

含多交易对手信用违约互换的信用风险模型

梁 进, 李文毅

(同济大学 数学系, 上海 200092)

摘要: 研究含多交易对手信用违约互换(CDS)产品的交易对手估值调整(CVA)计算模型, 在约化模型的框架下, 利用单因子(反)Cox-Ingersoll-Ross 模型来刻画交易对手和参考公司的违约正(负)相关性, 得到了一个由耦合的非线性偏微分方程组来表达交易对手估值调整计算模型, 并用迭代的算法求解分析, 同时比较了标准的交易对手估值调整的值。

关键词: 多交易对手; 信用风险; 交易对手估值调整(CVA)
中图分类号: F830 **文献标志码:** A

Counterparty Valuation Adjustment Calculation Model of Multi-counterparties Credit Default Swap

LIANG Jin, LI Wenyi

(Department of Mathematics, Tongji University, Shanghai 200092, China)

Abstract: A multi-counterparties credit default swap (CDS) was investigated. Under the reduced model framework, single factor cox-ingersoll-ross (CIR) and inversed CIR models were used to characterize positive and negative correlation of the default rates among the counterparties and reference. The counterparty valuation adjustment (CVA) calculation model was obtained, which was expressed by a system of coupled nonlinear partial differential equations. With this model, CVA was calculated by an iterative numerical algorithm. The results were analyzed correspondingly, which indicated the dependence on the parameters of the CVA, and a comparative study was made with the results of the standard single-name CDS.

Key words: multi-counterparties; credit exposure; counterparty valuation adjustment (CVA)

务危机, 再到目前全球范围内的通胀危机, 都显示世界经济还没有从美国次贷危机的阴霾中走出来。这些危机凸显场外衍生工具市场交易对手风险的重要性, 特别是信用衍生工具。

大多数的场外衍生品交易都有交易对手的信用风险。在巴塞尔协议 II 中, 交易对手信用风险 (counterparty credit risk, CCR) 被定义为: “一桩交易对手方可能在交易现金流最后结算前发生违约; 如果这桩交易或资产组合在违约时对本方有正的经济价值, 那么对本方就会发生经济上的损失。”过去的十年中, 场外交易飞速发展, 但直到 2008 年次贷危机爆发才使其违约风险被广泛受到关注。这次金融危机造成了自 1930 年经济大萧条后全球范围内的一次巨大的经济衰退。而交易对手信用风险也在这次金融危机中扮演了重要的角色。

信用违约互换 (credit default swap, CDS) 可以显示市场中交易的“信用健康”。CDS 的出现解决了信用风险的流动性问题, 使得信用风险可以像市场风险一样进行交易, 从而转移担保方风险, 同时也降低了企业发行债券的难度和成本。但是基于分散风险的原则, 在错位风险的情况下, 对信用衍生产品进行风险度量与控制时有一个问题令风险规避方感兴趣: 一份风险资产合约是否可由多名交易对手来承担风险? 如果是, 那么他们之间的违约正负相关性怎样影响风险? 所以如何建立合理的数学模型来研究这样的风险就是本文的课题。

交易对手估值调整 (counterparty valuation adjustment, CVA) 被用来估算交易对手的信用风险。换句话说, CVA 就是考虑和不考虑交易对手违约风险情况下对某合约估值的差额。Pykhtin 等^[1]和 Alavian 等^[2]对交易对手信用风险以及 CVA 作了概括和综述。Brigo^[3]在约化法的框架下考虑了交易对手信用风险, 并对违约强度和无风险利率的相关性

从 2009 年底的迪拜债务危机到去年的欧洲债

收稿日期: 2013-01-20

基金项目: 国家自然科学基金(11271287)

第一作者: 梁 进(1959—), 女, 教授, 理学博士, 博士生导师, 主要研究方向为金融数学。E-mail: liang_jin@tongji.edu.cn

通讯作者: 李文毅(1988—), 男, 硕士生, 主要研究方向为金融数学。E-mail: liwenyi880629@126.com

作了分析. 他们还在文献[4]中用约化法对考虑交易对手违约风险的权益信用违约互换(contingent credit default swap, CCDS)进行了研究, 同样也对违约强度和利率的相关性作了分析, 其违约强度被扩展到跳扩散过程. Brigo 等^[5]将交易对手信用风险的研究从单边的扩展到了双边. Li 在文献[6]考虑了带交易对手信用风险的 CDS 定价是将回收率假设为随机过程. 魏巍和姜礼尚^[7]利用单因子模型对标准的单名 CDS 产品的 CVA 作了计算和分析.

本文将在模型^[7]基础上考虑含多交易对手的单名 CDS 产品的 CVA 计算模型, 通过分析考虑交易对手之间违约的相关性, 分别用单因子 CIR(Cox-Ingersoll-Ross)模型和单因子反 CIR 模型刻画正负相关性, 并在约化方法的框架下得到 CVA 的计算模型, 并在这个基础上作了一些数值结果的分析, 同时将多交易对手的 CDS 与标准的 CDS 的 CVA 值进行比较分析, 进而得出一些有指导意义的结论.

1 建立模型

1.1 多交易对手单名 CDS 的现金流分析

现在考虑多交易对手的单名 CDS 合同的现金流, 假设这张合同中有两个交易对手 B_1, B_2 , 一个参考公司 C , 对应符号的上、下标 $i(i=1, 2, 3)$ 做如下的假设: 交易对手 $B_i \rightarrow i(i=1, 2)$, 参考公司 $C \rightarrow i=3$.

在约化法框架下, 违约可用强度模型来刻画. 假

设 τ_i 表示第 $i(i=1, 2, 3)$ 公司的违约时间, 定义违约指示过程 $H_t^i = I_{\{\tau_i \leq t\}} (i=1, 2, 3)$, 其中 H^i 是这三个违约过程生成的信息流. 即 $H^i = (h_t^i)_{t \in \mathbb{R}_+}$, 其中 $h_t^i = \sigma(H_u^i: u \leq t) = \sigma(I_{\{\tau_i \leq u\}} | u \leq t)$, $H = H^1 \vee H^2 \vee H^3$ 以及 σ -域流 $h_t = h_t^1 \vee h_t^2 \vee h_t^3 = \sigma(h_t^1, h_t^2, h_t^3)$, 对所有 $t \in \mathbb{R}_+$. h_t 包含了这份合约是否终止的所有信息. 假设 $G_t = h_t^1 \vee h_t^2 \vee h_t^3 \vee F_t$, 其中 $\{F_t\}_{t \geq 0}$ 为市场上所有可知信息. 假设 τ_i 是 G_t -停时, 即事件 $(\tau_i \leq t) (i=1, 2, 3)$ 属于 σ -域流 G_t . 所以 τ_i 是概率空间 $(\Omega, G_t, \{G_t\}_{t \geq 0}, P)$ 上的随机时间, 其中 P 是风险中性概率.

在标准 CDS 基础上考虑多交易对手, 其他条件不变. 如保费是定期支付, 赔付在违约发生时, 剩余保费将在下个支付日支付. 合约到期日为 T , 参考贷款面值为 1. 保费支付日为 $t_1 < t_2 < \dots < t_M = T$, M 为总期数, Δt 为相邻保费支付日间隔, R_1 为参考公司的回收率. 新的假定是: 如果一个交易对手在参考公司违约之前违约, 则该交易对手所担保的比例马上结算, 而投资者与另一交易对手的合约继续. 如果参考公司 C 在两个交易对手之前发生违约, CDS 卖方 B_1, B_2 按相应比例 a_1, a_2 进行赔付, 分别为: $a_i(1 - R_1)$, ($i=1, 2, a_1 + a_2 = 1$), 则多交易对手的单名 CDS 合同的具体现金流如图 1 所示. 图中, τ_3 为参考公司违约时刻, $a_1(1 - R_1)$ 为交易对手 B_1 的赔付, $a_2(1 - R_1)$ 为交易对手 B_2 的赔付. 其中, R_2 为 CDS 卖方 B_1, B_2 发生违约时的回收率.

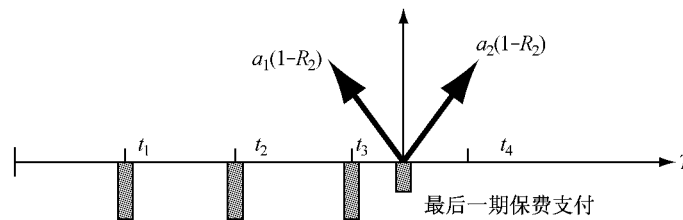


图1 多交易对手信用违约互换现金流图

Fig.1 Cash flow of the multi-counterparties credit default swap products

1.2 含多交易对手单名 CDS 合约的 CVA 计算模型

假设 r 为无风险利率, U 为考虑了 CCR 的含多交易对手的单名 CDS 的价值, V 为不考虑 CCR 的含多交易对手的单名 CDS 的价值, λ^i 表示第 $i(i=1, 2, 3)$ 公司的违约强度. 如果 CDS 卖方 $B_i(i=1, 2)$ 先于参考公司违约, 买方的损失(或收益)为^[8] $a_i(R_2 U^+ - U^-)$. 站在 t 时刻, 不含 CCR 的多交易对手 CDS 合约的价值为:

$$V(t) = E_t \left[\int_t^T (1 - R_1) \lambda_s^3 e^{-\int_t^s (r_u + \lambda_u^1 + \lambda_u^2 + \lambda_u^3) du} ds - \sum_{t_i \geq t} (\Delta t \cdot S_t \cdot \right.$$

$$\left. e^{-\int_t^s (r_u + \lambda_u^3) du} + S_t \int_{t \vee t_{i-1}}^{t_i} (s - t_{i-1}) \lambda_s^3 e^{-\int_t^s (r_u + \lambda_u^1 + \lambda_u^2 + \lambda_u^3) du} ds \right].$$

其中: $E_t[J(r_u, \lambda_u^i)] = E[J(r_u, \lambda_u^i) | r_t = r, \lambda_t^i = \lambda^i]$ 为条件期望, 类似于单交易对手的 CDS; Δt 为相邻保费支付日间隔; $E_t[\cdot]$ 为条件期望; S_t 为 t 时刻签订的合约的保费; λ^i 为公司 i 的违约强度; 含 CCR 的多交易对手 CDS 合约的价值为:

$$U(t) = \sum_{i \in \{1, 2\}} a_i E_t \left[\int_t^T (1 - R_1) \lambda_s^3 e^{-\int_t^s (r_u + \lambda_u^1 + \lambda_u^2 + \lambda_u^3) du} ds - \sum_{t_i \geq t} (\Delta t \cdot S_t \cdot e^{-\int_t^{t_i} (r_u + \lambda_u^1 + \lambda_u^2 + \lambda_u^3) du} + S_t \int_{t \vee t_{i-1}}^{t_i} (s - \right.$$

$$t_{i-1})\lambda_s^3 e^{-\int_t^s (r_u + \lambda_u^1 + \lambda_u^3) du} ds) - \int_t^T (R_2 U^+ - U^-) \lambda_s^i e^{-\int_t^s (r_u + \lambda_u^1 + \lambda_u^3) du} ds].$$

其中: $U^+ = \max\{U, 0\}$, $U^- = \min\{U, 0\}$, r 为无风险利率.

那么多交易对手 CDS 合约的 CVA 在 t 时刻的估值为

$$CVA(t) = V(t) - U(t) \quad (1)$$

1.3 单因子 CIR 模型

(1) 多交易对手与参考公司之间违约相关性为正相关情形

考虑利用单因子模型来建立参考公司违约与交易对手违约之间的相关性. 在引言部分分析 CDS 的信用风险中, 已经强调了利率作为宏观经济变量的重要性. 利率不仅关系到整个国家的经济运行, 同样对每个投资者也是十分重要的投资因素. 所以利用 r_t 表示公共因子即系统性风险因子, 而 $\beta_i^j (i=1, 2, 3)$ 则表示第 i 公司违约的特有因子即非系统性风险因子, 得到下面的单因子模型:

$$\begin{cases} \lambda_t^1 = b_1 r_t + c_1 \beta_t^1 \\ \lambda_t^2 = b_2 r_t + c_2 \beta_t^2 \\ \lambda_t^3 = b_3 r_t + c_3 \beta_t^3 \end{cases} \quad (2)$$

式中, b_i 和 c_i 都是非负常数, 并且 $r_t, \beta_t^1, \beta_t^2$ 和 β_t^3 是相互独立的随机过程.

假设瞬时无风险利率 r_t 和 $\beta_i^j (i=1, 2, 3)$ 都由 CIR 过程驱动, 即

$$\begin{aligned} dr_t &= \kappa_0 (\theta_0 - r_t) dt + \sigma_0 \sqrt{r_t} dW_t^0, \\ d\beta_t^i &= \kappa_i (\theta_i - \beta_t^i) dt + \sigma_i \sqrt{\beta_t^i} dW_t^i \end{aligned}$$

其中 κ_i, θ_i 和 σ_i 是正的常数, 并且满足 Feller 条件 $2\kappa_i \theta_i > \sigma_i^2$; W_t^i 是相互独立的标准布朗运动 ($i=0, 1, 2, 3$).

(2) 多交易对手与参考公司之间违约相关性为负相关情形

现在考虑参考公司与交易对手之间的违约是负相关的, 即宏观利率因素对两者的影响是反向的. 为保证所有的 $\lambda_t^i (i=1, 2, 3)$ 均为正, 假设^[8]:

$$\begin{cases} \lambda_t^1 = \frac{b_1}{r_t} + c_1 \beta_t^1 \\ \lambda_t^2 = \frac{b_2}{r_t} + c_2 \beta_t^2 \\ \lambda_t^3 = b_3 r_t + c_3 \beta_t^3 \end{cases} \quad (3)$$

其中 b_i 和 c_i 均为非负常数, 同样假设 $\beta_i^j (i=1, 2, 3)$ 是相互独立的随机过程. 这样, λ_t^1 和 λ_t^2 之间的违约相关性为正相关, 而 λ_t^1, λ_t^2 分别与 λ_t^3 之间的违约相

关性为负相关的.

(3) 一个交易对手与参考公司之间的违约相关性为正相关而另一个交易对手与参考公司之间的违约相关性为负相关情形

现在考虑参考公司与交易对手之间的违约有正相关的, 也有负相关的情形, 即宏观利率因素对一个交易对手的影响为正, 另一个为负, 此时假定:

$$\begin{cases} \lambda_t^1 = \frac{b_1}{r_t} + c_1 \beta_t^1 \\ \lambda_t^2 = b_2 r_t + c_2 \beta_t^2 \\ \lambda_t^3 = b_3 r_t + c_3 \beta_t^3 \end{cases} \quad (4)$$

其中 b_i 和 c_i 均为非负常数, 同样假设 $\beta_i^j (i=1, 2, 3)$ 是相互独立的随机过程. 这样, λ_t^2 和 λ_t^3 之间的违约相关性为正相关, λ_t^1 和 λ_t^3 之间的违约相关性是负相关的.

模型(3)中第①式 λ_t^1 含有 $1/r_t$ 项, 其为 CIR 过程的倒数, 满足反 CIR 过程^[9] (inverse CIR process, ICIR).

2 模型求解

本文的模型求解分为线性的和非线性的, 首先解决线性问题的解.

2.1 模型的线性问题求解

2.1.1 单因子 CIR 模型的情形

建立了单因子 CIR 模型后, 便可以对 CVA 值式(1)进行求解了. 观察式(1), 求解关键在于求类似于 $E_t[e^{-\int_t^s (\lambda_u^1 + \lambda_u^3 + r_t) du}]$ 和 $E_t[\int_t^s \lambda_u^3 e^{-\int_t^u (\lambda_v^1 + \lambda_v^3 + r_t) dv} du]$ 的条件期望. 将模型(2)代入这两个期望表达式可化为求解如下两个基本类型的期望: (I) $E_t[e^{-\int_t^u c_i \beta_v^i dv}]$ 和 (II) $E_t[\beta_u^i e^{-\int_t^u c_i \beta_v^i dv}]$. 对于形式(I)的期望, 可以通过求解下面偏微分方程的 Cauchy 问题 $P(\beta^i, t; u, x) = E_t[e^{-\int_t^u k \beta_v^i dv + x \beta_u^i}]$, 其中 k 为常数:

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial t} + \kappa_i (\theta_i - \beta^i) \frac{\partial P}{\partial \beta} + \frac{\sigma_i^2}{2} \beta^i \frac{\partial^2 P}{\partial (\beta^i)^2} - k \beta^i P = 0, \\ P(\beta^i, t; u, x) |_{t=u} = e^{x \beta_u^i}. \end{cases} \quad (5)$$

偏微分方程(5)有仿射形结构解^[10]. 即存在函数 $A(t, x)$ 和 $B(t, x)$, 使得

$$P(\beta^i, t; u, x) = e^{A(t, x) + B(t, x) \beta^i}$$

其中

$$A(t, x) = -\frac{2\kappa_i \theta_i}{\sigma_i^2}.$$

$$\ln \left[\frac{(\sigma_i^2 x - 2d_2) e^{-d_1(s-t)} + (2d_1 - \sigma_i^2 x) e^{-d_2(s-t)}}{2(d_1 - d_2)} \right],$$

$$B(t, x) = \frac{2}{\sigma_i^2} \cdot \frac{(\sigma_i^2 x - 2d_2)d_1 e^{-d_1(s-t)} + (2d_1 - \sigma_i^2 x)d_2 e^{-d_2(s-t)}}{(\sigma_i^2 x - 2d_2)e^{-d_1(s-t)} + (2d_1 - \sigma_i^2 x)e^{-d_2(s-t)}},$$

$$d_1 = (\kappa_i - \sqrt{\kappa_i^2 + 2\sigma_i^2 k})/2,$$

$$d_2 = (\kappa_i + \sqrt{\kappa_i^2 + 2\sigma_i^2 k})/2.$$

2.1.2 单因子反 CIR 模型的情形

将模型(3)~(4)代入该期望表达式 $E_t[e^{-\int_t^s (\lambda_u^1 + \lambda_u^2 + r_u) du}]$, 可化为求解如下基本类型的期望: $E_t[f(r_u) e^{-\int_t^u (\frac{a_1}{r_v} + (a_2+1)r_v) dv}]$. 这可以通过在 $\{0 < r < \infty, 0 \leq t \leq u\}$ 上求解 $H(f(r), t; u) = E_t[f(r_u) e^{-\int_t^u (a_r + \frac{b}{r}) dr}]$, 其中 a, b 为常数, $f(r)$ 为确定函数:

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial t} + \kappa_0(\theta_0 - r) \frac{\partial H}{\partial r} + \frac{\sigma_0^2}{2} r \frac{\partial^2 H}{\partial r^2} - \\ \left(ar + \frac{b}{r} \right) H = 0, \\ H(f(r), t; u) |_{t=u} = f(r). \end{cases} \quad (6)$$

仿照文献[9]中的方法,最后可得方程(6)的解:

$$H\left(\frac{1}{r}, t; u\right) = e^{-\gamma_1 r \gamma_2} e^{-(\kappa_0 \theta_0 \gamma_1 + \kappa_0 \gamma_2 + \gamma_1 \gamma_2 \sigma_0^2)(u-t)} \cdot$$

$$\left\{ \eta_{u-t}^{\mu+1} (\eta_{u-t} - \nu_1)^{\nu_2 - \mu} \frac{\Gamma(\mu - \nu_2)}{\Gamma(\mu + 1)} \exp[-r \eta_{u-t} e^{-d(u-t)}] \right.$$

$$\left. \Phi\left(\mu - \nu_2, \mu + 1; \frac{r \eta_{u-t}^2 e^{-d(u-t)}}{\eta_{u-t} - \nu_1}\right) \right\},$$

$$H(1, t; u) = e^{-\gamma_1 r \gamma_2} e^{-(\kappa_0 \theta_0 \gamma_1 + \kappa_0 \gamma_2 + \gamma_1 \gamma_2 \sigma_0^2)(u-t)} \cdot$$

$$\left\{ \eta_{u-t}^{\mu+1} (\eta_{u-t} - \nu_1)^{\nu_2 - \mu - 1} \frac{\Gamma(\mu - \nu_2 + 1)}{\Gamma(\mu + 1)} \right.$$

$$\left. \exp[-r \eta_{u-t} e^{-d(u-t)}] \cdot \Phi\left(\mu - \nu_2 + 1, \mu + 1; \frac{r \eta_{u-t}^2 e^{-d(u-t)}}{\eta_{u-t} - \nu_1}\right) \right\}$$

$$H(r, t; u) = e^{-\gamma_1 r \gamma_2} e^{-(\kappa_0 \theta_0 \gamma_1 + \kappa_0 \gamma_2 + \gamma_1 \gamma_2 \sigma_0^2)(u-t)} \cdot$$

$$\left\{ \eta_{u-t}^{\mu+1} (\eta_{u-t} - \nu_1)^{\nu_2 - \mu - 2} \frac{\Gamma(\mu - \nu_2 + 2)}{\Gamma(\mu + 1)} \right.$$

$$\left. \exp[-r \eta_{u-t} e^{-d(u-t)}] \cdot \Phi\left(\mu - \nu_2 + 2, \mu + 1; \frac{r \eta_{u-t}^2 e^{-d(u-t)}}{\eta_{u-t} - \nu_1}\right) \right\}$$

其中: $\Phi(\xi, \nu; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\xi)_k}{k! (\nu)_k} z^k, (\xi)_k = \xi(\xi+1) \cdots$
 $(\xi+k-1), k > 0, (\xi)_0 = 1, \nu_1 = (\sqrt{\kappa_0^2 + 2a\sigma_0^2} -$
 $\kappa_0)/\sigma_0^2, \nu_2 = \left(-(\kappa_0 \theta_0 - \sigma_0^2/2) + \right.$
 $\left. \sqrt{-(\kappa_0 \theta_0 - \sigma_0^2/2)^2 + 2b\sigma_0^2} \right)/\sigma_0^2, \eta_{u-t} =$
 $-2d/(\sigma_0^2(e^{-d(u-t)} - 1)), c = \kappa_0 \theta_0 - \sigma_0^2 \nu_2,$
 $d = \kappa_0 + \sigma_0^2 \nu_1, \mu = 2c/\sigma_0^2 - 1.$

2.2 模型的非线性问题求解

将式(1)写成如下形式:

$$U(t) = a_1 W_1(t) + a_2 W_2(t) -$$

$$a_1 E_t \left[\int_t^T (R_2 U^+ - U^-) \lambda_s^1 e^{-\int_t^s (\lambda_u^1 + \lambda_u^3 + r_u) du} ds \right] -$$

$$a_2 E_t \left[\int_t^T (R_2 U^+ - U^-) \lambda_s^2 e^{-\int_t^s (\lambda_u^2 + \lambda_u^3 + r_u) du} ds \right] \quad (7)$$

其中, $W_1(t)$ 和 $W_2(t)$ 可以写成 $P(\beta, t; u, 0)$ 和 $H(f(r), t; u)$ 的函数形式, 而后一部分非线性条件期望利用 Feynman-Kac 公式后, 得到非线性偏微分方程:

$$\begin{cases} \frac{\partial y_1}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma_0^2 r \frac{\partial^2 y_1}{\partial r^2} + \kappa_0(\theta_0 - r) \frac{\partial y_1}{\partial r} + \\ \sum_{i \in \{1,3\}} \left(\frac{1}{2} \sigma_i^2 \beta^i \frac{\partial^2 y_1}{\partial (\beta^i)^2} + \kappa_i(\theta_i - \beta) \frac{\partial y_1}{\partial \beta^i} \right) - \\ (\lambda^1 + \lambda^3 + r) y_1 = -\lambda^1 (R_2(a_1 W_1 + a_2 W_2 - \\ a_1 y_1 - a_2 y_2)^+ - (a_1 W_1 + a_2 W_2 - \\ a_1 y_1 - a_2 y_2)^-) y_1 |_{t=T} = 0. \\ \frac{\partial y_2}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma_0^2 r \frac{\partial^2 y_2}{\partial r^2} + \kappa_0(\theta_0 - r) \frac{\partial y_2}{\partial r} + \\ \sum_{i \in \{2,3\}} \left(\frac{1}{2} \sigma_i^2 \beta^i \frac{\partial^2 y_2}{\partial (\beta^i)^2} + \kappa_i(\theta_i - \beta) \frac{\partial y_2}{\partial \beta^i} \right) - \\ (\lambda^2 + \lambda^3 + r) y_2 = -\lambda^2 (R_2(a_1 W_1 + a_2 W_2 - \\ a_1 y_1 - a_2 y_2)^+ - (a_1 W_1 + a_2 W_2 - a_1 y_1 - \\ a_2 y_2)^-) y_2 |_{t=T} = 0. \end{cases} \quad (8)$$

其中 y_i 是期望 $E_t \left[\int_t^T (R_2 U^+ - U^-) \lambda_s^i e^{-\int_t^s (\lambda_u^i + \lambda_u^3 + r_u) du} ds \right]$, $i=1,2$ 的解, 式(8)是一个耦合的非线性偏微分方程组的终值问题. 这个问题很难有显式解, 用迭代方法进行数值求解. 即从一个无交易对手风险的线性问题出发, 迭代求解一系列线性偏微分方程得到收敛于原问题的解, 其收敛性由文献[7]证明.

3 数值分析

利用第2.2节提出的迭代方法对含多交易对手的 CDS 合约的 CVA 值进行计算, 迭代的具体方法是: 将有方程右端的非线性项用不考虑交易对手违约的模型解析解代替, 将方程变成一个线性方程组, 该问题有第2.2节中得到的封闭解, 然后将此解析解再代入方程右端的非线性项. 这样反复, 经过一定的迭代步数, 就能得到 $y_i(t)$ 近似解, 进而得到 $U(t)$ 近似解. 通过对结果的数值分析可得: ① 验证迭代的收敛性以及收敛速度; ② 考察系统风险因子对含多交易对手 CDS 合约的 CVA 的影响; ③ 考察含多交易对手 CDS 合约的 CVA 与合约期限的关系; ④

分析含多交易对手的违约相关性对 CVA 值的影响,并与标准 CVA 进行比较。

本文图形中的基本对应参数取定如下:

$T=5, R_1=0.8, R_2=0.8, \Delta t=0.5, S_t=200$ 基点(10^{-4}), $a_1=0.5, a_2=0.5, b_1=3, c_1=5, b_2=2, c_2=2, b_3=2, c_3=2, \kappa_i=0.15, \theta_i=0.03, \sigma_i=0.05, r_0=0.03, \beta_i=0.03, i=0,1,2,3, j=1,2,3$.

3.1 单因子 CIR 模型的情形

图 2 和表 1 都显示当迭代次数 $n \geq 5$ 时, $U(t)$ 几乎不发生变化,说明了迭代的收敛速度非常快. 即利用本文的模型计算 CDS 的 CVA 值有较高的效率。

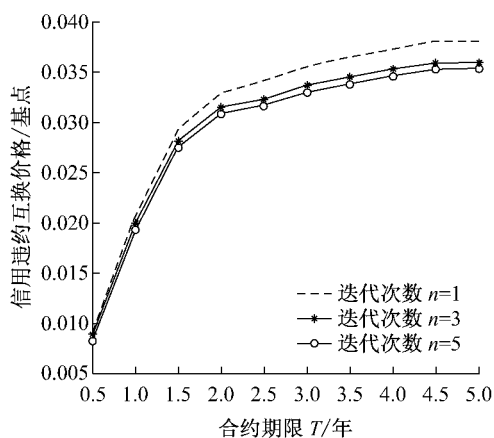


图 2 CDS 价格关于合约期限 T 的关系

Fig.2 The relationship between CDS price and T

图 3 和图 4 分别显示了含多交易对手单名 CDS 合约的 CVA 值与公共因子 r_t , 合约期限 T 的关系. 含多交易对手 CDS 合约的 CVA 值与合约期限正相关, 且在 T 相对较小时 CVA 增长较快. 这点说明, 当合约期限较长时, 交易对手违约的可能性增大, 故

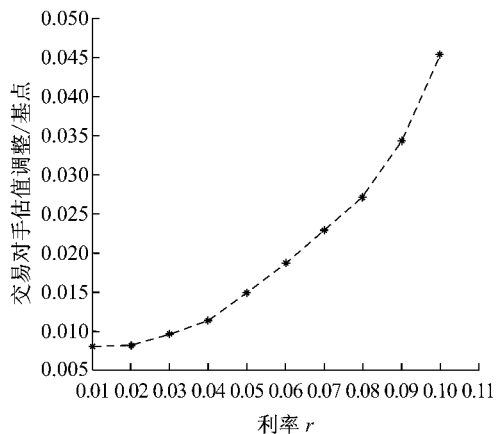


图 3 CDS 价格关于利率 r 的关系

Fig.3 The relationship between CDS price and interest rate r

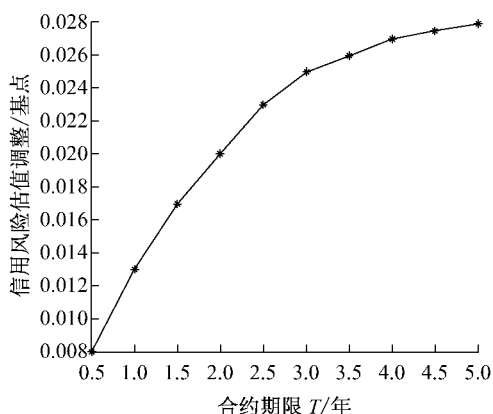


图 4 CVA 关于合约期限 T 的关系

Fig.4 The relationship between CVA and T

CVA 值相应增大. 含多交易对手 CDS 合约的 CVA 值与利率亦正相关, 利率增大时, 表明整个市场收紧, 违约风险加大, 故 CVA 值也会增大; 从图中也可看出, 在利率较小时, CVA 变化较小, 反之亦然。

图 5 显示含多交易对手 CDS 合约的 CVA 值与合约卖方中 B_1 和 B_2 之间相关性的关系, 含多交易对手 CDS 合约的 CVA 值与交易对手之间的违约相关性为正相关. 即如果交易对手之间的相关性大, 一旦其中一个交易对手违约则多交易对手都违约的风险也大, 故其 CVA 值也会大。

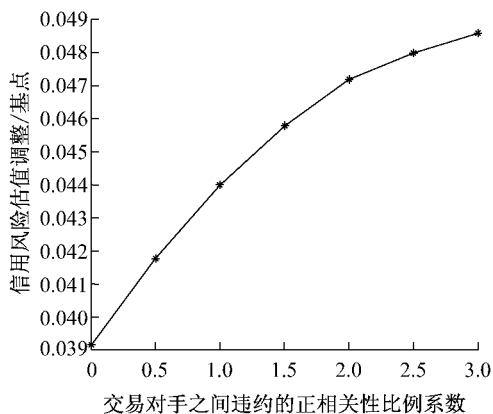


图 5 CVA 关于交易对手违约正相关比例系数的关系

Fig.5 The relationship between CVA and correlation coefficient of counterparties

图 6 显示含多交易对手 CDS 合约的 CVA 值以及标准的 CDS 的 CVA 值与交易对手和参考公司之间的违约相关性之间的关系, 它们都随着交易对手与参考公司之间违约相关性的增大而增大. 这时交易对手和参考公司违约的可能性增大, 故其 CVA 值也会增大, 同时看到随着交易对手与参考公司之间违约相关性的增大, 含多交易对手 CDS 合约的 CVA 值比标准的 CDS 的 CVA 值要小。

表1 CVA 迭代差值与迭代次数之间的关系

Tab.1 The relationship between iteration difference of CVA and the number of iterations

迭代次数 n	$n=2$	$n=3$	$n=5$	$n=6$
最大值 $(U_n(t) - U_{n-1}(t))$	0.002 03	0.001 26	0.000 59	0.000 55

3.2 单因子反 CIR 模型的情形

图7显示含多交易对手的CVA值与合约卖方中 B_1 和 B_2 之间违约相关性为负情形下的关系.它们违约负相关性越大,CVA值越小.这时当一方交易对手违约的可能性增大时,另一方交易对手违约的可能性反而降低,故其CVA值减小.

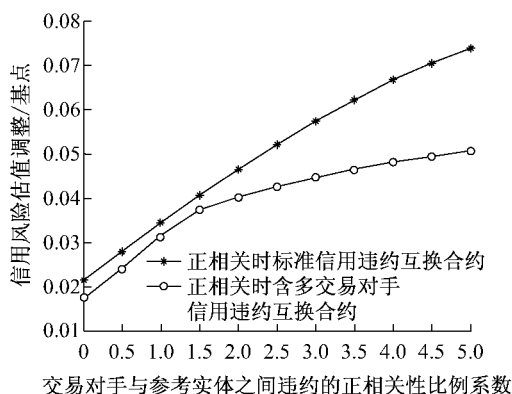


图6 CVA关于交易对手与参考实体违约的正相关比例系数的关系

Fig.6 The relationship between CVA and the positive correlation coefficient of counterparty and the reference company

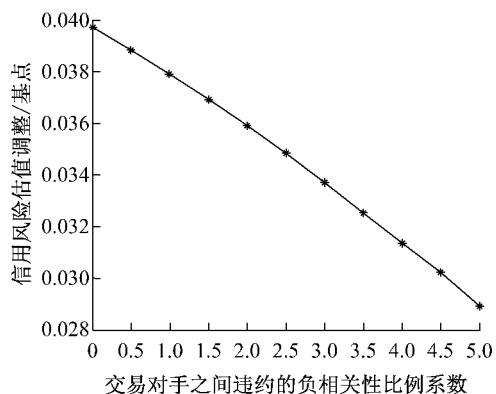


图7 CVA关于交易对手之间违约负相关比例系数的关系

Fig.7 The relationship between CVA and the negative correlation coefficient of counterparties

图8显示含多交易对手单名CDS合约的CVA值以及标准CDS的CVA值与交易对手和参考公司之间的违约相关性之间的关系.

当交易对手都与参考公司间的违约为负相关时,含多交易对手单名CDS合约的CVA值随着交易对手与参考公司之间违约相关性的增大而减小,

由于参考公司违约的可能性增大,则交易对手的违约可能性降低,其CVA减小.

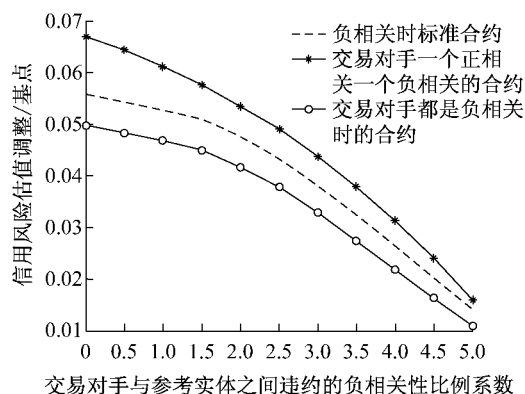


图8 CVA关于交易对手与参考实体之间违约的负相关比例系数的关系

Fig.8 The relationship between CVA and the negative correlation coefficient of counterparty and the reference company

当两交易对手与参考公司间的违约相关性一正一负时,含多交易对手的CVA值随着交易对手与参考公司之间违约相关性的增大而减小.即参考公司违约可能性增大,交易对手违约可能性此长彼消,但总体降低,其CVA减小.

从图中看出多交易对手的CDS与标准CDS的比较结果.在只要有交易对手间违约相关性一致时,标准CDS合约的CVA值比多交易对手CDS合约的CVA值要大,即此时多交易对手可以降低风险;而交易对手与参考公司违约相关不一致时,多交易对手的CDS合约的CVA值可能更大.

4 结论

本文研究了含多交易对手违约的单名CDS的CVA值的测算.通过分析考虑交易对手与参考公司之间违约的相关性,分别得到了三种不同单因子模型下CVA的计算模型,分别为多交易对手都与参考公司之间的违约相关性为正相关的情形;一个交易对手与参考公司之间的违约相关性为正相关而另一个交易对手与参考公司之间的违约相关性为负相关的情形;多交易对手都与参考公司之间的违约相关性为负相关的情形.它们的计算最终都化为非线性偏微分方程的数值解来表达.通过一个收敛速度较快的迭代算法,作了一些数值结果的分析,并且将结果与标准的单名的CDS的CVA值进行做比较分析,得到以下结果:

(1)交易对手与参考公司间违约的相关性为正时,多交易对手信用违约互换(CDS)合约的交易对手估值调整(CVA)值和标准的 CDS 的 CVA 值都随交易对手与参考公司间违约相关性的增大而增大,同时多交易对手的 CVA 值比标准的 CVA 值要小. 即当交易对手与参考公司间的违约都是正相关时,相关性将加大风险,但多交易对手将降低风险.

(2)交易对手与参考公司间违约的相关性都为负时,多交易对手 CDS 合约的 CVA 值和标准 CDS 的 CVA 值都随着交易对手与参考公司之间违约相关性的增大而减小. 即当交易对手与参考公司之间违约负相关时,相关性将降低风险.

(3)两交易对手与参考公司间的违约相关性一正一负的 CVA 值比两个都为负的 CVA 值要大;而标准的 CVA 值也比两个都为负的 CVA 值要大. 即当交易对手与参考公司之间违约负相关时,另加负相关的交易对手将降低风险,而另加正相关的交易对手将增大风险.

致谢:感谢 Anis Ben Brahim 一起参与文章的讨论,并对文章提出了建设性的意见.

参考文献:

[1] Pykhtin M, Zhu S. A guide to modeling counterparty credit

risk [J]. Global Association of Risk Professional, 2009, 37: 16.

[2] Alavian S, Ding J, Whitehead P, et al. Counterparty valuation adjustment (CVA) [J]. The Annals of Applied Probability, 2008, 18(6): 2495.

[3] Brigo D, Pallavicini A. Counterparty risk pricing under correlation between default and interest rates[J]. Finance and Stochastic, 2009(9): 29.

[4] Brigo D, Pallavicini A. Counterparty risk and CCDSs under correlation [J]. Risk, 2008, 3(2): 84.

[5] Brigo D, Capponi A. Bilateral counterparty risk valuation with stochastic dynamical models and application to Credit Default Swaps[J]. Risk, 2012, 7(2): 141.

[6] Hui Li. Double impact on CVA for CDS: wrong-way risk with stochastic recovery[J]. Annals of Combinatorics, 2011, 1(3): 211.

[7] Wei W, Jiang L S. One fact CVA model for CDS with counterparty credit risk within the reduced form framework [J]. International Journal of Financial Research, 2012, 2(2): 68.

[8] LIANG Jin, WANG Tao. Valuation of loan-only credit default swap with negatively correlated default and prepayment intensities [J]. International Journal of Computer Mathematics, 2011, 26: 35.

[9] Ahn D H, Gao B. A parametric nonlinear model of term structure dynamics[J]. Review of financial Studies, 1999, 12(4): 721.

[10] Duffie D, Filipovic D, Schachermayer W. Affine processes and applications in finance [J]. The Annals of Applied Probability, 2003, 13(3): 127.

(上接第 57 页)

[11] 李兴国, 陈立强, 赵东寅. 基于 ANSYS 荷载结构法的浅埋明挖隧道受力分析[J]. 采矿技术, 2008, 8(3): 37.

LI Xingguo, CHEN Liqiang, ZHAO Dongyin. Stress analysis of shallow cut-and-cover tunnel based on ANSYS load structure [J]. Mining Technology, 2008, 8(3): 37.

[12] JTG D70—2004 公路隧道设计规范[S]. 北京:[s. n.], 2004. JTG D70—2004 Code for design of road tunnel[S]. Beijing: [s. n.], 2004.

[13] 张朝晖. ANSYS 12.0 热分析工程应用实战手册[M]. 北京: 中国铁道出版社, 2010.

ZHANG Zhaohui. Thermal analysis of engineering application handbook for ANSYS 12.0[M]. Beijing: China Railway Press, 2010.

[14] GB 50366—2005 地源热泵系统工程技术规范[S]. 北京:[s. n.], 2009.

GB 50366—2005 Technical code for ground source heat pump system[S]. Beijing:[s. n.], 2009.