

## 侧垂向力耦合模型的轮胎多边形磨损分析

李 勇, 左曙光, 雷 镭, 杨宪武

(同济大学 汽车学院, 上海 201804)

**摘要:** 多边形磨损是汽车轮胎磨损研究中的新课题, 具有重要的理论价值和研究意义. 考虑轮胎接地摩擦的非线性特性, 建立了基于 LuGre 摩擦模型的轮胎侧、垂向力耦合的动力学模型. 根据自激振动理论, 得出轮胎多边形磨损与胎面的侧向振动有关, 磨损边数近似等于胎面的侧向振动频率与车轮滚动频率之比, 并通过仿真得到了能够引起胎面自激振动的车速和车轮前束角范围. 结果表明, 所建模型能很好地解释轮胎多边形磨损的形成机理, 为减小或消除轮胎的自激振动提供了理论依据.

**关键词:** 轮胎; 多边形磨损; 自激振动; 耦合模型; 分岔

**中图分类号:** U 463.341.4

**文献标识码:** A

### Analysis on Polygonal Wear of Automotive Tire of Lateral-vertical Force Coupling Model

LI Yong, ZUO Shuguang, LEI Lei, YANG Xianwu

(College of Automotive Studies, Tongji University, Shanghai 201804, China)

**Abstract:** Considering the nonlinear characteristic of tire's grounding friction, a dynamic model of tire's lateral-vertical force coupling is established based on LuGre friction model. According to self-excitation theory, polygonal wear of tire is found to be related to lateral vibration of tire tread and the polygonal number is equivalent to the ratio of the lateral vibration frequency of tire tread to the rotational frequency of tire. The ranges of speed and toe-in angle which can motivate self-excited vibration are given through simulation. The results show that this model can interpret the formation mechanism of the polygonal wear, and provide a theoretic foundation to reduce or eliminate the tire's self-excited vibration.

**Key words:** tire; polygonal wear; self-excited vibration; coupling model; bifurcation

轮胎磨损不仅直接关系到轮胎的使用性能, 如振动、噪声和操纵性等, 而且关系到轮胎的使用寿命和行驶安全. 因而, 研究轮胎的磨损特性具有重要的理论和实用价值. 近年来, 国内外关于轮胎磨损机理的研究有了大量的报道<sup>[1-4]</sup>, 各国学者通过研究轮胎与路面之间相互作用的微观和宏观机理, 试图解释轮胎磨损的各种形式.

随着高速公路的普及, 汽车在高速和稳定车速下的行驶时间越来越长. 随之而来, 一种自激因素引起的轮胎非正常磨损现象——多边形磨损越来越多. 图1所示为汽车轮胎多边形磨损的实例, 轮胎圆周方向上形成规则的18边形的多边形磨损, 且磨损形状在轮胎轴向上有一定角度的倾斜. 这种磨损可导致轮胎提前报废, 造成爆胎等严重威胁汽车行驶安全的事故, 严重影响到产品和企业的形象.



图1 轮胎多边形磨损

Fig.1 Polygonal wear of tire

目前, 有关轮胎多边形磨损的研究国内外鲜有报道. 国外, 只有日本的 Atsuo Sueoka<sup>[5]</sup> 研究小组对这一现象进行了分析, 他们认为胎面磨损引起的垂向自激振动是轮胎多边形磨损产生的根源, 并根据实验结果给出了轮胎多边形磨损边数的经验公式,

收稿日期: 2010-07-12

基金项目: 国家自然科学基金(50775162); 国家“九七三”重点基础研究发展计划(2011CB711201)

第一作者: 李勇(1983—), 男, 博士生, 主要研究方向为汽车振动与噪声控制. E-mail: 8liyong@tongji.edu.cn

通讯作者: 左曙光(1968—), 男, 教授, 博士生导师, 工学博士, 主要研究方向为汽车系统动力学、汽车振动与噪声控制.

E-mail: sgzuo@tongji.edu.cn

较成功地解释了多边形磨损的现象,但文中只分析了垂向自由度,不能合理地应用到汽车轮胎磨损研究中.本文正是基于这样的背景,考虑轮胎侧、垂向力的耦合,建立基于 LuGre 摩擦模型的轮胎多边形自激振动模型,并探讨车速和车轮定位参数对系统动力学行为的影响.

## 1 数学模型

为了解释轮胎多边形磨损的形成机理,关键要建立合理的动力学模型.本文从轮胎与路面之间相互作用的机理出发,考虑轮胎所受侧、垂向力的耦合以及车轮定位参数的影响,建立基于 LuGre 摩擦模型的动力学模型.

### 1.1 胎面侧向振动模型

文献[5]中指出,轮胎滚动 1 圈内胎面的实时磨损高度  $I(t)$  与胎面所受侧向力  $F_y$  有关,且存在如下关系:

$$I(t) = \delta(F_y)^\zeta$$

式中:  $\delta$  和  $\zeta$  是与路面粗糙程度、胎面材料和结构性质有关的系数.

侧向力  $F_y$  与胎面的侧向运动状态有关,其变化频率与侧向自激振动频率相同,则胎面的实时磨损高度的变化频率等于胎面侧向振动频率,且当侧向力最大时出现磨损峰值.设侧向振动频率和车轮滚动频率分别为  $\omega_1$  和  $\omega_2$ ,相邻 2 个磨损峰值的时间间隔和车轮滚动周期分别为  $1/\omega_1$  和  $1/\omega_2$ ,则可得到车轮滚动 1 圈内出现的磨损峰值的数量为

$$n = \frac{1/\omega_2}{1/\omega_1} = \frac{\omega_1}{\omega_2}$$

因此得出轮胎多边形磨损与胎面的侧向振动有关,磨损边数近似等于胎面的侧向振动频率与车轮滚动频率之比.

在汽车前进过程中,由于前束角的存在,轮胎在侧向方向上会获得一定的速度输入.设前束角为  $\theta$ ,将汽车前进速度  $V$  分解到侧向上,则得到轮胎在侧向上相对于地面的线速度  $V_b$  为

$$V_b = V \sin \theta$$

为了分析轮胎的侧向振动,首先将接地胎面离散化,简化为若干集中质量块,取其中任一质量块作为研究对象,并将轮胎与地面间的平动  $V_b$  简化为皮带轮的转动.简化后的模型如图 2 所示.图中,  $K_s$  和  $C_s$  分别为胎面的侧向刚度和侧向阻尼;  $k_1$  和  $c_1$  分别为胎面的垂向刚度和阻尼;  $k_2$  和  $c_2$  分别为

参与车辆系统垂向振动的胎侧刚度和阻尼;  $m_1$  为胎面质量,  $s$  为位移.

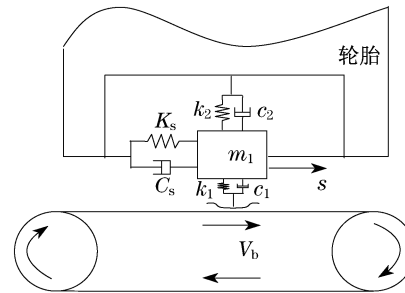


图 2 胎面摩擦振动模型

Fig. 2 Friction vibration model of tread

设胎面质量块  $m_1$  在皮带上相对于初始位置(即弹簧及阻尼器不受力时的位置)的位移为  $s$ , 质量块  $m_1$  与皮带间的相对速度  $V_r$  为

$$V_r = \dot{s} - V_b$$

则胎面侧向振动的动力学方程如下:

$$m_1 \ddot{s} + C_s \dot{s} + K_s s + F_y(V_r) = 0 \quad (1)$$

式中:  $F_y(V_r)$  为胎面所受的侧向力,是由轮胎接地处摩擦力引起的.

### 1.2 LuGre 摩擦模型

在胎面-路面模型中,摩擦特性的描述一直是轮胎力学建模的重点和难点,在计算胎面所受的侧向力时,本文采用由 Canudas de Wit Carlos 等提出的摩擦模型——LuGre 摩擦模型,表达式如下<sup>[6]</sup>:

$$\begin{cases} F = \sigma_0 z + \sigma_1 \frac{dz}{dt} + \sigma_2 V_r \\ \frac{dz}{dt} = V_r - \frac{\sigma_0 |V_r|}{G(V_r)} z \\ G(V_r) = F_s + (F_m - F_s) e^{-|V_r/V_s|^\phi} \end{cases} \quad (2)$$

式中:  $F$  为摩擦力;  $\sigma_0$  为刷毛刚度系数;  $\sigma_1$  为刷毛阻尼系数;  $\sigma_2$  为相对黏滞阻尼系数;  $z$  为刷毛的弹性变形量;  $V_r$  为接触面的相对速度;  $V_s$  为稳态摩擦特性中的 Stribeck 速度;  $F_m = P(t) \mu_m \sin \alpha$  为最大静摩擦力;  $F_s = P(t) \mu_s \sin \alpha$  为滑动摩擦力;  $P(t)$  为轮胎接地处的垂向压力;  $\alpha$  为轮胎的滑移角;  $\mu_m$  为最大静摩擦因数;  $\mu_s$  为动摩擦因数;  $\phi$  为稳态摩擦特性中的 Stribeck 指数.

本文讨论速度恒定时的 LuGre 摩擦模型,此时变形量  $z$  近似不变,即  $dz/dt = 0$ , 得到

$$z_{ss} = \frac{V_r}{|V_r| \sigma_0} G(V_r) = \text{sgn } V_r \frac{G(V_r)}{\sigma_0}$$

则稳态摩擦力为

$$F_{ss} = \text{sgn } V_r G(V_r) + \sigma_2 V_r$$

由式(2),则胎面在侧向上受到的摩擦力为  

$$F_y(V_r) = \text{sgn } V_r P(t) \mu_s \sin \alpha + \text{sgn } V_r P(t) \cdot \sin \alpha (\mu_m - \mu_s) e^{-|V_r/V_s|^\phi} + \sigma_2 V_r \quad (3)$$

### 1.3 车轮外倾引起的振动

由于车轮外倾角对系统的动力学行为有很大影响,因此有必要分析由车轮外倾引起的振动.为了便于分析,这里分别把悬架和轮胎等效为一水平直线和一接地线段,并只考虑左半部分,将外倾角进行放大处理,如图 3 所示.图中,  $\eta$  为车轮外倾角,  $M$  为后桥与轮胎的连接点,  $N$  为后桥的中心,  $\lambda$  为轮胎定点  $O$  的振动角.

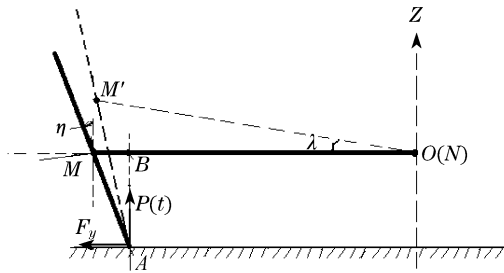


图 3 轮胎—悬架外倾振动示意图

Fig.3 Schematic diagram of camber vibration of tire-suspension

通过简化,轮胎与摆臂一起绕定点  $O$  在垂直于路面的平面内振动.它们与横梁之间的相互作用可以简化为一个具有扭转刚度  $K_P$  的扭簧和阻尼  $C_P$  的减震器.  $MO$  的长度为  $L_P$ ,  $l_{MA} = r_r$  为轮胎滚动半径,  $l_{BA} = r_r \cos \eta$ ,  $l_{BO} = L_P - r_r \sin \eta$ .

则轮胎绕定点  $O$  转动的运动微分方程为

$$J_P \ddot{\lambda} + C_P \dot{\lambda} + K_P \lambda = F_y r_r \cos \eta + P(t)(L_P - r_r \sin \eta) \quad (4)$$

式中:  $J_P$  为轮胎以及与其一起转动的部件绕定点  $O$  的转动惯量.

### 1.4 轮胎侧、垂向力耦合模型

由于轮胎接地处的垂向压力对胎面的侧向振动有很大影响,因此建立轮胎侧、垂向力耦合模型.为了将问题表述更清楚,尽可能将数学模型简化,参考经典 1/4 车辆模型,并考虑车轮定位参数的影响,则系统振动模型如图 4 所示.图中,  $m_2$  为非簧载质量,  $k_3$  和  $c_3$  分别为相应的悬架垂向刚度和阻尼,本文采用线性刚度和阻尼;  $m_3$  为簧载质量;  $\lambda L_P$  为胎面质量块由于外倾振动引起的垂向位移补偿,如图 3,从点  $M$  到  $M'$  的位移,实际情况是一段微小圆弧,由于  $\lambda$  实际值很小,在这里可将其视作一垂向变动微小

位移.

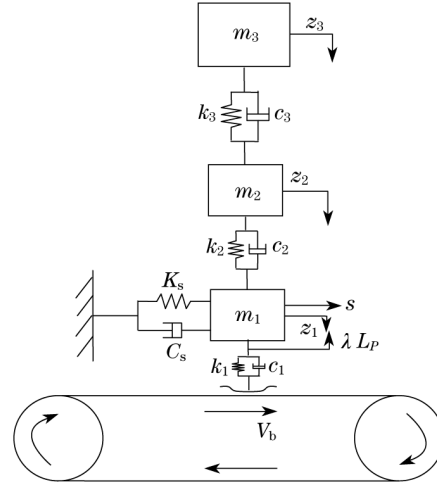


图 4 系统振动模型

Fig.4 Vibration model

根据振动理论,可以列出车身—轮胎—胎面垂向三自由度动力学方程

$$\begin{cases} m_1 \ddot{z}_1 + c_2(\dot{z}_1 - \dot{z}_2) + k_2(z_1 - z_2) + c_1(\dot{z}_1 - \dot{\lambda} L_P) + k_1(z_1 - \lambda L_P) = 0 \\ m_2 \ddot{z}_2 + c_2(\dot{z}_2 - \dot{z}_1) + k_2(z_2 - z_1) + c_3(\dot{z}_2 - \dot{z}_3) + k_3(z_2 - z_3) = 0 \\ m_3 \ddot{z}_3 + c_3(\dot{z}_3 - \dot{z}_2) + k_3(z_3 - z_2) = 0 \end{cases} \quad (5)$$

则轮胎接地处的垂向压力为

$$P(t) = P_0 + c_1(\dot{z}_1 - \dot{\lambda} L_P) + k_1(z_1 - \lambda L_P) \quad (6)$$

式中,  $P_0$  为轮胎接地处的垂向静压力.

综合以上分析,并忽略轮胎与地面间的相对黏滞,即  $\sigma_2 = 0$ ,由式(1),(3)—(6)得到轮胎侧、垂向力耦合振动微分方程

$$\begin{cases} m_1 \ddot{z}_1 + c_2(\dot{z}_1 - \dot{z}_2) + k_2(z_1 - z_2) + c_1(\dot{z}_1 - \dot{\lambda} L_P) + k_1(z_1 - \lambda L_P) = 0 \\ m_2 \ddot{z}_2 + c_2(\dot{z}_2 - \dot{z}_1) + k_2(z_2 - z_1) + c_3(\dot{z}_2 - \dot{z}_3) + k_3(z_2 - z_3) = 0 \\ m_3 \ddot{z}_3 + c_3(\dot{z}_3 - \dot{z}_2) + k_3(z_3 - z_2) = 0 \\ m_1 \ddot{s} + C_s \dot{s} + K_s s + \text{sgn } V_r P(t) \mu_s \sin \alpha + \text{sgn } V_r P(t) \sin \alpha (\mu_m - \mu_s) e^{-|V_r/V_s|^\phi} = 0 \\ J_P \ddot{\lambda} + C_P \dot{\lambda} + K_P \lambda - F_y r_r \cos \eta - P(t)(L_P - r_r \sin \eta) = 0 \end{cases} \quad (7)$$

对式(7)进行量纲一化,引入变化

$$T = \sqrt{\frac{m_3}{k_3}}, \quad \tau = \frac{t}{T}, \quad x_i = \frac{z_i}{L_P} (i = 1, 2, 3),$$

$$x_4 = \frac{s}{L_P}, \beta = \frac{V}{100 V_s}$$

考虑  $\frac{T}{L_P} > 0$ , 因此得到  $\text{sgn} V_r = \text{sgn} \left( \frac{T}{L_P} V_r \right)$ , 则

化简后得到量纲一方程为

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + A_1(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + B_1(x_1 - x_2) + \\ C_1(\dot{x}_1 - \dot{\lambda}) + D_1(x_1 - \lambda) = 0 \\ \ddot{x}_2 + A_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + B_2(x_2 - x_1) + \\ C_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_3) + D_2(x_2 - x_3) = 0 \\ \ddot{x}_3 + A_3(\dot{x}_3 - \dot{x}_2) + (x_3 - x_2) = 0 \\ \ddot{x}_4 + A_4 \dot{x}_4 + B_4 x_4 + \text{sgn} f_1 \sin \alpha [C_4 + \\ D_4 f_2 + (E_4 + F_4 f_2)(\dot{x}_1 - \dot{\lambda}) + \\ (G_4 + H_4 f_2)(x_1 - \lambda)] = 0 \\ \ddot{\lambda} + A_5 \dot{\lambda} + B_5 \lambda - [C_5 + D_5(\dot{x}_1 - \dot{\lambda}) + \\ E_5(x_1 - \lambda)](1 - F_5 \sin \eta) - \\ F_5 \text{sgn} f_1 \sin \alpha \cos \eta \\ [G_5 + H_5 f_2 + (I_5 + J_5 f_2)(\dot{x}_1 - \dot{\lambda}) + \\ (K_5 + L_5 f_2)(x_1 - \lambda)] = 0 \end{cases} \quad (8)$$

式中:  $f_1 = \dot{x}_4 - \beta \alpha_1 \sin \theta$ ,  $f_2 = e^{-|b_1 \dot{x}_4 - 100\beta \sin \theta|^\phi}$ ;

其余量纲一参数为

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{c_2 T}{m_1}, B_1 = \frac{k_2 m_3}{k_3 m_1}, C_1 = \frac{c_1 T}{m_1}, D_1 = \frac{k_1 m_3}{k_3 m_1}, \\ A_2 &= \frac{c_2 T}{m_2}, B_2 = \frac{k_2 m_3}{k_3 m_2}, C_2 = \frac{c_3 T}{m_2}, D_2 = \frac{k_3 m_3}{k_3 m_2}, \\ A_3 &= \frac{c_3 T}{m_3}, A_4 = \frac{C_s T}{m_1}, B_4 = \frac{K_s m_3}{k_3 m_1}, C_4 = \\ &= \frac{P_0 \mu_s m_3}{m_1 k_3 L_P}, D_4 = \frac{P_0 (\mu_m - \mu_s) m_3}{m_1 k_3 L_P}, E_4 = \frac{c_1 \mu_s T}{m_1}, \\ F_4 &= \frac{c_1 (\mu_m - \mu_s) T}{m_1}, G_4 = \frac{k_1 \mu_s m_3}{m_1 k_3}, H_4 = \\ &= \frac{k_1 (\mu_m - \mu_s) m_3}{m_1 k_3}, A_5 = \frac{C_P T}{J_P}, B_5 = \frac{K_P m_3}{J_P k_3}, C_5 = \\ &= \frac{P_0 L_P m_3}{J_P k_3}, D_5 = \frac{c_1 L_P^2 T}{J_P}, E_5 = \frac{k_1 L_P^2 m_3}{J_P k_3}, F_5 = \\ &= \frac{r_r}{L_P}, G_5 = \frac{P_0 L_P \mu_s m_3}{J_P k_3}, H_5 = \frac{P_0 L_P (\mu_m - \mu_s) m_3}{J_P k_3}, \\ b_1 &= \frac{L_P}{TV_s}, I_5 = \frac{c_1 L_P^2 T \mu_s}{J_P}, J_5 = \\ &= \frac{c_1 L_P^2 T (\mu_m - \mu_s)}{J_P}, K_5 = \frac{k_1 L_P^2 m_3 \mu_s}{J_P k_3}, L_5 = \\ &= \frac{k_1 L_P^2 m_3 (\mu_m - \mu_s)}{J_P k_3}, a_1 = \frac{100 TV_s}{L_P}. \end{aligned}$$

将式(8)化为 1 阶微分方程组

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 \\ \dot{y}_2 = -A_1(y_2 - y_4) - B_1(y_1 - y_3) - \\ C_1(y_2 - y_{10}) - D_1(y_1 - y_9) \\ \dot{y}_3 = y_4 \\ \dot{y}_4 = -A_2(y_4 - y_2) - B_2(y_3 - y_1) - \\ C_2(y_4 - y_6) - D_2(y_3 - y_5) \\ \dot{y}_5 = y_6 \\ \dot{y}_6 = -A_3(y_6 - y_4) - (y_5 - y_3) \\ \dot{y}_7 = y_8 \\ \dot{y}_8 = -A_4 y_8 - B_4 y_7 - \text{sgn} g_1 \sin \alpha [C_4 + \\ D_4 g_2 + (E_4 + F_4 g_2)(y_2 - y_{10}) + \\ (G_4 + H_4 g_2)(y_1 - y_9)] \\ \dot{y}_9 = y_{10} \\ \dot{y}_{10} = -A_5 y_{10} - B_5 y_9 + [C_5 + D_5(y_2 - y_{10}) + \\ E_5(y_1 - y_9)](1 - F_5 \sin \eta) + \\ F_5 \text{sgn} g_1 \sin \alpha \cos \eta [G_5 + H_5 g_2 + (I_5 + \\ J_5 g_2)(y_2 - y_{10}) + \\ (K_5 + L_5 g_2)(y_1 - y_9)] \end{cases}$$

式中:  $g_1 = y_8 - \beta \alpha_1 \sin \theta$ ,  $g_2 = e^{-|b_1 y_8 - 100\beta \sin \theta|^\phi}$ .

由于系统的复杂性,理论分析有一定难度,因此本文采用数值方法分析其动力学行为的变化情况.

## 2 数值模拟

汽车行驶速度和车轮前束角对轮胎多边形磨损影响很大,因此本文分别以汽车行驶速度和车轮前束角为分岔参数,探讨系统动力学行为的变化.

分析对象为国内某公司生产的轿车,所用轮胎为 195/65R15 型轮胎,取  $m_1 = 0.3 \text{ kg}$ ,  $m_2 = 45 \text{ kg}$ ,  $m_3 = 400 \text{ kg}$ ,  $k_1 = 538.2 \text{ kN} \cdot \text{m}^{-1}$ ,  $k_2 = 414 \text{ kN} \cdot \text{m}^{-1}$ ,  $k_3 = 23 \text{ kN} \cdot \text{m}^{-1}$ ,  $c_1 = 50 \text{ N} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-1}$ ,  $V_s = 0.2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ ,  $\eta = 1.5^\circ$ ,  $c_2 = 50 \text{ N} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-1}$ ,  $c_3 = 1.8 \text{ kN} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-1}$ ,  $K_s = \sigma_0 = 726 \text{ kN} \cdot \text{m}^{-1}$ ,  $\phi = 2.0$ ,  $C_s = \sigma_1 = 10 \text{ N} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-1}$ ,  $J_P = 90 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ ,  $K_P = 3.66 \text{ MN} \cdot \text{m} \cdot \text{r}^{-1}$ ,  $L_P = 0.885 \text{ m}$ ,  $r_r = 0.317 \text{ m}$ ,  $C_P = 50 \text{ N} \cdot \text{s} \cdot \text{m} \cdot \text{r}^{-1}$ ,  $\alpha = 1.5^\circ$ ,  $\mu_m = 0.7$ ,  $\mu_s = 0.5$ ,  $P_0 = 4 \text{ kN}$ .

### 2.1 车速对系统动力学行为的影响

给定前束角为  $\theta = 0.3^\circ$ , 图 5 给出了系统随参数  $\beta$ , 即随车速变化的分岔图.

从分岔图可以看出,系统在  $\beta$  较小时处于稳定状态(图 6), 表明车速较小时胎面不能产生自激振

动.随着车速的增加,即 $\beta$ 的增大,稳定的平衡点在 $\beta = 0.76$ 时失去稳定性,由Hopf分岔导致周期振荡(图7),即胎面产生自激振动.对 $y_8$ 的时间历程进行自功率谱分析,得到周期运动的振荡频率(图8),由量纲一变换 $\tau = t/T$ ,可计算出胎面的侧向振动频率大致为250 Hz,根据轮胎多边形磨损的边数近似等于胎面的侧向振动频率与车轮滚动频率之比,则可以得到在不同车速下轮胎多边形磨损的边数.

随着 $\beta$ 的进一步增大, $y_7$ 和 $y_8$ 的振荡范围不断变大.表明随着车速的增加,胎面的自激振动更加剧烈,并在 $\beta = 1.025$ 时导致混沌振荡的产生(图9).混沌运动在 $\beta = 1.306$ 时失稳系统再次进入周期运动,并最终在 $\beta = 2.05$ 时趋于稳定状态.

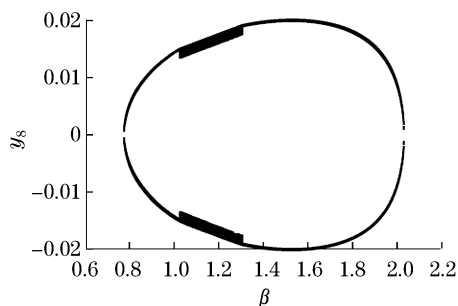


图5 系统随 $\beta$ 变化的分岔图

Fig.5 Bifurcation diagram of the system with the variation of  $\beta$

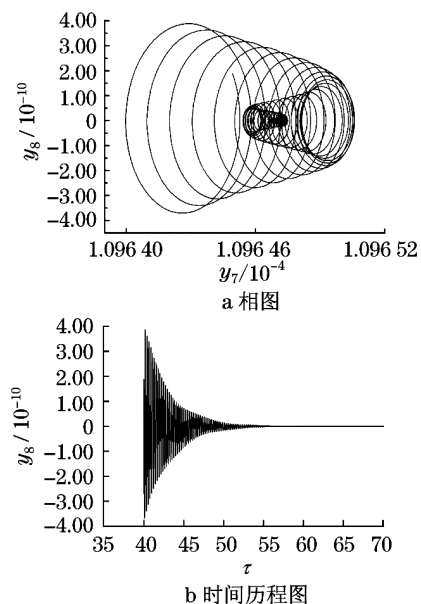


图6  $\beta = 0.73$ 时系统的相图和时间历程图

Fig.6 Phase map and the time histories diagram of system for  $\beta = 0.73$

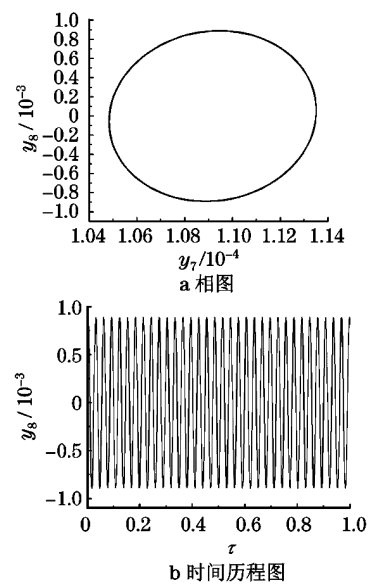


图7  $\beta = 0.76$ 时系统的相图和时间历程图

Fig.7 Phase map and the time histories diagram of system for  $\beta = 0.76$

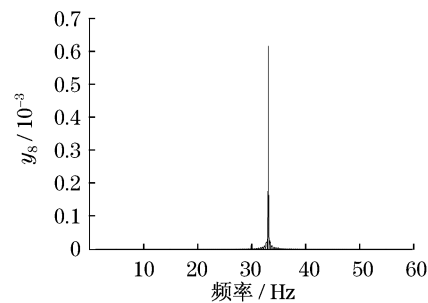


图8 周期运动的振荡频率

Fig.8 The vibration frequency of periodic motion

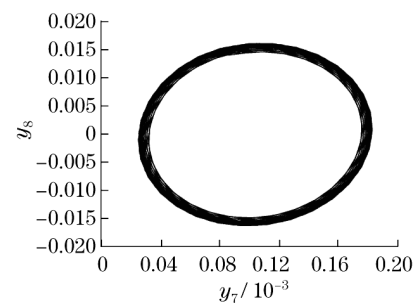


图9  $\beta = 1.025$ 时系统的相图

Fig.9 Phase map of system for  $\beta = 1.025$

从图9可以看出,该混沌运动的轨迹集中在原先周期轨道的微小邻域内,即围绕原周期轨道的微小混沌振荡,因此仍可看作为特殊的自激振动.为了解释这一现象,引入基于Poincare映射的混沌运动的平均频率的概念<sup>[7]</sup>.混沌运动的平均频率为

$$\bar{\omega} = \lim_{N \rightarrow \infty} 2\pi N / \tau(N)$$

其中,  $\tau(N)$  表示第  $N$  次相交到 Poincare 截面时所需要的时间.

对该混沌运动的时间历程进行自功率谱分析, 如图 10 所示. 可以发现, 其平均频率接近于原周期运动的频率, 即处于混沌运动状态时胎面的侧向振动平均频率大致等于 250 Hz, 因此汽车在处于混沌运动的车速下行驶, 轮胎被磨损为大致均匀的多边形.

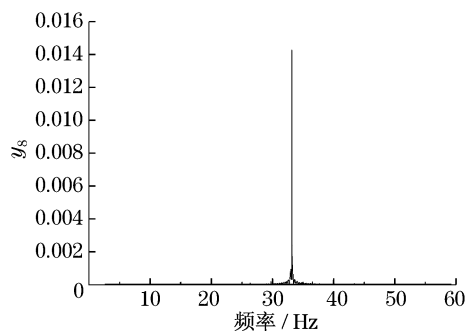


图 10 混沌运动的振荡频率

Fig.10 Vibration frequency of chaos motion

从以上分析可以得知, 当车轮前束角为  $\theta = 0.3^\circ$  时,  $\beta$  在 0.76~2.05 的范围内系统为周期运动或混沌运动, 对照前文中的量纲一变化过程, 则车速处于 54.72~147.6 km·h<sup>-1</sup> 时胎面能产生自激振动, 即能导致轮胎多边形磨损产生.

## 2.2 车轮前束角对系统动力学行为的影响

在车轮的定位参数中, 前束角是影响轮胎多边形磨损的一个重要因素, 因此有必要分析车轮前束角对系统动力学行为的影响. 通过以往的研究发现, 当汽车在高速公路上行驶时, 轮胎发生多边形磨损的概率特别高, 故设定  $\beta = 1.4$ , 即车速为 100.8 km·h<sup>-1</sup>, 图 11 给出了汽车高速行驶时系统随车轮前束角  $\theta$  变化的分岔图.

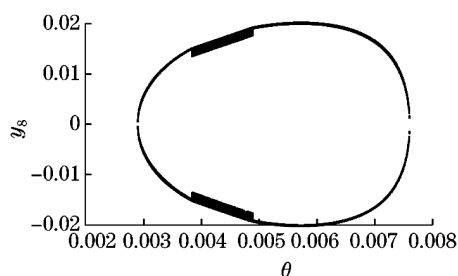


图 11 系统随  $\theta$  变化的分岔图

Fig.11 Bifurcation diagram of the system with the variation of  $\theta$

从图 11 可以得到, 当车轮前束角处于 0.002 89~0.007 6 时, 胎面能产生自激振动, 等效角度为 0.165 6°~0.435 4°. 在此参数范围内, 胎面的侧向振动频率大致为 250 Hz, 车速为 100.8 km·h<sup>-1</sup>, 对应的车轮滚动频率近似为 14 Hz, 由轮胎多边形磨损的边数近似等于胎面的振动频率与车轮滚动频率之比可以得知, 轮胎多边形磨损的边数为 18. 由于其演化过程与图 5 类似, 故不再赘述.

## 3 结论

(1) 从轮胎与路面之间相互作用的机理出发, 考虑轮胎所受侧、垂向力的耦合以及车轮定位参数, 建立了基于 LuGre 摩擦模型的动力学模型.

(2) 基于自激振动理论, 得出轮胎多边形磨损与胎面的侧向振动有关, 轮胎多边形磨损的边数近似等于胎面的侧向振动频率与车轮滚动频率之比.

(3) 通过仿真发现, 汽车在中高速的情况下容易出现自激振动, 并得到了能够引起自激振动的车速和车轮前束角范围, 与现有的经验基本一致.

## 参考文献:

- [1] Fujijawa T, Uchiyama Y, Yamaguchi I. Tire model to predict treadwear[J]. Tire Science and Technology, 1999, 27(1):106.
- [2] Fujijawa T, Yamazaki S, Uchiyama Y. Tire wear caused by mild slip of tread[J]. Rubber Chemistry and Technology, 1997, 70(4):572.
- [3] 郭伟, 何仁. 基于减少轮胎磨损的悬架初始定位参数的优化[J]. 江苏大学学报, 2002, 9(5):49.  
GUO Wei, HE Ren. Optimization of suspension initial alignment parameters based on reducing tire wear[J]. Journal of Jiangsu University, 2002, 9(5):49.
- [4] 李勇, 左曙光, 雷镭, 等. 基于胎面侧向振动的轮胎多边形磨损机理分析[J]. 同济大学学报:自然科学版, 2011, 39(1):100.  
LI Yong, ZUO Shugang, LEI Lei, et al. Analysis on polygonal wear of automotive tire based on lateral vibration of tire tread[J]. Journal of Tongji University: Natural Science, 2011, 39(1):100.
- [5] Sueoka A, Ryu T, Kondou T, et al. Polygonal wear of automobile tire[J]. JSME, 1997, 40(1):210.
- [6] Canudas D W C, Olsson H, Astrom K J, et al. A new model for control of systems with friction[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1995, 40(3):419.
- [7] 张晓芳, 陈章耀, 毕勤胜. 耦合电路中的复杂振荡行为分析[J]. 物理学报, 2009, 58(5):2963.  
ZHANG Xiaofang, CHEN Zhangyao, BI Qinsheng. Complicated oscillations in coupled electrical circuits[J]. Acta Phys Sin, 2009, 58(5):2963.