

现代有轨电车槽型钢轨型面优化分析

杨新文^{1,2}, 刘姝彤^{1,2}, 胡耀华^{1,2}

(1. 同济大学上海市轨道交通结构耐久与系统安全重点实验室, 上海 201804; 2. 同济大学道路与交通工程教育部重点实验室, 上海 201804)

摘要: 建立了现代有轨电车槽型钢轨磨耗预测模型, 充分地考虑了独立旋转车轮的轮轨耦合效应, 与相关文献结果对比验证了模型的有效性, 并对现代有轨电车钢轨磨耗特征进行分析。建立了基于增广高斯径向基函数(AGRPF)钢轨优化模型, 并采用序列二次规划法(SQP)和多目标优化原理对该模型进行求解。结果表明: 钢轨外轨发生磨耗位置在轨距角 $Y=30\text{ mm}$ 部分, 内轨发生磨耗位置在轨顶和护轨部分; 钢轨优化型面相比初始型面优化效果在 $15\% \sim 30\%$, 可以有效减轻钢轨磨耗尤其侧磨、增大轮轨接触面积和减小轮轨接触应力。研究结果可为有轨电车钢轨选型与维护提供有益参考。

关键词: 有轨电车; 槽型钢轨; 独立轮对; 磨耗; 型面优化

中图分类号: TB533. 1; U270

文献标志码: A

Optimal Design of Profile of Groove-Shaped Rail of Modern Trams

YANG Xinwen^{1,2}, LIU Shutong^{1,2}, HU Yaohua^{1,2}

(1. Shanghai Key Laboratory of Rail Infrastructure Durability and System Safety, Tongji University, Shanghai 201804, China; 2. Key Laboratory of Road and Traffic Engineering of the Ministry of Education, Tongji University, Shanghai 201804, China)

Abstract: A wear prediction model groove-shaped rail of modern trams is established, which fully considers the wheel-rail coupling effect of independent rotating wheel. The validity of the model was verified by comparison with the results of relevant literature. The characteristics of the rail wear of modern trams are analyzed by the proposed wear model. A profile optimization model of the rail based on augmented Gaussian radial primary function (AGRPF) is established, which is solved by using sequential quadratic programming (SQP) and multi-objective optimization principle. The results show that the main wear position of the outer rail is at the gauge angle of $Y=30\text{ mm}$, and the wear positions of the inner rail are at the top of the rail and the guard rail. Compared with the initial

rail profile, the optimized effect of the rail profile is 15% to 30% , which can effectively reduce rail wear, especially side wear, increase wheel-rail contact area and reduce wheel-rail contact stress. The research results can provide a useful reference for the selection and maintenance of tram rails.

Key words: modern tram; groove-shaped rail; independent wheelset; wear; profile optimization

现代有轨电车是指一种电力驱动的“城市轨道交通”系统, 其轮轨导向、轮轨导向、车辆编组运行在专用行车道上, 是一种中运量城市轨道交通系统。其优点在于环境污染小, 占地面积小, 工程投资成本是地铁建设投资的 $1/5$ 到 $1/4$ 。现代有轨电车车辆大多采用低地板设计, 地板距轨面最低为 35 cm , 不设置站台, 同时最大运量相比公交车提高 5 至 7 倍^[1]。独立轮对转向架是实现有轨电车低地板的关键, 但是, 独立轮对转向架同样也面临较为严峻的运营维护问题^[2]: ① 由于受到轨道几何不平顺及实际运行时轮轨接触等的影响, 独立轮对在线路运行过程中出现横向位移就难以自动对中, 曲线运行时独立车轮的轮缘磨耗要比传统刚性轮对大得多。这样会造成轮轨横向力大, 横向位移较大, 在曲线上运行时轮缘贴靠钢轨而不断产生磨耗。因此, 独立车轮的侧磨较大, 甚至容易发生脱轨; ② 独立轮对和槽型钢轨之间由于侧磨, 轮缘磨薄, 钢轨轨距减小, 导致游间变大, 从而车辆晃车问题比较严重, 导致乘客舒适性和列车运行安全性下降。③ 线路超高和轨底坡设计欠合理, 有轨电车线路小半径曲线较多, 叠加独立轮对结构, 导致轮轨接触型面不匹配产生严重的轮轨接触问题。因此, 研究现代有轨电车轮轨型面匹配对提高现代有轨电车运行安全性与平稳性有

收稿日期: 2021-08-25

基金项目: 国家自然科学基金(51778484, 52178436)

第一作者: 杨新文(1973—), 男, 教授, 博士生导师, 工学博士。主要研究方向为轮轨关系, 铁路噪声与振动, 铁路轨道结构与养护维修等。E-mail: xinwenyang@tongji.edu.cn



论文
拓展
介绍

非常重要的意义。

近年来,国内外学者针对高速铁路、重载铁路和现代有轨电车等轮轨匹配和型面优化设计做了大量工作,其中,车轮型面优化较钢轨型面优化更加全面,完善程度更高^[3-5]。张剑^[6-7]等通过研究,调整钢轨型面扩展系数,选取轨头位置的适当区域进行扩展,将扩展后的钢轨型面与初始型面进行拼接,从而减少了轮轨接触法向间隙,增大接触面积,减小接触应力,提高轮轨共形度。Wu等^[8]参考伦敦地铁运营状况,参考现有的钢轨轨头形状设计车轮廓形,用扩展法得到了轮缘接触性能较好、轮轨接触点分布较均匀的轮轨匹配关系,以及车轮踏面和钢轨轨头接触时较低的等效锥度。崔大宾等^[9-10]改进了传统动力学模型,充分考虑轨下结构对车辆的动力学响应的影响,建立基于轮轨接触法向间隙的车轮踏面优化数学模型,以轮轨间隙随横移量变化所围成的面积作为目标函数,并利用改进的序列二次规划法对数学模型进行数值求解。Shevtsov等^[11-12]提出基于轮对滚动圆半径差曲线(RRD)的车轮廓形优化方法,选取优化区域14个离散点坐标作为自变量,建立自变量与滚动半径差之间的数学函数关系,以RRD函数为目标从而建立优化模型,利用表面响应

拟合的多点近似法(MARS)数值求解获得优化型面。并利用多体动力学软件ADAMS/Rail进行动力学仿真验证优化型面的性能。陈思亦^[13]提出一种考虑设计周期内外侧钢轨总体磨损情况的重载铁路钢轨型面优化方法,该方法将钢轨优化区域离散点用 β 样条曲线连接,基于高斯径向基函数法对响应值和自变量之间建立数学函数关系,然后利用遗传算法对优化模型进行求解,得到最终的优化型面。

上述在轮轨磨损与型面优化设计方面做了大量工作,然而关于使用槽型轨的低地板有轨电车轮轨型面匹配的研究却十分有限。本文采用改进的径向基函数响应面法和序列二次规划法(SQP)对槽型钢轨的接触型面进行了优化,并结合车辆-轨道耦合动力学响应进行了评价分析,研究结果可为现代有轨电车钢轨选型与维护提供理论依据。

1 槽型钢轨型面优化模型

1.1 槽型钢轨型面优化计算思路

现代有轨电车槽型钢轨型面优化模型的计算流程如图1所示。

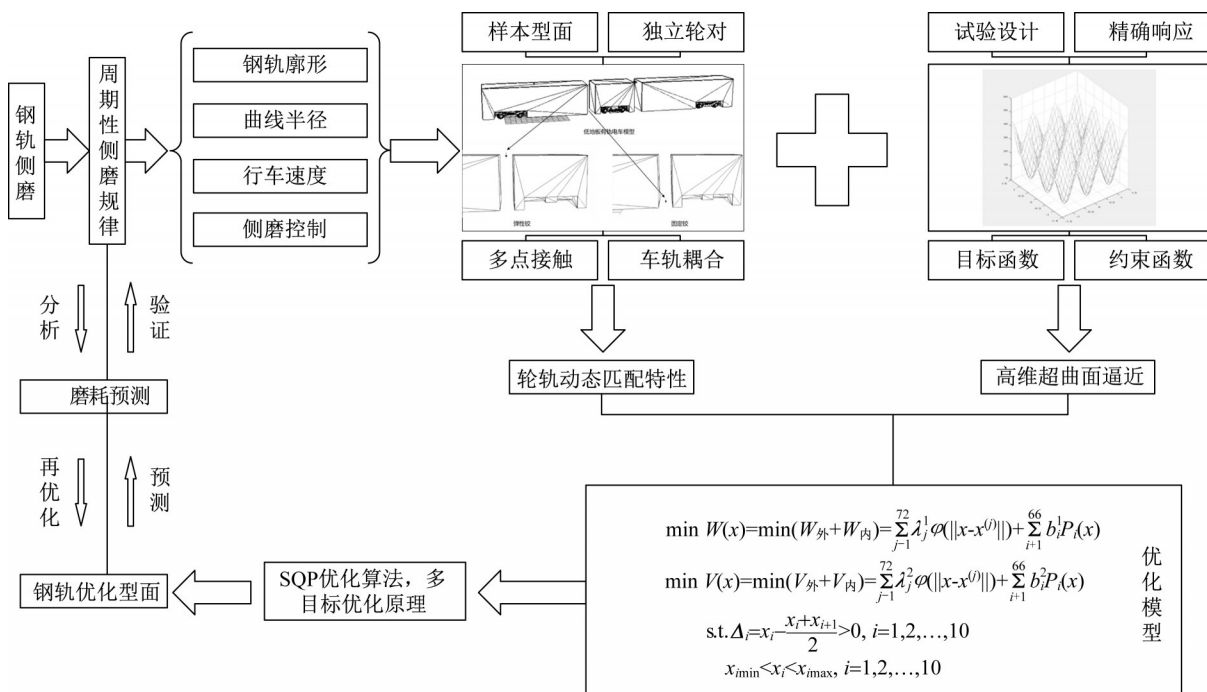


图1 钢轨型面优化流程图

Fig. 1 Flow chart of profile optimal design of groove-shaped rail

首先根据钢轨标准初始型面利用试验设计方法得到不同钢轨设计型面,其次通过车辆-轨道耦合

力学模型对上述不同钢轨型面进行动力学计算和基于Archard材料磨损模型计算钢轨磨损量(计算过程

如图2所示),然后基于径向基函数响应面法对型面优化区域样本点纵坐标及对应磨耗精确响应值进行数学建模,最后利用序列二次规划法对模型求解,得到钢轨优化型面。

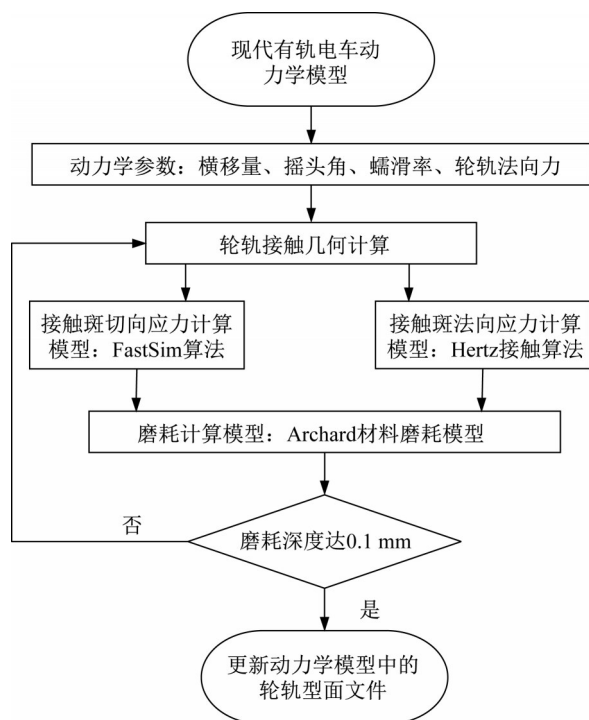
图2 槽型轨磨耗预测流程图^[14]

Fig. 2 Flow chart of wear prediction of groove-shaped rail

1.2 有轨电车车辆车-轨耦合动力学模型

本文采用多体动力学软件 Universal Mechanism (UM)建立70 %低地板的有轨电车车辆与轨道系统耦合动力学模型^[14],车辆模型采用“动车+拖车+动车”编组形式的三个模块组成,如图3所示,拖车采用独立轮对,动车采用非独立轮对,模型基本参数如表1所示。

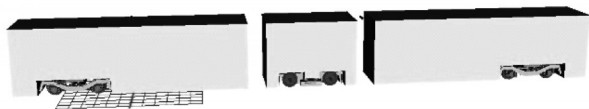


图3 采用独立旋转车轮的有轨电车车辆动力学模型

Fig 3 Dynamical model of modern tram with independent rotating wheels

本文选用60R2钢轨,与工字型钢轨相比,60R2钢轨轨顶踏面带有一个U型槽,可保护车轮不发生脱轨。选用与槽型轨型面相匹配的现代有轨电车车辆车轮踏面进行轮轨接触和磨耗计算,图4为钢轨

表1 模型基本参数

Tab. 1 Basic parameters of the model

参数	数值
车辆最高运行速度/(km·h ⁻¹)	70
轴重/t	12
单个车轮/kg	750
构架质量/kg	4 224
车体质量/t	3.3
车轮直径/mm	660
固定轴距/mm	1 850
最小曲线通过半径/m	25
车辆定距/m	10.4
车体高度/m	3.6
车体宽度/m	2.65

横截面示意图。

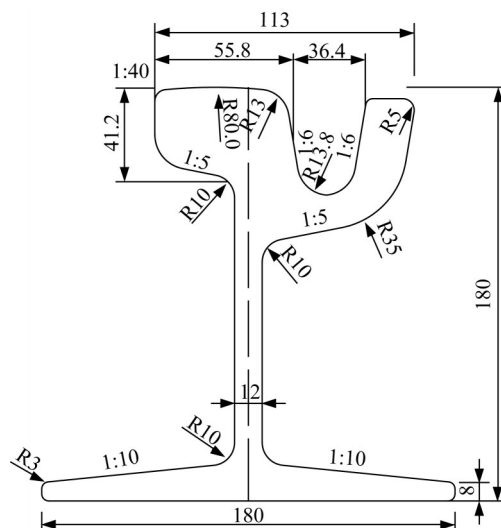


图4 60R2槽型轨横截面示意图(单位:mm)

Fig. 4 Schematic diagram of section of groove-shaped rail (unit:mm)

1.3 钢轨型面优化模型建立

钢轨磨耗与其型面之间存在着高度非线性关系,优化钢轨廓形需要找到两者之间一种显式的关系和模型,而响应面方法是函数逼近的有效工具之一,对于求解这类高度非线性关系的问题有着很重要的作用。采用响应面法对钢轨型面进行优化。

如果存在一组实值函数 $\varphi_i(x)(i=1, \dots, m)$ 和一组实参数 $\lambda_i(i=1, \dots, m)$ 将实空间 \mathbf{R} 中的任意点 F 表示为其线性组合^[15]。

$$F=f(x)=\lambda_1\varphi_1(x)+\cdots+\lambda_m\varphi_m(x) \quad (1)$$

则称 $\varphi_i(x) (i=1, \dots, m)$ 为基函数, 设 m 个不重合插值样本点的模式集合为 $\{(x^{(i)}, F^{(i)}) | i=1, \dots, m\}$, 分别代入式(1)可得:

$$\begin{cases} \lambda_1 \varphi_1(x^{(1)}) + \cdots + \lambda_m \varphi_m(x^{(1)}) = F^{(1)} \\ \vdots \\ \lambda_1 \varphi_1(x^{(m)}) + \cdots + \lambda_m \varphi_m(x^{(m)}) = F^{(m)} \end{cases} \quad (2)$$

式(2)用矩阵可表示为

$$\Phi \lambda = F \quad (3)$$

其中:

$$\Phi = \begin{bmatrix} \varphi_1(x^{(1)}) & \cdots & \varphi_m(x^{(1)}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1(x^{(m)}) & \cdots & \varphi_m(x^{(m)}) \end{bmatrix} \quad (4a)$$

$$\lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{bmatrix} \quad (4b)$$

$$F = \begin{bmatrix} F^{(1)} \\ \vdots \\ F^{(m)} \end{bmatrix} \quad (4c)$$

式中: Φ 为插值矩阵。

显然,当矩阵 Φ 接近奇异时,式(3)的解会变得不稳定。因此,对于基函数的基本要求是能使式(3)中的插值矩阵 Φ 非奇异。Micchelli^[16]给出证明:对于试验样本中不重合的插值样本点集 $\{x^{(s)} \in E^k | s = 1, \cdots, m\}$ [$x^{(i)} \neq x^{(j)} (i \neq j)$], 如果 $\varphi_i(x^{(i)}) = \varphi(\|x^{(i)} - x^{(j)}\|)$, 则式(3)中的插值矩阵 Φ 一定非奇异。根据文献[17]中提出的最佳一致逼近理论中哈尔条件的等价定义,说明了径向基函数是未知函数唯一的最佳一致逼近形式。

对任意插值样本点 $x^{(j)}$, 可以表示为 $\varphi(\|x - x^{(j)}\|)$, 其中 $\|\cdot\|$ 是 Euclidean 范数。对于试验设计所得点集 $\{x^{(j)} \in E^n | j = 1, 2, \cdots, m\}$, 径向基函数模型如式(5)所示^[14]:

$$s(x) = \sum_{j=1}^m \lambda_j \varphi(\|x - x^{(j)}\|) \quad (5)$$

式中: m 为插值样本点数; $x^{(j)}$ 为第 j 个插值样本点向量; $\lambda_j (j = 1, 2, \cdots, m)$ 为待定系数; $\varphi(\|x - x^{(j)}\|)$ 为径向基函数; $\|x - x^{(j)}\|$ 为插值函数上任一点到第 j 个插值样本点的距离, 对 n 维(从优化角度为 n 个设计变量)空间, 如(6)式所示:

$$\|x - x^{(j)}\| = \sqrt{(x_1 - x_1^{(j)})^2 + \cdots + (x_n - x_n^{(j)})^2} \quad (6)$$

为便于表达, 令:

$$r^{0j} = \|x - x^{(j)}\| \quad (7)$$

$$r^{ij} = \|x^{(i)} - x^{(j)}\| \quad (8)$$

若有 m 个插值样本点, 在任一插值样本点 $x^{(i)}$ 的精确响应值为 $F^{(i)}$, 即:

$$s(x^{(i)}) = \sum_{j=1}^m \lambda_j \varphi(r^{ij}) = F^{(i)}, \quad i = 1, 2, \cdots, m \quad (9)$$

展开并形成方程组:

$$\begin{cases} \lambda_1 \varphi(r^{11}) + \cdots + \lambda_m \varphi(r^{1m}) = F^{(1)} \\ \vdots \\ \lambda_1 \varphi(r^{m1}) + \cdots + \lambda_m \varphi(r^{mm}) = F^{(m)} \end{cases} \quad (10)$$

解方程组即可求得待定系数 $\lambda_j (j = 1, 2, \cdots, m)$ 。

以上所述的径向基函数形式可以用来近似高度非线性的问题, 本文为了进一步提高其精确范围, 在原式的基础上加入多项式项, 即为改进的增广径向基函数表达式。

$$s(x) = \sum_{j=1}^m \lambda_j \varphi(\|x - x^{(j)}\|) + \sum_{i=1}^l b_i P_i(x) \quad (11)$$

对于 k 维空间, 多项式项为 $1, x_1, \cdots, x_k, x_1^2, \cdots, x_k^2, x_1 x_2, \cdots, x_{k-1} x_k$ 。 i 的取值视选取的多项式而定, 如下所示。

分别将 m 个插值样本点和样本值代入, 再加上如下 i 个正交方程即可求得式中的待定系数。如(12)式所示:

$$\begin{cases} P_1(x^{(1)}) \lambda_1 + \cdots + P_1(x^{(m)}) \lambda_m = 0 \\ \vdots \\ P_i(x^{(1)}) \lambda_1 + \cdots + P_i(x^{(m)}) \lambda_m = 0 \end{cases} \quad (12)$$

写成矩阵的形式可表示为

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \\ 0 \end{bmatrix} \quad (13)$$

其中:

$$A = \begin{bmatrix} \varphi(r^{11}) & \cdots & \varphi(r^{1m}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi(r^{m1}) & \cdots & \varphi(r^{mm}) \end{bmatrix} \quad (14a)$$

$$B = \begin{bmatrix} P_1(x^{(1)}) & \cdots & P_l(x^{(1)}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ P_1(x^{(m)}) & \cdots & P_l(x^{(m)}) \end{bmatrix} \quad (14b)$$

$$\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_m)^T \quad (14c)$$

$$b = (b_1, \cdots, b_l)^T \quad (14d)$$

$$F = (F^{(1)}, \cdots, F^{(m)})^T \quad (14e)$$

Fang^[18]对不同形式的径向基函数进行了研究, 认为高斯径向基函数近似度较高, 通过大量数值算例验证总结出常数 b_i 取值的经验公式:

$$b_i = \begin{cases} 1, & \frac{r_0}{2} \leq 1 \\ \frac{2}{r_0}, & \frac{r_0}{2} > 1 \end{cases} \quad (15)$$

式中: r_0 为设计空间内相距最远两点的距离。

2 结果分析

2.1 模型验证

为验证1.3节模型的正确性,将本文槽型钢轨面预测模型计算结果与文献[19]中槽型钢轨计算结果进行对比,车速为 $15 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$,线路参数为曲线半径50米,超高60 mm,其他参数如图5所示。在相同工况时槽型钢轨曲中点处QZ的磨耗量对比如图6所示,图中 $X=0$ 为轨腰中轴线,坐标 X 为钢轨横断面水平方向,坐标 Z 为钢轨横断面垂直方向。

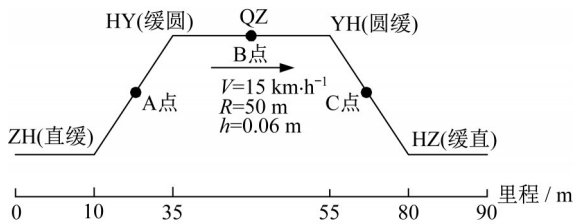


图5 曲线轨道参数

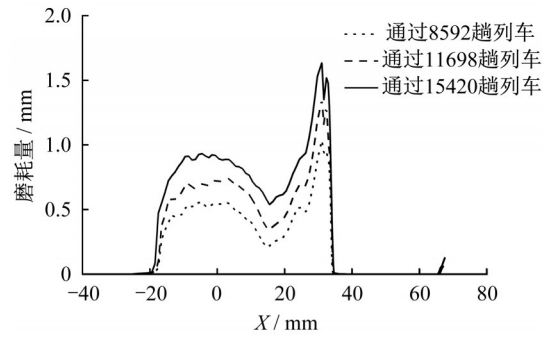
Fig. 5 Parameters of curve track

图5中,ZH、HY、QZ、YH、HZ分别为直缓点、缓圆点、曲中点、圆缓点、缓直点;A点为前缓和曲线中点;B点为曲线中点;C点为后缓和曲线中点;V为车速;R为曲线轨道半径;h为曲线超高。

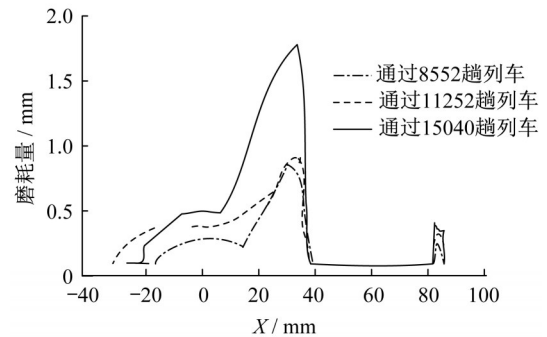
采用与文献[19]较为接近的参数与工况进行计算分析,由图6可知,本文计算的钢轨外轨最大磨耗量为1.7 mm,位于 $Y=30 \text{ mm}$ 位置附近,与文献[19]钢轨磨耗的最大值和峰值位置基本相当,而在轨顶面计算结果略有差异,考虑到本文钢轨型面优化的目的也是为了降低钢轨侧磨,选择 $Y=30 \text{ mm}$ 附近的结果进行对比有一定的针对性,本文模型可用于后续槽型钢轨磨耗预测分析。

2.2 钢轨型面优化分析

针对70%低地板有轨电车通过曲线时侧磨较为严重的问题展开钢轨型面优化,假设车轮踏面外形固定。钢轨型面优化区域如图7所示,其中,A、B为固定点:A点为轨头中心,B点为轨距测量点,与A点垂向距离为16 mm。AB点中间的点为可动点,共选取10个,可动点的纵坐标为自变量,记为 $x_1, x_2,$



a 本文计算结果



b 文献[19]计算结果

图6 圆曲线外侧槽型钢轨磨耗量对比

Fig. 6 Comparison of wear amount of groove-shaped rail outside circular curve

x_3, \dots, x_{10} ,每个可动点的浮动下限为初始型面以下2 mm处,如图8所示。

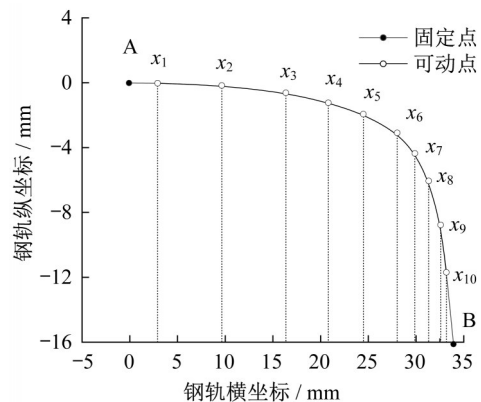


图7 型面区域优化示意图

Fig. 7 Schematic diagram of profile area optimization

利用D-Optimal试验设计方法[15]抽取优化点的纵坐标组合,加上初始标准型面,共得到72组钢轨型面样本点,并用 β 样条曲线进行拟合,用于不同钢轨型面磨耗仿真分析。本文仿真时根据实际线路条件,选取半径及速度两个因素,分析得到不同的钢轨优化型面。不同半径工况各参数设计如表2

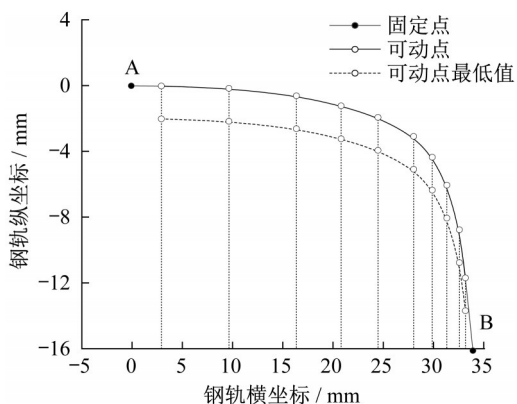


图8 型面优化设计空间

Fig. 8 Optimization design space of profile

所示。

$$\left\{ \begin{array}{l} W(x) = W_1 + W_2 = \sum_{j=1}^{72} \lambda_j^1 \varphi(\|x - x^{(j)}\|) + \sum_{i=1}^{66} b_i^1 p_i(x) \\ V(x) = V_1 + V_2 = \sum_{j=1}^{72} \lambda_j^2 \varphi(\|x - x^{(j)}\|) + \sum_{i=1}^{66} b_i^2 p_i(x) \\ \text{s.t. } \Delta_i = x_i - \frac{x_{i-1} + x_{i+1}}{2} > 0, \quad i = 1, 2, \dots, 10 \\ x_{\min} < x_i < x_{\max}, \quad i = 1, 2, \dots, 10 \end{array} \right. \quad (16)$$

首先利用序列二次规划法,结合多目标规划原理,对式(16)进行求解,得到优化结果。然后将优化后各点纵坐标用 β 样条曲线平滑处理得到钢轨优化型面,如图9、10所示。

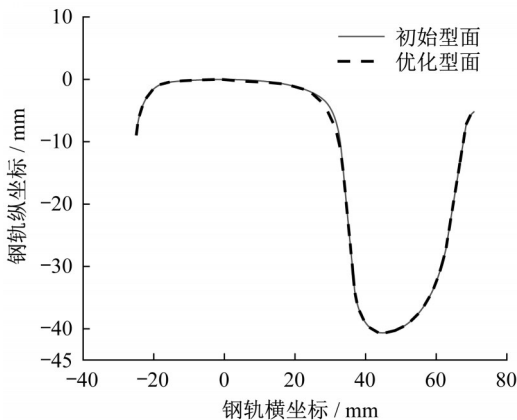


图9 优化前后型面对比

Fig. 9 Comparison of profile before and after optimization

得到优化型面后,对其在循环周期内的磨耗进行仿真计算,与初始型面对比如图11所示。

由图11可知,设计周期内,当有轨电车车辆在槽型轨优化型面运行时,钢轨最大磨耗量从0.434 mm下降至0.386 mm,优化效果11.1%,另外,对比钢轨的通过总重可知,发现钢轨优化型面后通过总

表2 不同曲线半径工况设计

Tab. 2 Design cases of different curve radius

半径/m	超高/mm	速度/(km·h ⁻¹)	占比
150	80	31	0.1
200	75	35	0.2
250	75	39	0.4
300	65	40	0.2
350	55	39	0.1

对上述72个不同型面在3个循环周期内,即迭代30次,进行仿真,得到72组不同的结果。目标变量选择优化区域中左右轨发生磨耗总和和最大磨耗速率,约束条件为踏面为严格凸曲线和坐标上下边界,最终得到的钢轨型面优化设计为多约束多目标非线性规划问题,其数学模型表达式为

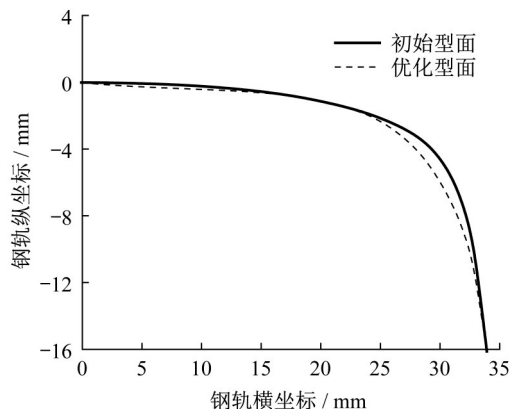


图10 局部放大图

Fig. 10 Local amplification

重由13.48 Mt提高至16.89 Mt,优化效果为25.3%,充分说明针对小半径曲线不同曲线半径工况提出的钢轨优化型面可以有效地降低钢轨的磨耗量并且提高钢轨使用寿命。

对优化型面进行动力学仿真,统计了独立轮对在仿真过程中接触面积和最大接触应力平均值,如表3所示。

由表3可知,将优化型面与初始型面对比,所有车轮的接触面积有所增大,最大接触应力有所降低,提升效果显著。独立轮对外侧优化效果分别为25.73%和14.39%,独立轮对内侧优化效果分别为

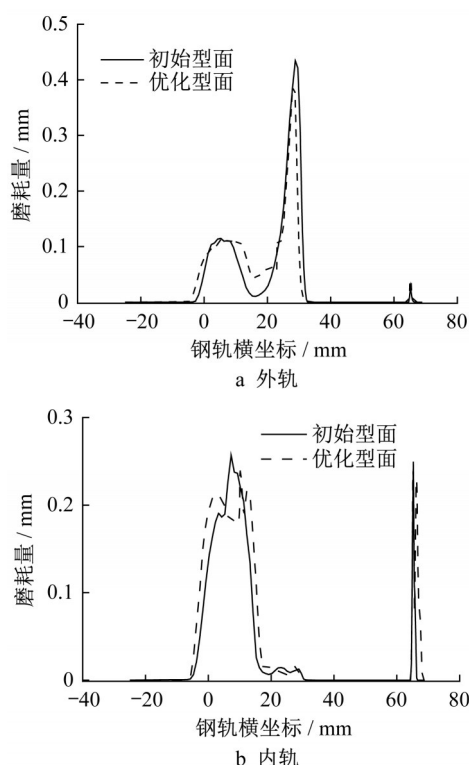


图 11 设计周期内型面磨耗对比

Fig. 11 Comparison of profile wear in design cycle

表 3 轮轨接触参数对比

Tab. 3 Comparison of parameters of wheel-rail contact

单轮对	曲线外侧独立轮		
	初始型面	优化型面	优化效果
接触面积/mm ²	52.59	66.58	25.73 %
最大接触应力/MPa	2 498.83	2 139.33	14.39 %
轮对	曲线内侧独立轮		
	初始型面	优化型面	优化效果
接触面积/mm ²	61.19	80.08	30.87 %
最大接触应力/MPa	1 614.85	1 247.38	22.76 %

30.87 %和22.76 %。综合分析可知,钢轨优化型面相比初始型面优化效果在15 %~31 %,可以有效减轻钢轨磨耗尤其侧磨、增大轮轨接触面积和减小轮轨接触应力,从而提高钢轨寿命,对于保护钢轨和车轮,提高列车运行安全性和稳定性十分重要。

3 结论

建立了现代有轨电车槽型钢轨磨耗预测模型,基于增广高斯型径向基函数钢轨优化模型,并利用序列二次规划法和多目标优化原理求解,计算分析了钢轨的磨耗特征和优化型面效果,并对轮轨接触参数进行对比分析,主要结论如下:

(1)对于外侧钢轨,发生磨耗的主要位置在轨距

角 $Y=30$ mm部分,在踏面位置 $Y=5$ mm部分也存在少量磨耗对于内侧钢轨,发生磨耗的主要位置在轨顶 $Y=5$ mm部分和护轨 $Y=67$ mm部分。

(2)钢轨优化型面相比初始型面优化效果在15 %~30 %,可以有效减轻钢轨磨耗尤其侧磨、增大轮轨接触面积和减小轮轨接触应力,从而提高钢轨寿命,对于保护钢轨和车轮,提高列车运行安全性和稳定性十分重要。

作者贡献声明:

杨新文:论文思路与大纲提出。

刘姝彤:论文撰写与编辑。

胡耀华:论文仿真与撰写。

参考文献:

- [1] 王文华.低地板轻轨车辆轮轨接触问题的研究[D].大连:大连交通大学,2008.
WANG Wenhua. Research on wheel-rail contact of low-floor light rail vehicles [D]. Dalian: Dalian Jiaotong University, 2008.
- [2] 陈泽深.独立车轮转向架的导向原理[J].铁道机车车辆,1999(1):16.
CHEN Zeshen. The guiding principle of independent wheel bogies [J]. Railway Locomotives and Rolling Stock, 1999(1):16.
- [3] 王凯平.高速列车轮轨几何型面优化研究[D].大连:大连交通大学,2007.
WANG Kaiping. Research on optimization of high-speed train wheel-rail geometry [D]. Liaoning: Dalian Jiaotong University, 2007.
- [4] 陈忠华.基于车辆动力学的重载铁路曲线磨耗钢轨型面改进设计与分析[D].成都:西南交通大学,2009.
CHEN Zhonghua. Improved design and analysis of curved wear rail profile of heavy-duty railway based on vehicle dynamics [D]. Chengdu: Southwest Jiaotong University, 2009.
- [5] 沈钢,叶志森.用接触角曲线反推法设计铁路车轮踏面外形[J].同济大学学报(自然科学版),2002,30(9):1095.
SHEN Gang, YE Zhisen. Using the contact angle curve reverse method to design railway wheel tread shape [J]. Journal of Tongji University(Natural Science), 2002, 30(9): 1095.
- [6] 张剑,王玉艳,金学松,等.改善轮轨接触状态的车轮型面几何设计方法[J].交通运输工程学报,2011,11:36.
ZHANG Jian, WANG Yuyan, JIN Xuesong, et al. Improved wheel geometrical design method of wheel profile based on rail contact state [J]. Journal of Traffic and Transportation Engineering, 2011, 11:36.
- [7] 张剑,温泽峰,孙丽萍,等.基于钢轨型面扩展法的车轮型面设计[J].机械工程学报,2008,44:44.
ZHANG Jian, WEN Zefeng, SUN Liping, et al. Wheel profile

- design based on rail profile extension method [J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2008, 44: 44.
- [8] WU H M. Investigations of wheel/rail interaction on wheel flange climb derailment and wheel/rail profile compatibility [D]. Chicago: The Graduate College of the Illinois Institute of Technology, 2000.
- [9] 崔大宾. 铁路列车轮轨型面优化研究 [D]. 成都: 西南交通大学, 2009.
- CUI Dabin. Research on optimization of railway train wheel-track profile [D]. Chengdu: Southwest Jiaotong University, 2009.
- [10] 崔大宾, 李立, 金学松, 等. 基于轮轨法向间隙的车轮踏面优化方法 [J]. 机械工程学报, 2009, 12: 205.
- CUI Dabin, LI Li, JIN Xuesong, *et al.* Wheel tread optimization method based on wheel-rail normal clearance [J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2009, 12: 205.
- [11] SHEVTSOV I Y, MARKINE V L, ESVELD C. Optimal design of wheel profile for railway vehicles [J]. Wear, 2005, 258: 1022.
- [12] SHEVTSOV I Y, MARKINE V L, ESVELD C. Design of railway wheel profile taking into account rolling contact fatigue and wear [J]. Wear, 2008 (265), 1273.
- [13] 陈思亦. 重载铁路曲线段钢轨型面优化 [D]. 石家庄: 石家庄铁道大学, 2015.
- CHEN Siyi. Optimization of rail profile in curve section of heavy-duty railway [D]. Shijiazhuang: Shijiazhuang Railway University, 2015.
- [14] 杨新文, 刘小山, 沈剑罡, 等. 现代有轨电车线路轨底坡对槽型轨磨损的影响 [J]. 同济大学学报(自然科学版), 2019, 47 (4): 528.
- YANG Xinwen, LIU Xiaoshan, SHEN Jiangang, *et al.* Effect of rail cant on groove-shaped rail wear in modern tram line [J]. Journal of Tongji University (Natural Science), 2019, 47 (4): 528.
- [15] 隋允康, 宇慧平. 响应面方法的改进及其对工程优化的应用 [M]. 北京: 科学出版社, 2011.
- SUI Yunkang, YU Huiping. Improvement of response surface method and its application to engineering optimization [M]. Beijing: Science Press, 2011.
- [16] MICCHELLI C A. Interpolation of scattered data: Distance matrices and conditionally positive definite functions [J]. Constructive Approximation, 1986, 2: 11.
- [17] 于志玲, 张阳. 最佳一致逼近理论中哈尔(Haar)条件的等价定义 [J]. 南开大学学报(自然科学版), 2006, 39(3): 101.
- YU Zhiling, ZHANG Yang. The equivalent definition of Haar condition in the best uniform approximation theory [J]. Journal of Nankai University (Natural Science Edition), 2006, 39 (3): 101.
- [18] FANG H B, HORSTEMEYER M F. Global response approximation with Radial Basis functions [J]. Engineering Optimization, 2006, 38(4): 407.
- [19] 杨阳, 李芾, 张茂松, 等. 槽型轨磨损演变过程数值模拟 [J]. 铁道科学与工程学报, 2016, 13(8): 1607.
- YANG Yang, LI Fu, ZHANG Maosong, *et al.* Numerical simulation of evolution process of groove-shaped rail wear [J]. Journal of Railway Science and Engineering, 2016, 13 (8): 1607.