

# 基于节点力插值的自由子结构界面自由度缩减方法

楼梦麟, 唐 玉

(同济大学 土木工程防灾国家重点实验室, 上海 200092)

**摘要:** 基于有限元法中位移插值的思想, 建立了基于节点力插值的自由子结构界面自由度缩减方法. 该方法的基本思想是在自由子结构法的基本变换基础上, 实施对接界面坐标的第二次坐标变换, 并利用第二次坐标变换矩阵, 有效缩减了结构体系的广义自由度, 从而提高了计算效率. 通过对一个两端固定梁进行模态分析, 并对比缩减界面自由度前后梁的前 10 阶主频计算值, 验证了该方法的可行性. 与界面广义自由度模态缩减法相比, 二者的主要精度基本相同, 该方法计算效率更高, 工程应用更加方便. 最后, 讨论了插值基点的选择方式对计算精度的影响. 计算结果表明: 参与模态分析的插值基点数量越多, 计算精度越高; 当插值基点均匀分布于对接界面上时, 计算精度最高.

**关键词:** 自由子结构; 模态综合法; 插值原理; 坐标变换矩阵; 缩减自由度

中图分类号: TU435

文献标志码: A

## Degrees of Freedom Reduction Technique for Free-interface Substructure Based on Nodal Force Interpolation

LOU Menglin, TANG Yu

(State Key Laboratory of Disaster Reduction in Civil Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, China)

**Abstract:** According to the nodal displacement interpolation formulation in the finite element method, the interface degrees of freedom reduction technique for a free-interface substructure was developed. Based on the basic transformation of the free-interface modal synthesis method, the second coordinate transformation of the interface was completed, which effectively reduced the generalized degrees of freedom of the system, and the computation efficiency was improved. The modal analysis for a beam fixed at two ends was constructed as a numerical example, and the first ten main frequencies of the beam before and after the interface degrees of freedom reduction were compared. The result

demonstrates that the proposed interface degrees of freedom reduction technique for the free-interface substructure is reasonable and effective. In comparison with the modal reduction method for the interface degrees, the precision of the main computed frequencies obtained by these two methods are the same. However, the proposed method is more efficient and convenient when used in the engineering, though the latter has a better accuracy. Meanwhile, the influence on the calculation accuracy of the way to choose interpolation nodes was also discussed. The numerical results show that, the more the interpolation nodes involve in the modal analysis, the higher the calculation accuracy is. And when the interpolation nodes uniformly distribute on the interface, the accuracy is the highest.

**Key words:** free-interface substructure; modal synthesis method; interpolation formulation; coordinate transformation matrix; degrees of freedom reduction

子结构模态综合法自提出以来, 因其能有效缩减结构自由度而在大型复杂结构的动力分析中得到广泛应用<sup>[1-4]</sup>. 该方法的核心思想是解除各部件之间的对接约束, 把系统分割成若干个在力学性能上彼此独立的子结构, 分别进行模态分析. 利用这些模态坐标描述该子结构在物理空间内的变形状态, 并借助子结构在对接边界上的力平衡和位移相等的协调条件, 将分离的子结构模态组成系统的 Ritz 向量基, 进而进行 Rayleigh-Ritz 分析<sup>[5]</sup>. 这种“先化零为整, 后化整为零”的分析模式能够大幅度降低动力方程的阶数, 解决大型复杂结构繁杂的动力分析过程, 同时又能够保证结构分析的精度. 在应用子结构模态综合法时, 应尽可能选择结构内部连接相对薄弱处作为子结构划分界面, 减少子结构间的耦合作用, 以利于提高模态综合精度<sup>[6]</sup>.

自由子结构模态综合法(以下简称自由子结构

法)指系统的各模态子结构在进行模态分析时,附加边界上不施加任何约束<sup>[7-9]</sup>.显然,自由子结构法更符合大型复杂结构分部件制造和试验的实际情况.由于工程结构的复杂性,在应用子结构模态综合法时,子结构间界面自由度很多的情况难以避免,因此,降低对接界面自由度是提高自由子结构模态综合法计算效率的关键.

目前,对接界面自由度缩减方法主要有3种<sup>[2]</sup>: ① 将对接界面自由度分为主、副自由度,采用 Guyan 法对其进行坐标变换.这一方法的缺陷在于对主、副坐标的划分规定不明确,主坐标的选取将直接影响到计算结果的精度. ② 提取出相应于对接界面坐标的广义刚度矩阵和广义质量矩阵,形成一个新的广义特征值问题,求解其特征向量并组成坐标变换矩阵对界面坐标进行变换.但是该特征向量的截取没有特定的收敛准则. ③ 直接利用界面的变形模式建立第二次坐标变换矩阵,但是对于高阶变形模式很难给出的情况,该方法很难实现.

鉴于力控制更适合大刚度、小位移的多自由度结构模型控制,本文借鉴有限元法中位移插值函数的思想,建立一种基于节点力插值的自由子结构界面自由度缩减方法,以适应自由子结构模态综合法在三维复杂结构体系中的应用.

## 1 自由子结构法简介

### 1.1 自由子结构法的第一次坐标变换

多自由度系统结构的运动方程为

$$[M]\{\ddot{u}(t)\} + [C]\{\dot{u}(t)\} + [K]\{u(t)\} = \{p(t)\} \quad (1)$$

当结构划分为若干个自由子结构进行模态分析时,可在各自由子结构内部进行第一次坐标变换,目的是采用部分保留主模态和剩余附着模态对自由子结构进行坐标变换,在考虑了舍弃的高阶主模态影响的基础上使子结构模态得到缩减<sup>[2]</sup>.由主模态描述子结构的位移,得

$$\{u(t)\}_\alpha = [\Phi \quad \Psi]_\alpha \begin{Bmatrix} q(t) \\ f^B(t) \end{Bmatrix}_\alpha \quad (2)$$

令

$$[T_1] = [\Phi \quad \Psi] \quad (3)$$

式中: $\alpha$ 为子结构编号; $[\Phi]$ 为保留主模态,包括刚体模态; $[\Psi]$ 为剩余附着模态,是定义在子结构对接界面自由度上的剩余柔度; $\{q(t)\}$ 为自由子结构的广义主模态坐标,为 $n_d$ 阶列向量, $n_d$ 为保留主模态数;

$\{f^B(t)\}$ 为广义剩余模态坐标,即对接界面力的广义坐标,为 $n_B$ 阶列向量, $n_B$ 为对接界面上的自由度数.

### 1.2 自由子结构法的双协调坐标变换

当系统采用自由子结构法进行动力分析时,经第一次坐标变换后的广义质量矩阵和广义刚度矩阵可直接由各子结构的广义质量矩阵和广义刚度矩阵按“对号入座”的原则进行装配.下面以相邻的两个自由子结构 $\alpha$ 和 $\beta$ 为例,说明自由子结构法的双协调坐标变换过程.在装配中暂把主坐标和对接界面力坐标都作为“独立”的广义坐标,并且把所有对接界面力坐标排序在前面,主坐标排序在后面,即

$$\{p(t)\} = \begin{Bmatrix} \gamma_\alpha(t) \\ \gamma_\beta(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} q_\alpha(t) \\ q_\beta(t) \\ f_\alpha^B(t) \\ f_\beta^B(t) \end{Bmatrix} \quad (3)$$

然而,由于主坐标中有部分广义坐标是不独立的,在实施子结构对接时,需要考虑相邻子结构间的对接条件,即对接界面位移相等的协调条件和对接界面力的平衡条件.这两组对接条件可表达为

$$\begin{cases} \{u_\alpha^B(t)\} = \{u_\beta^B(t)\} \\ \{f_\alpha^B(t)\} + \{f_\beta^B(t)\} = 0 \end{cases} \quad (4)$$

由界面力平衡可知

$$\{f_\alpha^B(t)\} = -\{f_\beta^B(t)\} = \{f_c\} \quad (5)$$

式中 $\{f_c\}$ 为子结构 $\alpha$ 与 $\beta$ 之间的对接界面力向量.

由位移协调可知

$$[\Phi_\alpha^B]\{q_\alpha\} = [\Phi_\beta^B]\{q_\beta\} \quad (6)$$

即

$$[\Phi_\alpha^B \quad -\Phi_\beta^B] \begin{Bmatrix} q_\alpha \\ q_\beta \end{Bmatrix} = 0 \quad (7)$$

利用上式得到 $n_B$ 个约束方程,选择主坐标中的 $n_B$ 个主坐标 $\{q_\alpha\}$ 为不独立坐标,其余主坐标 $\{q_m\}$ 为独立坐标,即

$$\{q\} = \begin{Bmatrix} q_\alpha \\ q_\beta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} q_\alpha \\ q_m \end{Bmatrix} \quad (8)$$

相应的约束方程可表示为

$$[D_\alpha \quad D_m] \begin{Bmatrix} q_\alpha \\ q_m \end{Bmatrix} = 0 \quad (9)$$

则

$$\{q_\alpha\} = -[D_\alpha]^{-1}[D_m]\{q_m\} \quad (10)$$

由此得到自由子结构法的双协调坐标变换,即

$$\begin{Bmatrix} q_\alpha \\ q_\beta \\ f_c \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} q_\alpha \\ q_m \\ f_c \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -D_\alpha^{-1}D_m & 0 \\ I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_m \\ f_c \end{Bmatrix} \quad (11)$$

令

$$[T] = \begin{bmatrix} -D_a^{-1}D_m & 0 \\ I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad (12)$$

$[T]$ 是基于自由子结构法的结构系统的坐标变换矩阵,本文称之为基本变换.在此变换下,子结构 $\alpha$ 和 $\beta$ 在新的广义坐标空间中的广义质量矩阵和广义刚度矩阵为

$$[\bar{M}_\alpha] = [T_\alpha]^T [M_\alpha^{(1)}] [T_\alpha] \quad (13)$$

$$[\bar{K}_\alpha] = [T_\alpha]^T [K_\alpha^{(1)}] [T_\alpha] \quad (14)$$

$$[\bar{M}_\beta] = [T_\beta]^T [M_\beta^{(1)}] [T_\beta] \quad (15)$$

$$[\bar{K}_\beta] = [T_\beta]^T [K_\beta^{(1)}] [T_\beta] \quad (16)$$

式中: $[M_\alpha^{(1)}]$ ,  $[K_\alpha^{(1)}]$ ,  $[M_\beta^{(1)}]$ 和 $[K_\beta^{(1)}]$ 分别为子结构 $\alpha$ 和 $\beta$ 经第一次坐标变换后的广义质量矩阵和广义刚度矩阵; $[T_\alpha]$ 和 $[T_\beta]$ 分别为 $[T]$ 中对应于子结构 $\alpha$ 和 $\beta$ 的子矩阵.

## 2 界面自由度缩减方法

第一次基本坐标变换后,自由子结构的内部自由度缩减为模态坐标自由度,系统的广义自由度主要由各子结构保留主坐标和对接界面自由度组成.当结构体系较为复杂时,对接界面自由度数会出现过大的情况.一方面,对接界面自由度过多会降低系统模态综合时的计算效率;另一方面,当采用自由子结构进行实时子结构试验时,因试验室加载条件有限,对对接界面每一个自由度进行精确加载显然是不现实的.因此,建立自由子结构对接界面自由度缩减方法十分必要.

为了有效降低界面自由度,文献[6]基于有限单元节点位移模式的概念,提出了针对约束子结构模态综合法的界面自由度缩减方法,并证明了这一方法的有效性和可行性.鉴于此,建立了有限单元节点力插值函数,通过第二次坐标变换减少界面力坐标的自由度数.

### 2.1 基本原理

一般而言,划分子结构时通常将界面设定为直线或者平面.以对接界面为平面为例,讨论自由子结构界面自由度的缩减方法,其基本原理不难推广到更为复杂的情况.首先以子结构间的对接界面为矩形展开讨论.

图1a所示为一个对接界面.图中,实线段将整个界面划分为四个子区域(I—IV),其交汇处的节点定义为插值基点(编号为1—9),各子区域内部虚线段交汇处的节点定义为插值点.子区域内部任一插

值点 $i$ 对应的对接力可由插值基点对应的对接力插值得到,子区域公共边界上对接力的插值则退化为线域内的插值.一般而言,对接界面处于三维坐标系中,设每一子区域的局部坐标系为 $(s, t)$ ,插值基点在局部坐标系中的序号为1—4,如图1b所示,此时子区域内 $i$ 点处的力插值计算公式为

$$\begin{cases} f_x^i = \sum_{n=1}^4 N_n(s_i, t_i) f_x^n \\ f_y^i = \sum_{n=1}^4 N_n(s_i, t_i) f_y^n \\ f_z^i = \sum_{n=1}^4 N_n(s_i, t_i) f_z^n \end{cases} \quad (17)$$

式中: $f_e^i$ 为插值点 $i$ 在整体坐标系中对应于3个方向的力向量分量( $e$ 代表 $x, y, z$ 向); $f_e^n$ 为插值基点在整体坐标系中对应于3个方向的力向量分量; $n$ 为插值点 $i$ 所在区域的四个插值基点的编号; $N_n(s_i, t_i)$ 为插值点对应于插值基点的形函数.根据有限单元法中矩形单元的基本知识,采用自然坐标系能更简洁地表述插值关系,插值函数表达式详见文献[10].

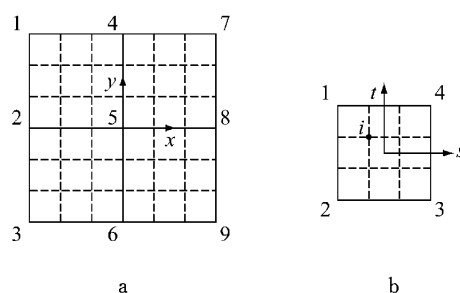


图1 矩形对接界面

Fig.1 Rectangular interface

当获得第 $j$ 个对接界面上所有插值点基于插值基点的力向量表达式之后,可以得到子结构 $\alpha$ 和 $\beta$ 间的对接界面力的坐标变换矩阵 $[D_c]$ ,并有

$$\{f_c\} = [D_c] \{f_e\} \quad (18)$$

式中 $\{f_e\}$ 为对接界面上所有插值基点的力向量.

由此,进一步建立与对接界面相邻的模态子结构的第二次坐标变换,即

$$\begin{Bmatrix} q \\ f^B \end{Bmatrix}_\alpha = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & D_c \end{bmatrix}_\alpha \begin{Bmatrix} q \\ f_e \end{Bmatrix}_\alpha \quad (19)$$

令

$$[T_2] = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & D_c \end{bmatrix} \quad (20)$$

### 2.2 广义质量矩阵与广义刚度矩阵

经过第二次坐标变换之后,子结构的广义质量

矩阵和广义刚度矩阵分别为

$$[M_a^{(2)}] = [T_2^T][M_a^{(1)}][T_2] \quad (21)$$

$$[K_a^{(2)}] = [T_2^T][K_a^{(1)}][T_2] \quad (22)$$

式中:  $[M_a^{(1)}]$ ,  $[K_a^{(1)}]$  为子结构  $\alpha$  第一次坐标变换后的刚度矩阵和质量矩阵。

从推导过程可以看出,经过第二次坐标变换,子结构的广义自由度得到进一步缩减。

### 3 算例

#### 3.1 算例 1

图 2 所示为一个两端固定梁,其长 $\times$ 宽 $\times$ 高为 6.0 m $\times$ 0.6 m $\times$ 0.4 m;质量密度为 2 500 kg $\cdot$ m $^{-3}$ ,弹性模量为 30 000 MPa,泊松比为 0.3。

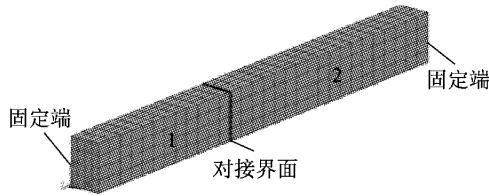


图 2 梁的有限元模型

Fig.2 Finite element modal of the beam

采用空间八节点等参单元划分网格,总计 725 个节点和 2 175 个自由度,如图 2 所示。图中粗实线为子结构的对接界面,界面内有 25 个节点和 75 个自由度,如图 3a 所示。选取两种界面插值方案:方案 b 选用对接界面的 4 个角点作为插值基点,方案 c 从界面上的节点中等间隔取 9 个插值基点,即粗实线的交点处,如图 3b 和 3c 所示。

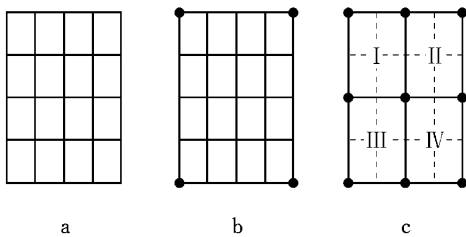


图 3 对接界面插值基点分布

Fig.3 Distribution of interpolation nodes

计算中,选取 1 号子结构前 100 个主模态作为保留主模态,最高保留主模态频率为 5 454 Hz;选取 2 号子结构前 200 个主模态作为保留主模态,最高保留主模态频率为 5 463 Hz。根据主模态频率截断原理<sup>[11]</sup>,由子结构法计算得到系统模态的有效最高频率  $f_{\max}$  为 2 736 Hz(第 69 阶频率)。表 1 列出了计算所得梁的前 10 阶频率  $f_i$  及其相对于方案 a 的计算

误差  $e_i$ ,表中方案 d 为整梁的计算结果。图 4 为固端梁前 4 阶主模态位移的精确解(方案 a)和由界面自由度缩减法(方案 b,c)得到的结果。

表 1 前 10 阶主频率  $f_i$ ,  $f_{\max}$  和节点插值法的误差  $e_i$

Tab.1 First ten natural frequencies  $f_i$  and relative errors  $e_i$  of nodal interpolation method

模态序号 $i$	方案 a	方案 b	$e_i/\%$	方案 c	$e_i/\%$	方案 d
	$f_i/\text{Hz}$	$f_i/\text{Hz}$		$f_i/\text{Hz}$		$f_i/\text{Hz}$
1	41.03	40.14	-2.17	40.33	-1.71	41.08
2	57.91	56.11	-3.11	56.89	-1.79	57.99
3	109.20	107.10	-1.92	108.00	-1.10	109.70
4	149.30	147.70	-1.07	148.20	-0.74	150.40
5	159.10	156.60	-1.56	157.70	-0.87	160.30
6	206.60	202.90	-1.78	204.50	-1.01	207.80
7	213.60	207.10	-3.02	211.20	-1.11	215.40
8	270.70	264.00	-2.49	268.40	-0.84	273.20
9	316.30	308.20	-2.57	311.80	-1.41	318.60
10	317.00	310.20	-2.37	313.10	-1.46	321.20
68	2 558.0	1 867.0	-27.0	2 064.00	-19.30	2 679.0
69	2 603.0	1 728.0	-33.6	2 142.00	-17.70	2 736.0

由表 1 可知,采用基点力插值方法所得的结果具有很好的计算精度。方案 b 中,计算所得梁的前 10 阶频率的相对误差控制在 5% 以内;方案 c 与方案 b 相比,计算精度有所提高,其计算误差均控制在 2% 以内。对于第 68 和 69 阶频率,其相对误差较大,反映了高阶振型需要更多自由度参与动力分析。表 2 给出了利用界面广义自由度的模态缩减法<sup>[2]</sup>计算固端梁前 10 阶频率和第 68 和 69 阶频率及其相对于方案 a 的计算误差  $e_i$ 。其中,方案 e 为保留前 12 阶广义特征向量进行模态缩减,方案 f 为保留前 27 阶广义特征向量进行模态缩减。与表 1 中相应的误差值相比,尽管利用界面广义自由度模态缩减法所得结果精度更好,但是二者的主要精度基本相同,而本文

表 2 前 10 阶主频率  $f_i$  误差  $e_i$

Tab.2 First ten natural frequencies  $f_i$  and relative errors  $e_i$  of modal reduction method

模态序号 $i$	方案 a	方案 e	$e_i/\%$	方案 f	$e_i/\%$
	$f_i/\text{Hz}$	$f_i/\text{Hz}$		$f_i/\text{Hz}$	
1	41.03	41.27	0.59	41.02	-0.02
2	57.91	57.27	-1.11	58.43	0.90
3	109.20	108.70	-0.46	109.60	0.36
4	149.30	146.50	-1.90	151.40	1.41
5	159.10	156.30	-1.76	161.40	1.74
6	206.60	206.00	-0.27	206.60	0
7	213.60	211.90	-0.75	214.10	0.22
8	270.70	269.10	-0.59	270.80	0.04
9	316.30	307.40	-2.82	321.50	1.64
10	317.00	316.80	-0.05	326.90	3.13
68	2 558.0	2 880.0	12.60	2 809.0	9.80
69	2 603.0	2 921.0	12.20	2 986.0	14.70

提出的缩减方法比模态缩减法的计算效率更高,在进行实时子结构试验时应用更加方便.从图 4a—4d 可以看出,采用本文的缩减方法得到的前 4 阶主模

态位移与精确解十分接近.因此,基于节点力插值的自由子结构界面自由度缩减方法是可行的.

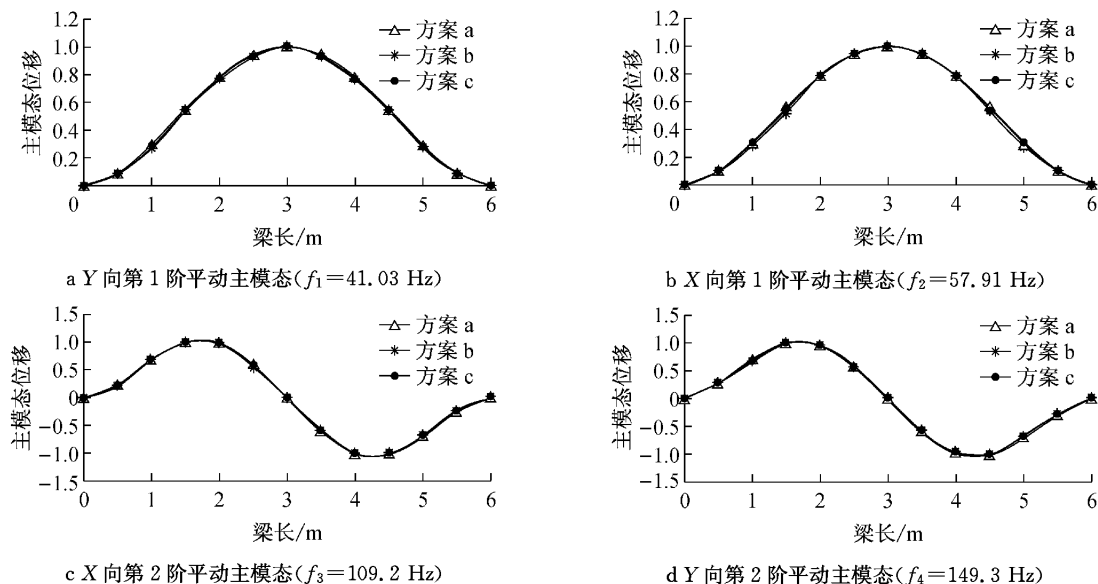


图 4 前 4 阶主模态位移

Fig.4 First four modal displacements

### 3.2 插值基点的影响

为了考察基点选择对计算精度的影响,设计了算例 2.

图 5 所示长方体模型,其横断面高  $H=5.0$  m,宽  $B=4.0$  m,模型长  $L=12.0$  m;模型的物理参数为:密度  $1\,800\text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ ;弹性模量  $100\text{ MPa}$ ;泊松比为  $0.3$ .

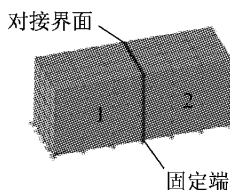


图 5 三维长方体有限元网格

Fig.5 Finite element mesh of rectangular

将整体模型划分为两个子结构,仍采用空间八节点等参单元划分网格,总计 210 个自由节点,630 个自由度,如图 5 所示.图中粗实线为子结构的对接界面,其内有 30 个节点,共 90 个自由度,如图 6a 所示.选取三种界面插值方案:方案 b 选取对接界面 4 个角点作为插值基点,即仅有一个插值子区域;方案 c 采用均匀分布于对接界面的 9 个节点作为插值基点,划分出 4 个插值子区域(I—IV),每个子区域近似于正方形;方案 d 采用位于对接界面上下边线上的 10 个节点作为插值基点,划分出 4 个插值子区域

(I—IV),每个子区域为狭窄长方形.计算中,两个子结构均选取前 50 个主模态作为保留主模态.计算所得结构系统的前 10 阶频率  $f_i$  及其相对于方案 a 的计算误差  $e_i$ ,如表 3 所示.

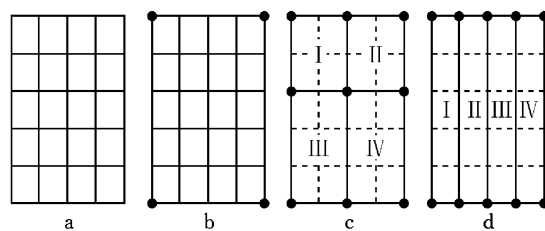


图 6 插值基点的选择方案

Fig.6 Choice of interpolation nodes

由表 3 可知:相较于方案 a,三种插值方案所得的相对误差均控制在 5% 以内.方案 c 和方案 d 的计算精度均优于方案 b,表明插值基点的数量会对计算结果产生一定影响,即参与模态分析的插值基点数量越多,计算精度相对越高.在插值基点位置的选择上,尽管方案 c 的插值基点数量(9 个)比方案 d(10 个)少一个,但是前者的计算精度要高于后者,尤其是较高阶主频率的精度有更大提高,这表明插值基点的分布,即插值子区域的形状,也会对计算结果产生一定影响.为了获得更好的计算精度,在确定了插值基点的数量之后,插值子区域的形状应尽可能接近于正方形.

表3 模型的主频  $f_i$  及其相对误差  $e_i$ Tab.3 Natural frequencies  $f_i$  and relative errors  $e_i$ 

模态 序号 $i$	方案 a		方案 b		方案 c		方案 d	
	$f_i/\text{Hz}$	$f_i/\text{Hz}$	$e_i/\%$	$f_i/\text{Hz}$	$e_i/\%$	$f_i/\text{Hz}$	$e_i/\%$	
1	4.620	4.538	-1.77	4.581	-0.84	4.574	-1.00	
2	5.525	5.388	-2.48	5.463	-1.12	5.450	-1.36	
3	6.483	6.364	-1.84	6.421	-0.96	6.403	-1.23	
4	8.423	8.241	-2.16	8.259	-1.95	8.258	-1.96	
5	10.61	10.29	-3.02	10.45	-1.51	10.41	-1.89	
6	12.54	12.27	-2.15	12.39	-1.20	12.35	-1.52	
7	12.66	12.44	-1.74	12.57	-0.71	12.50	-1.26	
8	12.96	12.61	-2.70	12.79	-1.31	12.69	-2.08	
9	14.03	13.77	-1.85	13.95	-0.57	13.89	-0.99	
10	14.65	14.39	-1.78	14.54	-0.75	14.47	-1.23	

## 4 结论

基于有限单元法中简单矩形单元的位移插值思想,建立了基于节点力插值的自由子结构界面自由度的缩减方法.该方法通过引入一组插值函数,将对接界面上部分结点的对接界面力由选定的有限个插值基点的对接界面力表示,从而有效地缩减了系统的广义自由度,提高了整体的计算效率.算例结果表明,基于节点力插值的自由子结构界面自由度缩减方法是可行的,各种插值方案的计算精度均控制在5%以内,达到了较好的缩减效果.同时,探讨了插值基点的选择对计算结果的影响.算例结果表明,插值基点的数量和分布综合影响着计算结果的精度.为了保证整体的计算效率,在保证插值基点数量的前提下,插值基点应尽可能均匀分布于对接界面上.

## 参考文献:

- [1] 王文亮,杜作润. 结构振动与动态子结构方法[M]. 上海:复旦大学出版社,1985.  
WANG Wenliang, DU Zuorun. Structural vibrational and dynamic substructure methods [M]. Shanghai: Fudan University Press, 1985.
- [2] 楼梦麟. 结构动力分析的子结构方法[M]. 上海:同济大学出版社,1997.  
LOU Menglin. The substructure method for dynamic analysis of

- structures[M]. Shanghai: Tongji University Press, 1997.
- [3] Lou M, Ghobarah A, Aziz T S. A modal synthesis method for dynamic substructuring[J]. European Journal of Mechanics, 1993, 12(3):403.
- [4] 王向英,田石柱,张洪涛,等. 位移控制的子结构地震模拟振动台混合试验方法[J]. 世界地震工程, 2009, 25(2): 30.  
WANG Xiangying, TIAN Shizhu, ZHANG Hongtao, et al. Hybrid testing method on substructure techniques for shaking table by position control of actuator[J]. World Earthquake Engineering, 2009, 25(2): 30.
- [5] 邓佳东,程耿东. 基于局部插值的结构动力模型降阶方法[J]. 力学学报, 2012, 44(2):342.  
DENG Jiadong, CHENG Gengdong. Structure dynamic model reduction technique based on local interpolation[J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2012, 44(2): 342.
- [6] 楼梦麟,殷琳. 基于结点位插值的约束子结构界面自由度缩减方法[J]. 工程力学, 2012, 29(9): 25.  
LOU Menglin, YIN Lin. Degrees of freedom reduction technique for interface of constrained substructure based on node displacement interpolation[J]. Engineering Mechanics, 2012, 29(9): 25.
- [7] LU Kailiang, LIU Yuan, ZHANG Weiguo, et al. Free-interface component mode synthesis method with link substructure as super-element [J]. Procedia Engineering, 2011, 16: 685.
- [8] 陈登科. 基于自由度缩减方法的结构优化[D]. 大连:大连理工大学, 2010.  
CHEN Dengke. Structural optimization based on method of reduced degree of freedom[D]. Dalian: Dalian University of Technology, 2010.
- [9] 卢凯良,邱惠清,毛飞. 含超单元连接子结构的自由界面模态综合法[J]. 同济大学学报:自然科学版, 2010, 38(8): 1215.  
LU Kailiang, QIU Huiqing, MAO Fei. Free-interface component mode synthesis technique with link substructure as super-element [J]. Journal of Tongji University: Natural Science, 2010, 38(8): 1215.
- [10] 王勖成. 有限单元法[M]. 北京:清华大学出版社, 2003.  
WANG Xucheng. Finite element method [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2003.
- [11] 李兴泉,邓兆祥,李传兵,等. 模态综合的子结构主模态截断方法[J]. 西南交通大学学报, 2014, 49(1): 173.  
LI Xingquan, DENG Zhaoxiang, LI Chuanbing, et al. Substructure normal modes selection method for component mode synthesis [J]. Journal of Southwest Jiaotong University, 2014, 49(1): 173.