

# 基于深度学习的多材料结构拓扑优化方法

项 程, 陈艾荣

(同济大学 土木工程学院, 上海 200092)

**摘要:** 提出了一种基于深度卷积神经网络(CNN)的多材料结构拓扑优化方法, 实现在不需要任何迭代分析的情况下, 在极短的时间内预测出多材料优化结构。研究中, 采用了流行的U-Net网络结构, 以提高神经网络的边界提取能力。通过有序多材料SIMP(各向同性实材料惩罚密度法)插值方法(Ordered SIMP)生成随机加载条件、质量分数及成本分数下的多材料优化结构数据集, 训练得到深度学习神经网络。将所提出方法的效率和精度与传统算法进行比较, 对该方法的性能进行评价, 结果表明, 该方法在几乎不牺牲设计方案性能的前提下, 显著降低计算成本。该方法对于拓扑优化在未来多材料结构设计实践中具有巨大潜力和广阔应用前景。

**关键词:** 深度学习; 卷积神经网络; 多材料设计; 拓扑优化

**中图分类号:** TP181; O342

**文献标志码:** A

## Topology Optimization of Multi-material Structures Based on Deep Learning

XIANG Cheng, CHEN Airon

(College of Civil Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, China)

**Abstract:** A topology optimization method of multi-material structure based on deep convolution neural network (CNN) is proposed, which can predict the optimized structure of multi-material in a very short time without any iteration. The popular U-Net network structure is adopted to improve the edge extraction ability of neural network. To train the network, the ordered multi-material SIMP (isotropic real material penalty density method) interpolation method (Ordered SIMP) is used to generate multi-material optimal structure data sets under random loading conditions, mass fraction and cost fraction. The efficiency and accuracy of the proposed method are compared with traditional algorithms, and the

performance of the proposed method is evaluated. The results show that the proposed method can significantly reduce the computational cost with little sacrifice on the performance of the design scheme. The proposed method has great potential and broad application prospects for topology optimization in the practice of multi-material structure design in the future.

**Key words:** deep learning; convolution neural network; multi-material design; topology optimization

结构拓扑优化旨在研究给定约束条件下设计域内材料的最佳分布, 使结构某种性能达到最佳。与传统的形状优化及尺寸优化方法相比, 拓扑优化只需定义约束条件及结构所可能存在的范围, 而无其他限制, 因此可能得到设计范围内找到材料利用率最高的结构形式。自Prager和Rozvany<sup>[1]</sup>, Cheng和Olhoff<sup>[2]</sup>以及Bendsøe和Kikuchi<sup>[3]</sup>等学者们的开创性研究以来, 各种拓扑优化方法相继涌现, 如SIMP方法<sup>[4-6]</sup>, 渐进结构优化法<sup>[7]</sup>, 双向渐进结构优化法<sup>[8]</sup>, 水平集法<sup>[9]</sup>及可移动变形组件法<sup>[10]</sup>等。然而, 尽管新的理论和技术不断发展, 目前主流的拓扑优化方法在优化过程中均不可避免地要进行多次迭代分析, 导致计算成本显著增加。

近年来, 随着机器学习算法的发展及图形处理器(GPU)的广泛应用, 机器学习尤其是深度学习在图像处理、自动驾驶<sup>[11]</sup>及信号识别<sup>[12]</sup>等领域得到了广泛应用。深度学习神经网络具有强大的拟合复杂函数的能力, 而拓扑优化的结果可以抽象为优化目标和初始约束条件之间的复杂函数。基于这一理解, 若能将深度学习技术引入拓扑优化领域<sup>[13]</sup>, 将会极大提高拓扑优化效率。

收稿日期: 2021-06-26

基金项目: 国家自然科学基金(52078365)

第一作者: 项程(1992—), 男, 博士生, 主要研究方向为基于深度学习的结构拓扑优化, 桥梁工程。

E-mail: 2010007@tongji.edu.cn

通信作者: 陈艾荣(1963—), 男, 教授, 工学博士, 主要研究方向为桥梁造型及设计伦理, 结构拓扑优化理论。

E-mail: a.chen@tongji.edu.cn



论文  
拓展  
介绍

Sosnovik 等<sup>[14]</sup>最早开始探索基于深度学习的拓扑优化方法。通过将拓扑优化问题转化为图像分割任务并训练卷积编码器-解码器网络,无需迭代即可预测得到优化结构,显著提高了拓扑优化效率。Yu 等<sup>[15]</sup>基于 SIMP 方法构造的数据集,分别训练了基于卷积神经网络(CNN)的自编码器及条件生成对抗网络(cGAN),能够在无需任何迭代的情况下得到近似最优的拓扑设计,有效减少了总时间消耗。Wang 等<sup>[16]</sup>构造并训练了一种增强的深度超分辨率神经网络和 CNN,可在极短的时间内获得精确的高分辨率结构,并具有在不同几何边界条件下预测高分辨率结构的泛化能力。在导热结构的拓扑优化领域,也有学者引入了深度学习技术加以尝试,Li 等<sup>[17]</sup>基于两个耦合的 GAN,提出了一种基于深度学习的导热结构非迭代拓扑优化算法,实现了低分辨率和高分辨率下优化结构的预测。不同于上述研究的线弹性优化设计领域,Abueidda 等<sup>[18]</sup>将基于深度学习的拓扑优化方法应用到了非线性领域,通过构造考虑材料和几何非线性的数据集并训练所设计的 CNN,实现了给定边界条件、载荷和优化约束下的优化结构预测。

综上,深度学习技术在拓扑优化领域的应用才刚起步,现有基于深度学习的拓扑优化方法均只考虑了单种材料,关于多材料的拓扑优化国内外尚无相关研究。因此,提出了一种基于深度卷积神经网络的多材料结构拓扑优化方法,旨在提高多材料拓扑优化问题的计算效率。首先,对语义分割及 Ordered SIMP 方法<sup>[6]</sup>的基本原理进行简要介绍,接着采用该方法构造训练数据集,训练提出的 U-Net 神经网络。最后对所建立方法的性能开展评估,结果表明,所提出的方法能够在极短的时间内预测得到多材料拓扑优化结构,显著提高了多材料拓扑优化的计算效率。

## 1 语义分割

计算机视觉中的语义分割是将图像中的每一个像素划分为特定类别的过程。多材料拓扑优化的目标是确定结构中每个单元应该分配的材料类别,从这个意义上说,拓扑优化可以看成一种广义的语义分割。近年来,随着 CNN 技术的成熟,语义分割得到广泛应用。CNN 是一种特殊的人工神经网络,能够分层提供卷积运算的抽象表示,因此特别适用于图像处理。其架构通常由一系列不同功能的网络层的堆叠而成,包括用于卷积运算的卷积层、用于降维

的池化层以及与普通神经网络类似的全连接层。卷积层是构建 CNN 的核心层,不同的卷积层可以提取输入张量的不同特征。每一次卷积运算都可以看作是一个特征抽取器,分别提取不同维度的特征,减少人为分割任务的识别偏差。卷积神经网络结构示意图及典型卷积操作如图 1 所示。

## 2 基于 Ordered SIMP 插值方法的拓扑优化问题

Ordered SIMP 插值方法<sup>[6]</sup>是一种用于求解多材料连续设计变量( $0 \leq \rho \leq 1$ )结构优化问题的有效方法。考虑材料的三种材料特性,即材料密度、弹性模量和成本,以结构柔顺度(Compliance)最小化为优化目标,受结构质量和成本约束的多材料拓扑优化问题可以表述为

$$\min: c = U^T K U = \sum_{e=1}^N E_e u_e^T k_0 u_e \quad (1)$$

$$\text{约束条件:} \begin{cases} E_e = E_e(\rho_e) \\ C_e = C_e(\rho_e) \\ K U = F \\ M = \sum_{e=1}^N V_e \rho_e \\ C = \sum_{e=1}^N V_e \rho_e C_e \\ M \leq \epsilon_M M_0 \\ C \leq \epsilon_C C_0 \end{cases} \quad (2)$$

式中: $c$  是结构柔顺度; $K$  为整体刚度矩阵, $U$  和  $F$  分别为位移向量及力向量; $k_0$  和  $u_e$  分别为无弹性模量的单元位移向量和单元位移向量; $\rho_e$  表示第  $e$  个单元的标准化材料密度; $E_e$  和  $C_e$  分别为第  $e$  个单元的材料弹性模量及成本; $V_e$  为第  $e$  个单元的体积, $M$  和  $C$  分别为当前设计域的质量和成本; $M_0$  和  $C_0$  分别为完全填充  $\rho_e = 1$  时设计域的质量和成本; $\epsilon_M$  和  $\epsilon_C$  分别是预设的质量和成本分数。

根据 Zuo 等<sup>[6]</sup>提出的 Ordered SIMP 插值方法,按归一化密度变量  $\rho^i$  的升序对多材料进行排序,即

$$\rho^i = \frac{\rho_T^i}{\rho_{\max}} (i = 1, 2, 3, \dots, m) \quad (3)$$

式中: $\rho_T^i$  为第  $i$  个材料的实际密度; $\rho_{\max}$  是所有候选密度中的最大值; $m$  为材料的总数。通过引入比例系数  $A_E$  和平移系数  $B_E$ ,可得到扩展的幂函数如下:

$$E_e(\rho_e) = A_E \rho_e^p + B_E \quad (4)$$

式中: $p$  为材料插值模型的惩罚因子。

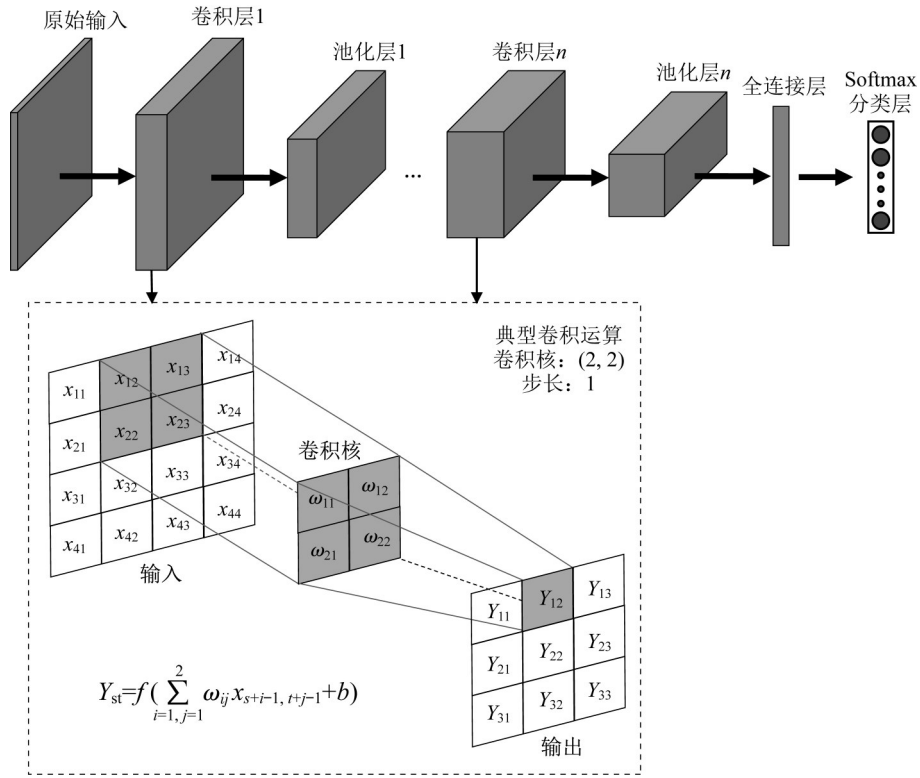


图1 卷积神经网络结构及典型卷积操作

Fig.1 CNN structure and typical convolution operation

对于  $\rho_e \in [\rho_i, \rho_{i+1}]$ ,  $A_E$  和  $B_E$  定义为

$$A_E = \frac{E_i - E_{i+1}}{\rho_i^p - \rho_{i+1}^p}, B_E = E_i - A_E \rho_i^p \quad (5)$$

式中:  $E_i$  和  $E_{i+1}$  分别为材料  $i$  和材料  $i+1$  的弹性模量。

多材料的成本插值公式为

$$C_e(\rho_e) = A_C \rho_e^{\frac{1}{p}} + B_C, \rho_e \in [\rho_{\min}, 1] \text{ 且 } p > 1 \quad (6)$$

对于  $\rho_e \in [\rho_i, \rho_{i+1}]$ ,  $A_C$  和  $B_C$  定义为

$$A_C = \frac{C_i - C_{i+1}}{\rho_i^{\frac{1}{p}} - \rho_{i+1}^{\frac{1}{p}}}, B_C = C_i - A_C \rho_i^{\frac{1}{p}} \quad (7)$$

式中:  $C_i$  和  $C_{i+1}$  分别为材料  $i$  和材料  $i+1$  的成本。

### 3 神经网络模型

#### 3.1 数据生成

鉴于多材料拓扑优化问题十分复杂,现拟从相对简单的悬臂梁初始设计域着手,研究存在钢和铝合金这两种常见建筑材料时的最优拓扑形式。参考 Wang 等<sup>[13]</sup>的研究,采用 Ordered SIMP 方法,生成 34 000 个数据的初始数据集,并按 9:0.5:0.5 的比例将其分为训练集、验证集及测试集。在生成训练数据时,荷载作用于悬臂梁端部,荷载数量取 1 个,荷

载作用节点,体积分数,成本分数以及力的作用方向均服从均匀分布。训练样本的详细信息如下:

- (1)设计域尺度:  $40 \times 80$
- (2)体积分数: 0.2~0.8(均匀分布)
- (3)成本分数: 0.2~0.8(均匀分布)
- (4)惩罚因子: 3
- (5)过滤半径: 2.5
- (6)作用力数量: 1
- (7)作用力方向:  $0^\circ \sim 360^\circ$ (均匀分布)

考虑到训练集的生成是主要的时间成本所在,训练集数量应当是在满足神经网络训练精度情况下尽可能的少。神经网络验证集精度随训练样本数量的变化情况如图 2 所示。可以看出,当训练样本数量小于 5 000 时,神经网络验证集精度随着训练样本数量的增加而显著增加;而当训练样本数量超过 5 000 后,验证集精度不再随着训练样本数量的增加而提升。因此,理论上只需要构造 5 000 个样本即可满足神经网络的训练需求。

神经网络的输入为一个  $41 \times 81 \times 6$  的张量,输入信息包括体积分数,成本分数,边界条件及荷载作用边界条件,如图 3 所示。其中前两个通道为体积分数和成本分数通道,通道中所有数据均等域体积分数及成本分数;第三和第四个通道表示水平向( $X$ )



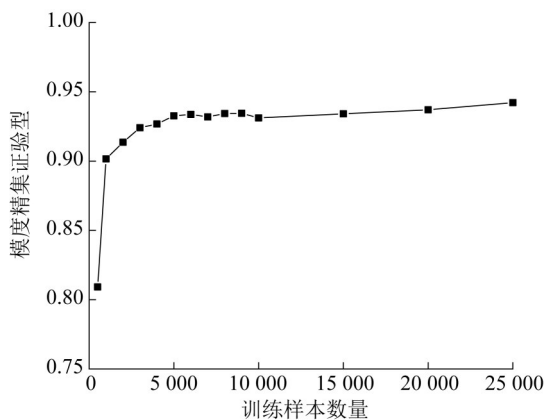


图2 不同训练样本数量下神经网络验证集精度

Fig.2 The accuracy on validation set of the neural network under different training sample numbers

和竖向( $Y$ )的边界条件,通道中数字0表示相应节点无约束,数字1表示相应方向对应节点为固定约束;最后两个通道为所施加的荷载条件,数值0表示相应节点处未施加荷载,数值 $F_x$ 及 $F_y$ 表示相应方向对应节点处作用力的大小。

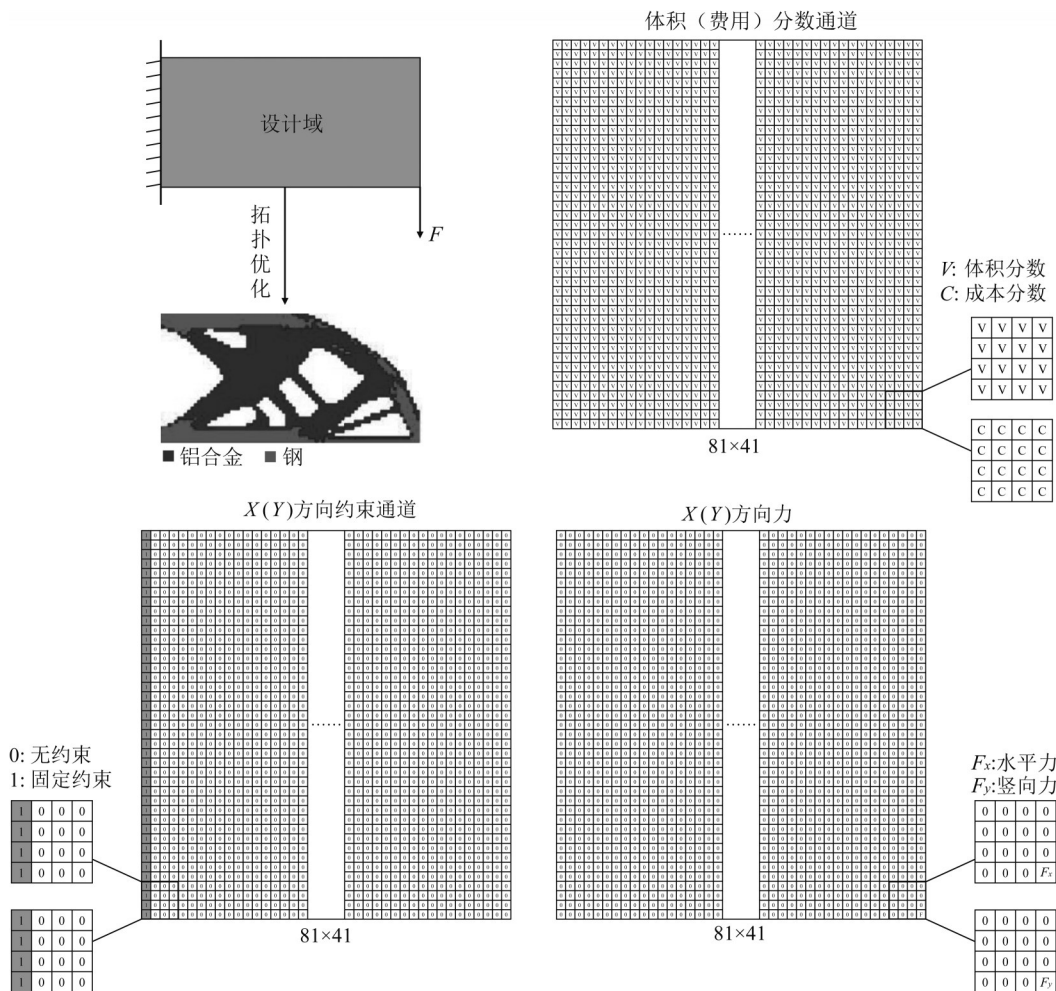


图3 初始设计域

Fig.3 The initial design domain

### 3.2 CNN神经网络结构

神经网络的结构对模型解决问题的能力起着至关重要的作用。U-Net网络具有能够高精度提取目标物边界的优势<sup>[19]</sup>,满足多材料拓扑优化问题要求的拥有明确的材料边界及结构轮廓这一需求,因此本研究采用U-Net网络解决多材料结构拓扑优化问题。整个网络由卷积编码器(下采样)、卷积解码器(上采样)及跳跃连接三部分构成,如图4所示。

设计的张量首先被输入编码器,进行特征提取。在编码器内,输入张量先后经过多次卷积(Conv)、标准化(Batch Normalization)及最大池化(Maxpooling)处理,提取得到不同维度的特征图,最终输出张量的形状比输入张量缩小了8倍。随后,编码器输出的特征图被输入与之对应的解码器。在先后经过多个连接层、转置卷积层、标准化及卷积层后,从输入的特征图中提取不同单元对应的材料类别。在上采样过程中,将来自前一个卷积层输出的通道与特征提取部分对应的通道在Channel维度上进行拼接,形成

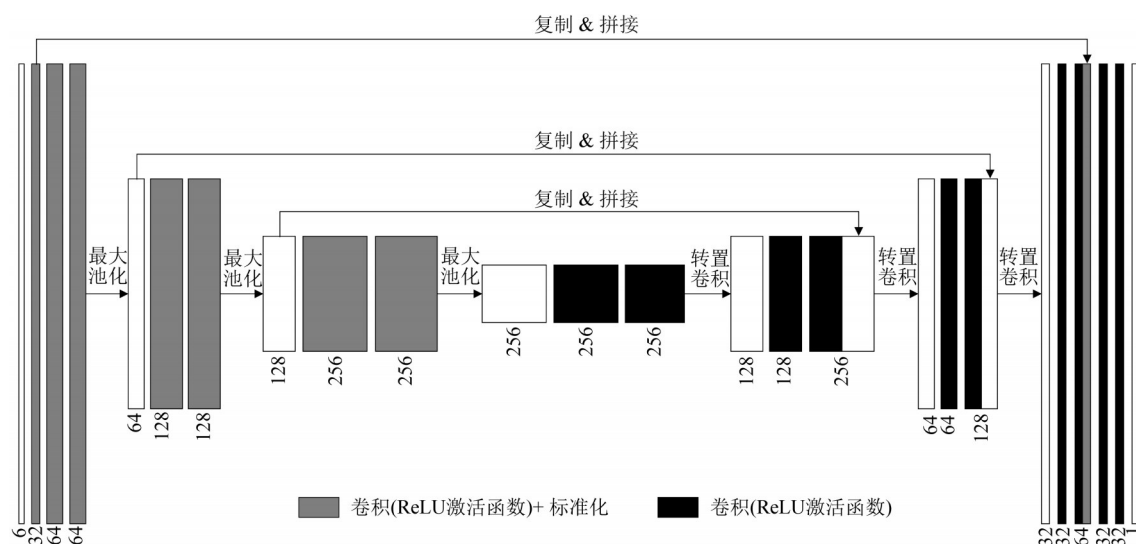


图4 神经网络结构

Fig.4 The architecture of the neural network

更厚的特征,使解码器部分具备高频信息。在网络的最后部分,采用一组具有批量归一化层的卷积层来获得单元解。网络的输出层采用softmax激活函数,输出三通道特征图,代表对应单元属于三种不同材料的概率。单元的材料类别,取决于这三个通道的概率值,即哪个通道的概率值最大,则认为相应单元属于该材料。

神经网络模型在配备 Intel® Core™ i7-8700k CPU 处理器和 NVIDIA GeForce GTX1080 Ti GPU 的计算机上使用 Keras 框架进行训练。模型使用 Adam 优化算法<sup>[20]</sup>进行神经网络训练,并采用了带 L2 正则化的交叉熵损失函数,防止神经网络训练过拟合。训练时,L2 正则化系数取 1e-4,初始学习率为 0.001,当验证损失在 10 个 epoch 内没有减少时,

学习率将衰减 0.1 倍。神经网络训练的损失函数如下:

$$L = \sum_x p(x) \log \frac{p(x)}{q(x)} + \frac{\lambda}{2} \sum_i \theta_i^2 \quad (8)$$

式中: $p(x)$ 为优化目标; $q(x)$ 为神经网络的输出; $\lambda$ 为正则项系数; $\theta_i$ 表示神经网络的权重。

神经网络的训练过程中模型精度和损失的变化趋势如图5所示。

经过约 46 个 epoch 后,模型在验证集上的精度大致收敛于 94%,损失收敛于 0.14,而训练上的精度(损失)仍保持上升(下降),意味着模型训练出现过拟合。因此,在 70 个 epoch 后停止训练,在后续研究中,采用第 46 个 epoch 的神经网络参数开展模型性能评估。

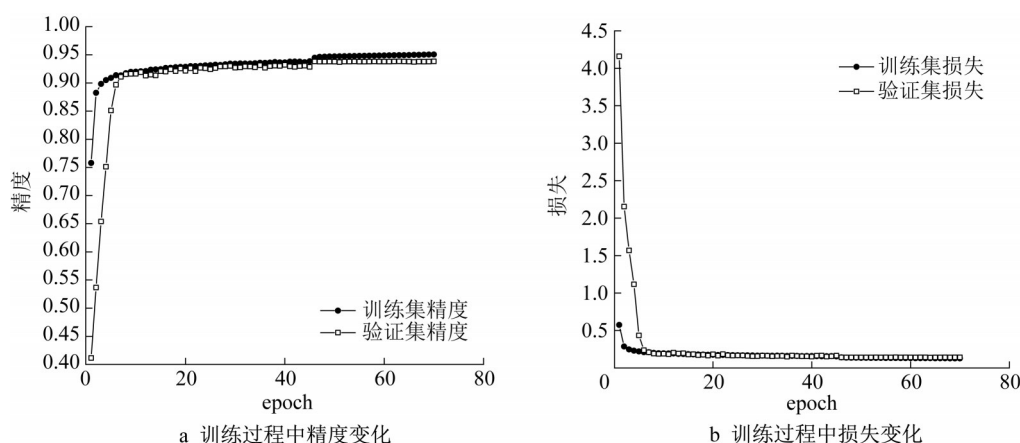


图5 神经网络训练过程中训练集和验证集准确率和损失变化

Fig.5 The accuracy and loss on training and validation set of the neural network during training

## 4 模型性能评估

用测试集数据对训练好的卷积神经网络的性能(计算效率及精度)进行评估。模型的精度包含像素精度、结构柔顺度精度、质量分数精度及成本分数精度等。模型测试的所有计算均在配备 Intel®Core™ i7-8700k CPU 处理器的计算机上进行。

大多数情况下,神经网络预测的结构与 Ordered SIMP 方法计算得到的多材料优化结构在结构形式、

材料分布及结构性能等方面十分相似,如图 6 a 所示。但采用 Ordered SIMP 方法的平均计算时间为 27.51 s,而采用基于深度学习方法的计算时间为 0.157 s(0.156 s 数据预处理+0.001 s 模型预测,生成数据的时间及训练神经网络的时间未被计入),仅相当于 Ordered SIMP 方法的 0.57%。这是由于 Ordered SIMP 方法在优化过程中需要进行上百次有限元迭代分析及灵敏度分析,花费了大量时间。而基于深度学习的拓扑优化方法在模型训练完成后

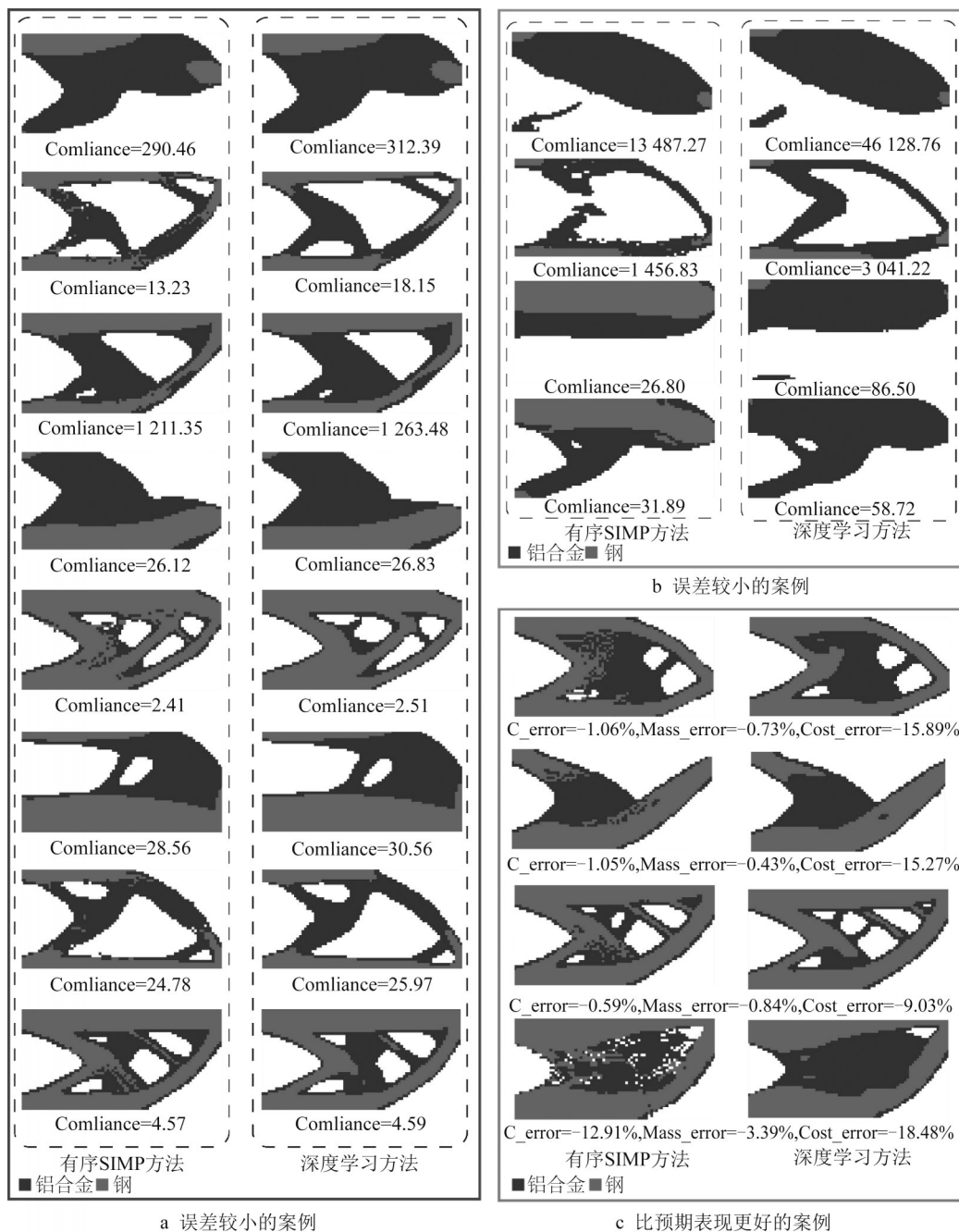


图6 给定约束条件下多材料预测结构与传统方法得到的优化结构对比

Fig.6 Comparison of predicted and optimized structures of multi-materials under given constraints



可以直接预测得到优化后的结构,而无需任何迭代,计算效率得到显著提升。应该注意的是,基于深度学习方法的计算时间不包括生成数据集的时间(生成 5 000 个训练样本需要 38.21 h)和训练神经网络的时间(0.79 h),因为数据准备和模型训练仅为一次离线成本,而训练后的模型可以用来解决无数类似的拓扑优化问题。此外,图 6 中 Ordered SIMP 方法得到的一些结果存在类似传统单一材料拓扑优化的棋盘格现象。相较而言,深度学习方法得到的优化结构具有更好的材料连续性,材料边界更加明确,未发现类似的棋盘格现象。

两种方法的评估结果如表 1 所示,在预测精度方面,基于深度学习方法的柔顺度、像素、质量分数及成本分数的误差分别为 6.49%,6.71%,−2.74%

及−2.76%。然而,在得到的结果中,也存在误差较大(柔顺度误差>25%)的情况,如图 6 b 所示。两个方面的原因可能导致了较大误差的出现:一方面,多材料拓扑优化问题难度较大,在生成训练数据集时,所采用的算法仅能得到局部最优解,导致部分训练数据不够理想(图 6 b 中前两个算例),进而影响到模型预测结果的准确性。另一方面,所提出的方法中,高像素相似度是深度学习网络唯一的训练目标,这意味着只要结果具有较高的像素相似度,材料分布不一致的出现就不会得到惩罚。在类似的研究中<sup>[13,15]</sup>,也存在结构预测不理想的问题。这也为开展进一步研究指出了改进方向:如何将力学信息融入训练目标,使得神经网络预测的结果不仅仅只具有像素概念。

表 1 神经网络预测方法及 Ordered SIMP 方法优化结果比较

Tab.1 Comparison of analysis results between neural network prediction method and Ordered SIMP Method

参数	柔顺度误差(C_error)/%	像素误差/%	质量分数误差(Mass_error)/%	成本分数误差(Cost_error)/%	计算效率提升/%
平均值	6.49	6.71	−2.74	−2.76	99.43

注:在计算神经网络方法的预测精度误差时,未考虑误差过大的样本数据。

除了部分结果出现较大误差外,一些深度神经网络预测得到的结果甚至比 Ordered SIMP 方法表现更佳(即:采用更少的材料,更低的成本得到结构柔顺度更小的结构),如图 6 c 所示。取得这种表现的主要原因在于深度神经网络训练过程中对分类标签的处理:Ordered SIMP 方法得到的优化结构的单元密度分布在 0~1 之间,密度接近何种材料,就认为此单元被该材料填充。为了提高数据生成效率,在采用 Ordered SIMP 方法生成训练数据时,当相邻迭代步的最大单元密度变化小于  $1.01 \times 10^{-3}$  时,终止迭代分析,并认为得到的结果为相应约束下的优化结构。因此,这种处理方法可能存在许多密度介于两种材料之间的中间密度单元。而深度学习方法在训练时,预先对语义分割的分类标签进行处理,使得输出的标签只有三种,即三种材料的相对密度。因而随着神经网络训练的进行,深度学习方法得到的结果将不断向三种材料的相对密度值趋近,使得输出结果的中间密度单元减少,结构具有更低的柔顺度。

## 5 结论

提出了一种基于深度学习的多材料结构拓扑优化方法,首次尝试将深度学习技术引入了多材料结构拓扑优化领域。相较于传统的拓扑优化方法,所

提出的方法能够在几乎不牺牲结构性能的情况下在极短的时间内得到多材料优化结构,而无需进行任何迭代分析。此外,深度学习方法得到的优化结构具有更好的材料连续性,材料边界更加明确,且未发现 Ordered SIMP 方法得到的结果中出现的类棋盘格现象。当然,本研究还存在许多问题有待进一步解决,如找到更好的数据生成方法,提高神经网络的精度,降低大误差出现的比例等

然而,基于深度学习的结构拓扑优化这种方法,尤其是多材料的结构拓扑优化方法才刚起步。无论是本研究还是国外的一些相关研究中,都存在一定的局限性。一方面,由于部分训练数据不理想及神经网络的精度等原因,一些神经网络的预测结果存在较大误差,亟待研究更好的数据生成方法及具有力学信息的训练目标。另一方面,本研究的设计域选为相对简单的长方形悬臂梁边界条件,荷载作用于悬臂端,当荷载作用位置,设计域形状及优化材料种类变化时,则需要构造新的数据集及训练新的神经网络。因此,神经网络的泛化能力有待进一步提高。此外,目前,几乎所有基于深度学习的拓扑优化方法都是依托于柔顺度优化问题,如何将基于深度学习的拓扑优化方法拓展到其他更复杂的优化问题(如应力优化等)将是未来研究的一个重要方向。

## 作者贡献声明:

项程:具体研究工作的开展和论文初稿撰写。

陈艾荣:指导论文的选题,负责论文思路的把控和核准。

## 参考文献:

- [1] PRAGER W, ROZVANY G. Optimal layout of grillages[J]. *Journal of Structural Mechanics*, 1972, 5(1): 1.
- [2] KEN-TUNG C, OLHOFF N. An investigation concerning optimal design of solid elastic plates[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 1981, 17(3): 305.
- [3] BENDSØE M P, KIKUCHI N. Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1988, 71(2): 197.
- [4] BENDSØE M P, SIGMUND O. Material interpolation schemes in topology optimization [J]. *Archive of Applied Mechanics*, 1999, 69(9): 635.
- [5] 焦洪宇,周奇才,李文军,等. 基于变密度法的周期性拓扑优化[J]. *机械工程学报*, 2013, 49(13): 132.  
JIAO Hongyu, ZHOU Qicai, LI Wenjun, *et al.* Periodic topology optimization using variable density method [J]. *Journal of Mechanical Engineering*, 2013, 49(13): 132.
- [6] ZUO W, SAITOU K. Multi-material topology optimization using ordered SIMP interpolation [J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2017, 55(2): 477.
- [7] 陈艾荣,常成. 渐进结构优化法在桥梁找型中的应用[J]. *同济大学学报(自然科学版)*, 2012, 40(1): 8.  
CHEN Airong, CHANG Cheng. Evolutionary structural optimization in form finding of bridges [J]. *Journal of Tongji University (Natural Science)*, 2012, 40(1): 8.
- [8] 罗晓瑜,王春生,姚书奎,等. 基于双向渐进结构优化法的钢桥系统失效模式识别[J]. *中国公路学报*, 2017, 30(3): 31.  
LUO Xiaoyu, WANG Chunsheng, YAO Shukui, *et al.* Identification of system failure modes of steel bridges based on bi-directional evolutionary structural optimization [J]. *China Journal of Highway and Transport*, 2017, 30(3): 31.
- [9] WANG M Y, WANG X, GUO D. A level set method for structural topology optimization [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2003, 192(1): 227.
- [10] XU G, ZHANG W, ZHONG W. Doing topology optimization explicitly and geometrically—a new moving morphable components based framework [J]. *Journal of Applied Mechanics*, 2014, 81(8): 81009.
- [11] 李林波,李瑞杰,邹亚杰. 考虑驾驶员模糊感知的深度学习跟驰模型[J]. *同济大学学报(自然科学版)*, 2021, 49(3): 360.  
LI Linbo, LI Ruijie, ZOU Yajie. Modeling of car-following behaviors considering driver's fuzzy perception using deep learning [J]. *Journal of Tongji University (Natural Science)*, 2021, 49(3): 360.
- [12] MA R, ZHANG Z, DONG Y, *et al.* Deep learning based vehicle detection and classification methodology using strain sensors under bridge deck[J]. *Sensors*, 2020, 20(18): 5051.
- [13] WANG D, XIANG C, PAN Y, *et al.* A deep convolutional neural network for topology optimization with perceptible generalization ability [J]. *Engineering Optimization*, 2022, 54(6): 973.
- [14] SOSNOVIK I, OSELEDETS I. Neural networks for topology optimization [J]. *Russian Journal of Numerical Analysis & Mathematical Modelling*, 2017, 34(4): 215.
- [15] YU Y, HUR T, JUNG J. Deep learning for determining a near-optimal topological design without any iteration [J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2018, 59: 787.
- [16] WANG C, YAO S, WANG Z, *et al.* Deep super-resolution neural network for structural topology optimization [J]. *Engineering Optimization*, 2021, 53(12): 2108.
- [17] LI B, HUANG C, LI X, *et al.* Non-iterative structural topology optimization using deep learning [J]. *CAD Computer Aided Design*, 2019, 115: 172.
- [18] ABUEIDDA D W, KORIC S, SOBH N A. Topology optimization of 2D structures with nonlinearities using deep learning [J]. *Computers and Structures*, 2020, 237, 106283.
- [19] RONNEBERGER O, FISCHER P, BROX T. U-Net: convolutional networks for biomedical image segmentation [C]//18th International Conference on Medical Image Computing and computer-assisted Intervention. Cham: Springer International Publishing, 2015:234-241
- [20] KINGMA D, BA J A: A method for stochastic optimization [C]//International Conference on Learning Representations. San Diego:[s.n.], 2015: 1-15.