T = 20$, $r = 3.25\%$, $\alpha = 100 \times 10^{-4}$, $\sigma = 0.1114$, $\alpha_j = -0.1825$, $\sigma_j = 0.1094$, $\lambda = 0.5282$. 跳扩散模型参数参考 Bacinello 等^[12]中运用 S&P 500 期权价格校正的参数. 数值结果中, WT 为柳树法的结果, WT30 代表柳树法资产价格节点个数 $m=30$ 时对应的结果, WT50 代表柳树法 $m=50$ 时对应的结果, MC 为蒙特卡洛法的结果, 以 MC_99_下界、MC_99_上界代表蒙特卡洛法的 99% 置信区间的上界和下界, 蒙特卡洛模拟 10^4 次. 本文只将柳树法与蒙特卡洛法定价结果进行对比, 因为其他数值方法(如二叉树方法和 PDE 方法等)在一般模型下对含有多种最低利益保证的变额年金定价实现起来比较困难. 所有数值实验在操作系统为 Windows 10 的计算机上运行, 内存 8GB, 处理器为 Intel(R) Core (TM) i7-5600U CPU @ 2.60 GHz, 软件版本为 MATLAB R2017b.

实验比较了不同的参数对变额年金初始价值的影响, 包括: 保费 α 、利率 r 、跳扩散模型参数 λ 和 σ .

同时也比较了返回初值型、Roll-up 型和 Ratchet 型利益保证的定价结果.

首先, 考虑保费 α 对合约初始价值的影响. 图 2 为跳扩散模型下, 合约初始价值 V_0 随保费 α 的变化趋势. 随着保费 α 的增大, 变额年金合约的初始价值变小. 可以看出柳树法结果落在蒙特卡洛法的 99% 置信区间内, 由此说明了柳树法的准确性.

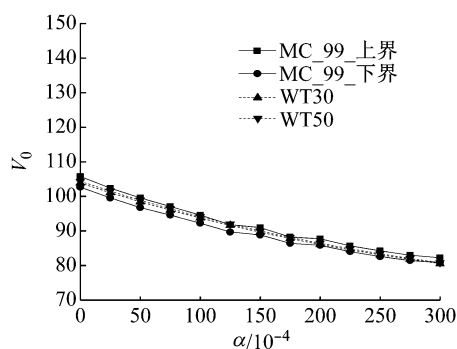


图 2 合约价值随保费的变化

Fig. 2 Computed variable annuity values with various insurance fee

接下来, 讨论利率对变额年金初始价值的影响. 图 3 为合约初始价值 V_0 随利率 r 的变化结果. 可以看出, 随着利率的增大, 合约价值在变小. 柳树法计算的结果落在蒙特卡洛法的 99% 置信区间内. 由于变额年金的合约期限较长, 故利率对合约价值的影响比较明显. 因此, 利率的影响是保险公司定价变额年金产品时需要慎重考虑的因素.

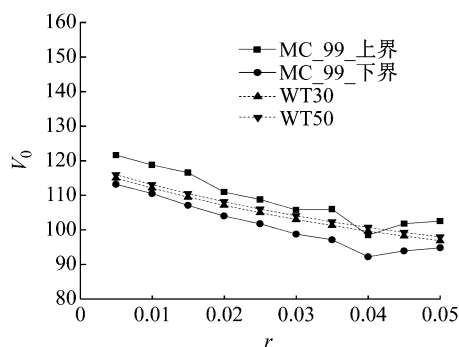


图 3 合约价值随利率的变化

Fig. 3 Computed variable annuity values with various interest rate

然后, 考虑跳扩散模型中跳的强度与波动对合约价值的影响. 图 4 和图 5 分别为合约初始价值 V_0 随 λ 和 σ 的变化结果. 随着 λ 和 σ 的增大, 合约价值变大. 由于跳的强度或者波动变大, 投资者可能得到更高的投资收益, 而且变额年金能规避市场下跌的风险, 故合约的价值变大. 同时, 蒙特卡洛法定

价的置信区间随着 λ 和 σ 的增大明显变宽,即合约价值的不确定性变大.此时,对于保险公司而言,需要采取合适的风险管理措施来规避风险.可以考虑在投保者进行风险资产组合选取时,控制风险资产的比例,提供一些波动率相对较小的产品供投保者选择.

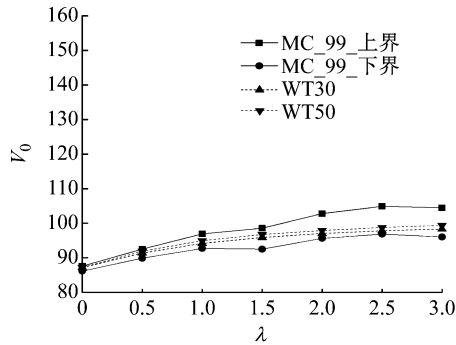


图 4 合约价值随跳跃强度的变化

Fig.4 Computed variable annuity values with various intensity λ

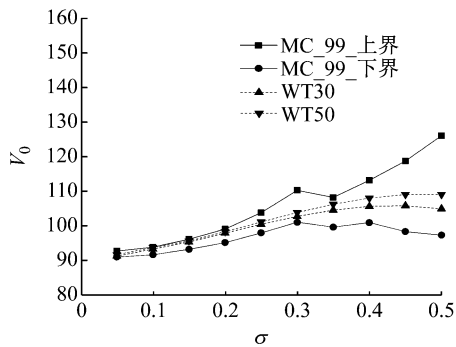


图 5 合约价值随模型参数 σ 的变化

Fig.5 Computed variable annuity values with various σ

除了以上返回初值型的变额年金, Roll-up 型和 Ratchet 型变额年金也是 2 种较为常见的合约.图 6 和图 7 分别为 Roll-up 型和 Ratchet 型变额年金初始价值随保费变化的趋势.假设 Roll-up 比率为

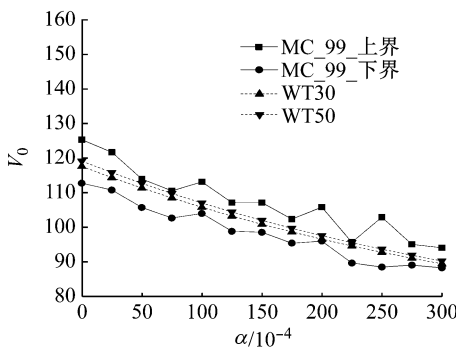


图 6 Roll-up 型合约价值随保费的变化

Fig.6 Computed variable annuity values with the roll-up type with respect to insurance fee

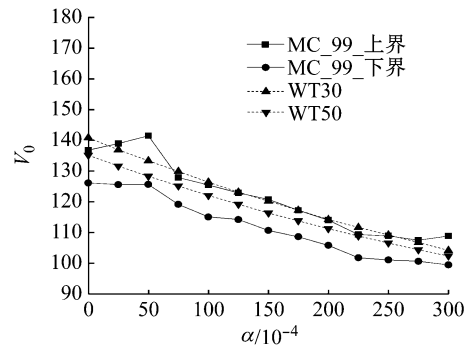


图 7 Ratchet 型合约价值随保费的变化

Fig.7 Computed variable annuity values with the ratchet type with respect to insurance fee

2%.从图中可以看出,柳树法定价结果基本都落在蒙特卡洛法的 99%置信区间内,也说明了本文方法对于 Roll-up 和 Ratchet 型变额年金定价的准确性.

根据不同的参数对变额年金初始价值的敏感性分析可知,利率、风险资产价格的跳跃与波动,都对合约的初始价值有比较大的影响.由于变额年金合约期限比较长,利率风险是保险公司定价和控制风险时需要考虑的因素.随着跳的强度和波动率的增大,合约价值的不确定性更大,此时,保险公司需要采取合适的风险管理措施来规避损失.

最后,比较定价所需的计算时间.表 1 为柳树法和蒙特卡洛法计算一次 V_0 所需的计算时间,可以看出,柳树法的计算时间远远小于蒙特卡洛法的计算时间.柳树法与蒙特卡洛法相比,有相当的计算精度,但是节约了计算时间.

表 1 蒙特卡洛法和柳树法计算时间对比

Tab.1 Computational time by the WT and MC methods	
算法	计算时间/s
MC(10^4 次模拟)	0.937 5
WT30	0.031 2
WT50	0.062 5

4 结语

主要介绍了同时含有 GMDB、GMWB、GMAB 和 GMIB 多种利益保证的变额年金定价.在跳扩散模型下,建立资产价格柳树,提出了一种简单有效并且节约计算成本的数值计算方法.本文方法柳树构建过程和定价过程相互独立,可以很容易推广到其他的一般过程,例如 CEV 模型和一般的 Lévy 过程等.数值实验在跳扩散模型进行,对不同参数下变额年金的初始价格进行计算,并进行敏感性分析.考虑了 3 种不同类型的利益保证:返回初值型、

Roll-up 型和 Ratchet 型的最低利益保证. 与蒙特卡罗法进行对比, 数值结果体现了本文方法的准确性以及计算效率较高. 根据敏感性分析可知, 利率对合约价值影响比较大. 由于合约期限较长, 保险公司定价时需要考虑利率风险. 同时风险资产价格的波动对合约价值影响也较大, 保险公司需要采取合适的风险管理措施来规避损失.

参考文献:

- [1] 雍尧棣. 具有最低身故利益的投资连接型产品的定价[D]. 重庆: 重庆大学, 2018.
YONG Yaodi. The study on valuation of equity-linked products with guaranteed minimum death benefits [D]. Chongqing: Chongqing University, 2018.
- [2] 中国保险监督管理委员会. 2010 年人身保险监管工作要点 [EB/OL]. [2019-01-01]. <http://anhui.circ.gov.cn/web/site0/tab3150/info124096.htm>.
China Insurance Regulatory Commission. Key points of personal insurance supervision in 2010 [EB/OL]. [2019-01-01]. <http://anhui.circ.gov.cn/web/site0/tab3150/info124096.htm>.
- [3] 中国保险监督管理委员会. 变额年金保险管理暂行办法 [EB/OL]. [2019-01-01]. <https://baike.baidu.com/item/变额年金保险管理暂行办法/9233026?fr=aladdin>.
China Insurance Regulatory Commission. Interim measures for the administration of variable annuity insurance [EB/OL]. [2019-01-01]. <https://baike.baidu.com/item/变额年金保险管理暂行办法/9233026?fr=aladdin>.
- [4] BAUER D, KLING A, RUSS J. A universal pricing framework for guaranteed minimum benefits in variable annuities [J]. *ASTIN Bulletin: The Journal of the IAA*, 2008, 38(2): 621.
- [5] BACINELLO R A, MILLOSOVICH P, OLIVIERI A, *et al.* Variable annuities: A unifying valuation approach [J]. *Insurance Mathematics & Economics*, 2011, 49(3): 285.
- [6] KELANI A, QUITTARD-PINON F. Pricing and hedging variable annuities in a levy market: A risk management perspective [J]. *Journal of Risk & Insurance*, 2017, 84(1): 209.
- [7] 赵桂芹, 钟明, 陈晓明. “GMDB+GMAB”型变额年金投资组合保险策略绩效比较[J]. *保险研究*, 2015(10): 44.
ZHAO Guiqin, ZHONG Ming, CHEN Xiaoming. Performance comparison of investment portfolio insurance strategies for “GMDB + GMAB” variable annuity [J]. *Insurance Studies*, 2015(10): 44.
- [8] DAI M, KWOK Y K, ZONG J. Guaranteed minimum withdrawal benefit in variable annuities [J]. *Mathematical Finance: An International Journal of Mathematics, Statistics and Financial Economics*, 2008, 18(4): 595.
- [9] YANG S S, DAI T S. A flexible tree for evaluating guaranteed minimum withdrawal benefits under deferred life annuity contracts with various provisions [J]. *Insurance: Mathematics and Economics*, 2013, 52(2): 231.
- [10] FORSYTH P, VETZAL K. An optimal stochastic control framework for determining the cost of hedging of variable annuities [J]. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 2014, 44: 29.
- [11] LUO X, SHEVCHENKO P. Valuation of variable annuities with guaranteed minimum withdrawal and death benefits via stochastic control optimization [J]. *Insurance Mathematics & Economics*, 2015, 62: 5.
- [12] BACINELLO A R, MILLOSOVICH P, MONTEALEGRE A. The valuation of GMWB variable annuities under alternative fund distributions and policyholder behaviours [J]. *Scandinavian Actuarial Journal*, 2016, 2016(5): 446.
- [13] ALONSO-GARCÍA J, WOOD O, ZIVEYI J. Pricing and hedging guaranteed minimum withdrawal benefits under a general Lévy framework using the COS method [J]. *Quantitative Finance*, 2018, 18(6): 1049.
- [14] DONG B, XU W, KWOK Y K. Willow tree algorithms for pricing guaranteed minimum withdrawal benefits under jump-diffusion and CEV models [J]. *Quantitative Finance*, 2019, 19(10): 1741.
- [15] 刘革, 吴珊. 蒙特卡罗方法在基于最低提取利益保证的变额年金定价中的应用 [J]. *保险职业学院学报*, 2015, 29(2): 26.
LIU Ge, WU Shan. The application of Monte Carlo method in variable annuity pricing with guaranteed minimum withdrawal benefits [J]. *Journal of Insurance Professional College*, 2015, 29(2): 26.
- [16] CURRAN M. Willow power: Optimizing derivative pricing trees [J]. *Algo Research Quarterly*, 2001, 4(4): 15.
- [17] XU W, HONG Z, QIN C. A new sampling strategy willow tree method with application to path-dependent option pricing [J]. *Quantitative Finance*, 2013, 13(6): 861.
- [18] MERTON R C. Option pricing when underlying stock returns are discontinuous [J]. *Journal of Financial Economics*, 1976, 3(1/2): 125.
- [19] XU W, YIN Y. Pricing American options by willow tree method under jump-diffusion process [J]. *Journal of Derivatives*, 2014, 22(1): 46.
- [20] 姚怡, 李帅芳, 许威. 跳扩散模型下亚式期权定价的柳树法研究 [J]. *同济大学学报(自然科学版)*, 2018, 46(12): 151.
YAO Yi, LI Shuaifang, XU Wei. Efficient willow tree method for Asian option pricing under merton jump-diffusion model [J]. *Journal of Tongji University(Natural Science)*, 2018, 46(12): 151.
- [21] BALLOTTA L, KYRIAKOU I. Convertible bond valuation in a jump diffusion setting with stochastic interest rates [J]. *Quantitative Finance*, 2015, 15(1): 115.
- [22] JOHNSON N L. Systems of frequency curves generated by methods of translation [J]. *Biometrika*, 1949, 36(1/2): 149.
- [23] HILL I D, HILL R, HOLDER R L. Algorithm AS 99: Fitting Johnson curves by moments [J]. *Journal of the Royal Statistical Society*, 1976, 25(2): 180.
- [24] Society of Actuaries Group Annuity Valuation Table Task Force. Group annuity mortality table and 1994 group annuity reserving table [J]. *Transactions of Society of Actuaries*, 1995, 47: 865.