

# 水泥混凝土板水分迁移模型的近似解析解

张 脩<sup>1,2</sup>, 赵鸿铎<sup>2</sup>, 赵队家<sup>1</sup>

(1. 山西省交通科学研究院 黄土地区公路建设与养护技术交通行业重点实验室, 山西 太原 030006;  
2. 同济大学 道路与交通工程教育部重点实验室, 上海 201804)

**摘要:** 为了研究早龄期混凝土板的水分迁移规律, 建立了早龄期混凝土路面板在外部干燥条件下的 1 维水分迁移模型, 推导了基于 Adomian 分解法的求解任意边界条件下的非线性水分迁移模型的初边值问题的近似解析解, 并与早龄期混凝土板的干燥过程试验数据和 Crank-Nicolson 有限差分法数值解的结果进行了比较. 结果表明, Adomian 分解法的收敛速度非常快, 是一种有效的求解任意边界、初始和扩散系数下的混凝土板干燥过程的偏微分方程的方法.

**关键词:** 道路工程; 水泥混凝土路面; 水分迁移机理; Adomian 分解法

**中图分类号:** U416.216

**文献标志码:** A

## Approximate Analytical Solution of Water Movement in Concrete Slabs

ZHANG Xiao<sup>1,2</sup>, ZHAO Hongduo<sup>2</sup>, ZHAO Duijia<sup>1</sup>

(1. Key Laboratory of Highway Construction and Maintenance Technology in Loess Region, Shanxi Transportation Research Institute, Taiyuan 030006, China; 2. Key Laboratory of Road and Traffic Engineering of the Ministry of Education, Tongji University, Shanghai 201804, China)

**Abstract:** In order to study the development of moisture insider concrete slabs, a one-dimension water movement model for early-age concrete slabs subjected to external drying was established. Adomian decomposition method (ADM) as an approximate analytical solution to initial boundary value problem (IBVP) of water movement equation for moisture distributions in early-age concrete slabs with arbitrary boundary conditions was derived. Comparison between numerical results by Crank-Nicolson finite difference scheme and experimental results suggests that the proposed ADM-based approximate analytical solution approach converges very fast and is effective for solving nonlinear diffusion equation with arbitrary boundary and initial conditions as well as any diffusivity coefficient function for external drying of concrete

slabs.

**Key words:** road engineering; Portland cement concrete (PCC) pavement; water movement mechanism; Adomian decomposition method

水泥混凝土路面板除承受荷载应力以外, 由于其长期暴露在自然环境中, 还承受由环境荷载引起的翘曲应力. 根据成因的不同, 翘曲可分为由温度梯度引起的温度翘曲和由湿度梯度引起的湿度翘曲<sup>[1]</sup>. 一直以来, 研究人员对混凝土路面板温度翘曲的研究较多而且认识较为统一, 形成了系统、完整的温度场预估、翘曲变形和应力计算方法. 对于湿度翘曲, 虽然研究人员已经意识到它对路面板的变形及应力有较大影响, 但对水泥混凝土路面湿度梯度的形成机理的研究较少<sup>[2-4]</sup>, 主要原因是水泥混凝土路面板湿度的影响因素和边界条件较多, 如路面周围环境的相对湿度、降雨、混凝土中的自由水、底基层或路基水分含量等. 目前国内外尚没有一套适合用于设计的描述水泥混凝土路面结构水分迁移的数学模型, 无法准确预测路面板的湿度场, 进而无法计算路面板的湿度翘曲和相应应力. 因此, 目前国内外的水泥混凝土路面设计方法和分析理论中均不考虑湿度梯度的作用, 从而完全忽略了湿度梯度对路面板变形和应力的影响. 上述现状可能会导致对水泥混凝土路面内实际产生的翘曲及应力估计不足, 使路面设计参数与实际服役情况不符. 此问题的深入认识与进一步改善, 有赖于水泥混凝土路面板水分迁移机理这一基础科学问题的研究与解决.

水泥混凝土路面板水分迁移机理一般用 Fick 第二定律描述, 模型为经典的非线性扩散方程, 属于抛物类偏微分方程. 对于模型求解方法的研究主要

收稿日期: 2015-01-13

基金项目: 国家自然科学基金项目(51308329); 山西省青年科技研究基金(2013021028-2); 山西省自然科学基金(2013011027-1); 山西省交通科技项目(2013-1-10; 2013-1-11); 黄土地区公路建设与养护技术交通行业重点实验室开放基金(KLTLR-Y13-1)

第一作者: 张 脩(1980—), 男, 工学博士, 高级工程师, 主要从事道路交通工程科研工作. E-mail: xiaozhang2008@gmail.com

以国外研究为主,从方法上可以分为数值解和解析解,目前大部分关于水泥混凝土路面板水分迁移模型求解的研究集中于数值解领域<sup>[5-13]</sup>.数值解法的优点是速度快,适用范围广,可以求解高度非线性偏微分方程,近似解可以足够精确,满足应用需求,编程易实现,可以分析误差的界.但其缺点是存在稳定性问题、解的精确度的不确定性等问题.相对于数值解,解析解(近似解析解)简明地概括了变量间的关系,还可以通过解析式求出任意一个自变量的值所对应的函数值,便于分析各变量之间的内在逻辑关系,可以克服数值解不确定性的缺点.在解析解方面:Parlange 等人针对土壤中水分的迁移问题对非线性扩散方程和 Richards 方程(该方程在不考虑渗透性时即转换为扩散方程)做了开创性的研究<sup>[14-28]</sup>.在其系列研究中,Parlange 给出了常数边界条件和常数初始条件下的任意水分扩散系数函数的非线性扩散方程的近似解析解,此外还将该方法拓展到了任意边界条件下的情形;Philip 等给出了在常数边界条件和任意初始条件的解析解<sup>[29-30]</sup>,但其解法仅限于特殊水分扩散系数函数的非线性扩散方程.此外,一些科学家还采用了其他的方法对扩散方程进行了求解,如同伦分析方法、Adomian 分解法、EXP 函数法和 Tanh 法等<sup>[31-38]</sup>.可以看出,对于解析解的研究主要为解决土壤中水分迁移问题而进行,解析解或者近似解析解能求解部分特殊定解条件或者特殊水分扩散系数函数条件下的非线性扩散方程.目前,尚没有能够求解一般非线性扩散方程的解析解的算法,这里的一般指的是任意边界条件、任意初始条件和任意水分扩散系数函数.

本文以早龄期混凝土板的水分迁移模型为研究对象,目的是给出早龄期混凝土板在任意边界条件下的水分迁移模型的近似解析解,并以试验数据确定相应的模型参数,为进一步完善水泥混凝土路面湿度场理论奠定基础.

## 1 模型的建立

### 1.1 水分迁移模型

水分在混凝土的 1 维迁移的定量描述可以采用 Fick 第二定律,如

$$\frac{\partial(\theta - \theta_L)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ D \frac{\partial}{\partial x} (\theta - \theta_L) \right\} \quad (1)$$

式中: $\theta$  为由水分外部干燥和自干燥同时引起的混凝土内部相对湿度,  $0 \leq \theta \leq 1$ ;  $\theta_L$  为由于自干燥引起的混凝土内部湿度降低量,  $0 \leq \theta_L \leq 1$ ;  $x$  为距混凝土板

表面的深度,  $m$ ;  $t$  为时间,  $s$ ;  $D$  为外部干燥时混凝土水分的扩散系数,  $m^2 \cdot s^{-1}$ , 混凝土相对湿度的非线性函数表达为<sup>[5]</sup>

$$D(\theta) = D_0 \left[ \alpha_0 + \frac{1 - \alpha_0}{1 + \left( \frac{1 - \theta}{1 - \theta_0} \right)^n} \right] \quad (2)$$

式中: $D_0$  为干燥情况下为混凝土完全饱和状态下的扩散系数,  $m^2 \cdot s^{-1}$ ;  $\alpha_0$  为最小扩散系数与最大扩散系数的比值;  $\theta_0$  为当扩散系数为最大扩散系数一半时的混凝土湿度;  $n$  为描述扩散系数形状的系数.

### 1.2 初始条件与边界条件

初始条件:由于混凝土在成型后是完全饱和的,因此式(1)的初始条件为

$$\theta(x, t) = 100\%, t = 0 \quad (3)$$

上表面(干燥表面)边界条件:采用 Dirichlet 边界条件为

$$\theta(x, t) = \theta_{en}, x = 0, t > 0 \quad (4)$$

式中,  $\theta_{en}$  = 环境相对湿度.

可以看出,在 Dirichlet 边界条件中,混凝土板在干燥表面处( $x=0$ )的相对湿度直接等于环境的相对湿度,这意味着在混凝土表面和空气直接不存在湿度梯度.最近的研究表明,混凝土表面和空气之间的湿度梯度存在,但会在较短时间内消失<sup>[39]</sup>.

下表面边界条件:由于混凝土下表面为密封状态,不存在湿交换和变化,因此,下表面条件采用 Neumann 边界条件为

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = 0, x = l, t > 0 \quad (5)$$

式中,  $l$  为混凝土试件的高度.

## 2 基于 Adomian 分解法的近似解析解

### 2.1 Adomian 分解法简介

Adomian 分解法是美国数学物理学家 Adomian 在 1968 年提出的,又称逆算符方法.该方法的基本思想是将一个代数方程、常微分方程、偏微分方程以及微积分方程的真解分为若干个分量之和,然后求出各阶解分量,最后把这些分量之和以所需要的精度逼近真解<sup>[40]</sup>.Adomian 分解法的基本步骤为:把待解方程分为线性和非线性部分,线性部分又分为可求逆的线性部分以及线性剩余部分,对非线性部分用一个多项式来代替,最后按照递推的办法求出各个分量. Adomian 分解法的基本方法如下:

$$Lu + Ru + Nu = g \quad (6)$$

式中:  $u$  为未知函数;  $L$  为容易求逆运算的线性算子;  $R$  为剩余的线性算子;  $N$  为非线性项;  $g$  为源项。

由于  $L$  是可逆的, 定义  $L$  的逆运算符为  $L^{-1}$ , 将  $L^{-1}$  作用于式(6)两边并移项得

$$u = f - L^{-1}(Ru) - L^{-1}(Nu) \quad (7)$$

式中:  $f$  为源项  $L^{-1}g$  和给定初始或边界条件共同决定的结果。

Adomian 分解法定义如下级数为

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \quad (8)$$

$$Ru = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \quad (9)$$

$$Nu = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \quad (10)$$

式中,  $A_n = A_n(u_0, u_1, \dots, u_n)$ ,  $B_n = B_n(u_0, u_1, \dots, u_n)$ 。

一般来说,  $A_n$  较容易求得, 寻找  $B_n$  对  $Nu$  的逼近是关键的一步。Adomian 分解法用泰勒展式来逼近, 具体如下:

$$Nu = N\left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n\right) = N\left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n \lambda^n\right) \Big|_{\lambda=0} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \quad (11)$$

由泰勒展式可知

$$B_n = \frac{1}{n!} \left[ \frac{d^n}{d\lambda^n} N\left(\sum_{n=0}^{\infty} (\lambda^n u_n)\right) \right]_{\lambda=0} \quad (12)$$

可以证明

$$B_n = \frac{1}{n!} \left[ \frac{d^n}{d\lambda^n} N\left(\sum_{k=0}^n (\lambda^k u_k)\right) \right]_{\lambda=0} \quad (13)$$

将式(8)~式(10)代入式(7), 可以得到如下递推关系

$$u_0 = f \quad (14)$$

$$u_1 = L^{-1}(A_0) - L^{-1}(B_0) \quad (15)$$

...

$$u_{k+1} = L^{-1}(A_k) - L^{-1}(B_k) \quad (16)$$

实际中, 可根据精度要求去逼近项数  $m$ , 取  $u =$

$\sum_{n=0}^m u_n$  为所求解问题的近似解析解。

## 2.2 基于 Adomian 分解法的近似解析解

考虑建立的非线性水分迁移模型式(1)和对应的定解条件式(3)~式(5)组成的混凝土水分迁移问题, 为了简单起见, 首先不考虑早龄期混凝土的自干燥效应引起的水分损失, 只考虑由于水分迁移效应引起的湿度变化, 将建立的水分迁移模型转化为如下扩散方程的初边值问题(IBVP):

$$\begin{cases} \frac{\partial \theta_d}{\partial t} - D(\theta_d) \frac{\partial^2 \theta_d}{\partial x^2} = 0, & 0 < x < l, t > 0 \\ \theta_d(x, 0) = 1, & 0 \leq x \leq l \\ \frac{\partial}{\partial x} \theta_d(l, t) = 0, & t \geq 0 \\ \theta_d(0, t) = \theta_{en}(t), & t \geq 0 \end{cases} \quad (17)$$

式中,  $\theta_d$  为由水分外部干燥引起的混凝土内部相对湿度,  $0 \leq \theta_d \leq 1$ , 其他如前所述。

式(17)一般不容易求得解析解, 现有研究针对多孔介质的干燥问题的水分迁移模型的解析解研究多针对于特殊类型系数方程或者常数边界条件问题, 现有并无任意边界条件下的混凝土板干燥过程的近似解析解的研究。

下面推导基于 Adomian 分解法的任意边界条件下的混凝土板水分迁移模型的近似解析法。

定义  $D(\theta_d) = D_s - D'(\theta_d)$ , 其中  $D_s$  为水分扩散系数方程式(2)的最大值, 则式(17)中的控制方程可以写为

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta_d}{\partial t} &= D_s \frac{\partial^2 \theta_d}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left\{ D' \frac{\partial \theta_d}{\partial x} \right\} = \\ &D_s \frac{\partial^2 \theta_d}{\partial x^2} - \frac{\partial D'}{\partial \theta_d} \left( \frac{\partial \theta_d}{\partial x} \right)^2 - D' \frac{\partial^2 \theta_d}{\partial x^2} \end{aligned} \quad (18)$$

定义微分算子  $L_t(\cdot) = \frac{\partial}{\partial t}(\cdot)$  和其逆算子

$L_t(\cdot) = \int_0^t (\cdot) dt$ , 式(18)可以用算子形式写为

$$L(\theta_d) = \theta_0 - N(\theta_d) \quad (19)$$

其中  $N(\theta_d) = \frac{\partial D'}{\partial \theta_d} \left( \frac{\partial \theta_d}{\partial x} \right)^2 + D' \frac{\partial^2 \theta_d}{\partial x^2}$ ,  $\theta_0$  是如下线性 IBVP 式(20)的解为

$$\begin{cases} \frac{\partial \theta_0}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left\{ D_s \frac{\partial \theta_0}{\partial x} \right\} = 0, & 0 < x < l, t > 0 \\ \theta_0(x, 0) = 1, & 0 \leq x \leq l \\ \frac{\partial}{\partial x} \theta_0(l, t) = 0, & t \geq 0 \\ \theta_0(0, t) = \varphi(t), & t \geq 0 \end{cases} \quad (20)$$

$\theta_0$  可以根据特征展开法求得

$$\begin{aligned} \theta_0(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left( g_n \exp[-D_s(\beta_n)^2 t] + \right. \\ &\left. \int_0^t \exp[D_s(\beta_n)^2(s-t)] f_n(s) ds \right) \sin \beta_n x + \varphi(t) \end{aligned} \quad (21)$$

其中:  $\beta_n = \frac{(2n-1)\pi}{2l}$ ;  $g_n = \frac{2}{l} \int_0^l (g(x) \sin \beta_n x) dx$ ;

$f_n(\cdot) = \frac{2}{l} \int_0^l (f(\cdot) \sin \beta_n x) dx$ 。

值得说明的是  $\theta_0(x, t)$  是一个无穷级数, 但是实

际中可以根据精度要求取有限项逼近真解。

对式(19)左右两端作用  $L_t(\cdot)$ , 得到

$$\theta_d = \theta_0 - L_t N(\theta_d) \quad (22)$$

根据 Adomian 分解法,  $\theta_d(x, t)$  可以表示为级数

$$\theta_d(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \theta_n(x, t) = \theta_0(x, t) - L_t^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} A_n \quad (23)$$

其中:  $\theta_n(x, t)$  可以根据递推关系得到;  $A_n$  为 Adomian 多项式, 可得<sup>[41]</sup>

$$A_n(\theta_0, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n) = \frac{1}{n!} \left[ \frac{d^n}{d\lambda^n} N \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda^k \theta_k) \right]_{\lambda=0} = \frac{1}{n!} \left[ \frac{d^n}{d\lambda^n} N \sum_{k=0}^n (\lambda^k \theta_k) \right]_{\lambda=0} \quad (n=0, 1, 2, \dots) \quad (24)$$

结合式(18), 可得  $A_n$  的递推关系

$$\begin{cases} A_0(\theta_0) = N(\theta_0) = -\frac{\partial D'(\theta_0)}{\partial \theta_0} \left( \frac{\partial \theta_0}{\partial x} \right)^2 - D'(\theta_0) \frac{\partial^2 \theta_0}{\partial x^2} \\ A_1(\theta_0, \theta_1) = \theta_1 \frac{dN(\theta_0)}{d\theta_0} \\ A_2(\theta_0, \theta_1, \theta_2) = \theta_2 \frac{dN(\theta_0)}{d\theta_0} + \frac{\theta_1^2}{2!} \frac{d^2 N(\theta_0)}{d\theta_0^2} \\ A_3(\theta_0, \theta_1, \theta_2, \theta_3) = \theta_3 \frac{dN(\theta_0)}{d\theta_0} + \theta_1 \theta_2 \frac{d^2 N(\theta_0)}{d\theta_0^2} + \frac{\theta_1^3}{3!} \frac{d^3 N(\theta_0)}{d\theta_0^3} \\ \dots \end{cases} \quad (25)$$

可以看出  $A_n$  仅跟  $\theta_0, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{n-1}$  有关。至此, 根据式(23)可以求得式(1)的级数解,  $\theta_d(x, t)$  的第 1 项由式(21)给出, 后面的项数如下:

$$\begin{cases} \theta_1 = -L_t^{-1} A_0 \\ \theta_2 = -L_t^{-1} A_1 \\ \theta_3 = -L_t^{-1} A_2 \\ \dots \\ \theta_{n+1} = -L_t^{-1} A_n \end{cases} \quad (26)$$

可以证明, 级数  $\theta_d(x, t) = \sum_{n=0}^{n-1} \theta_n(x, t)$  具有收敛性, 且其收敛速度很快, 一般情况下, 有限的几项即可给出满意的结果<sup>[42]</sup>。项数的取值取决于实际问题要求的精度。

### 3 水分迁移试验

#### 3.1 材料

试验选用 3 种典型水灰比的路用水泥混凝土混合料, 分别记为 N30, N40 和 N50, 其配合比见表 1。混合料选用的水泥为 PO42.5 普通硅酸盐水泥, 除 N30 添加减水剂(用量为 1%)外, 未加其他掺合料。

表 1 混凝土配合比

Tab.1 Concrete proportion

混合料 编号	水灰比	水泥/ (kg · m <sup>-3</sup> )	水/ (kg · m <sup>-3</sup> )	砂/ (kg · m <sup>-3</sup> )	粗集料/mm 4.75~9.5	粗集料/mm 9.5~31.5
N30	0.3	390	117	738	462	692
N40	0.4	390	156	723	452	678
N50	0.5	390	195	707	442	664

#### 3.2 试验过程

为研究 3 种水灰比下的早龄期混凝土的水分迁移规律, 制作 6 个 150 mm × 150 mm × 150 mm 的立方体混凝土试件, 分别对每种水灰比下的混合料在空气养生方式下的混凝土内部相对湿度进行测试。由于水泥混凝土路面板在力学分析中一般假设为薄板, 因此, 其水分迁移一般在垂直于面板的 1 维方向上迁移。为模拟这种迁移特性, 需将制作的立方体混凝土试件除表面外的其他 5 个表面进行密封, 以防止水分在另外 2 个方向上迁移, 从理论上来说, 密封表面形成的绝湿边界和均匀初始条件可以保证水分只在垂直于干燥表面方向上迁移。另外, 由于早龄期混凝土的自干燥特性, 需要对每种水灰比下的完全密封混合料试件进行相对湿度测试。

采用瑞士 Sensirion SHT15 温湿度传感器进行混凝土湿度测试, 其湿度测试精度为 ±2%, 在测试前利用标准恒温恒湿箱在 40%~100% 相对湿度范围内对传感器进行了标定。试验过程如下:

(1) 混凝土浇注: 在预留测试孔的混凝土试模中浇注按照配合比配置的混凝土, 见图 1。

(2) 传感器布设: 4 h 后, 将埋置的 PVC 管缓缓拔出, 及时将传感器探头插入混凝土, 并将 2 侧端部孔口用硅胶塞和石蜡密封, 以防止水分从侧面蒸发。

(3) 湿度测试: 根据不同试验要求, 将每种混合料的 2 个试件表面分别进行环氧树脂密封和空气养生, 并开始湿度检测, 湿度监测频率为 1 h, 监测周期为 28 d。试验时, 将试件放置于室内, 试验过程中, 试件干燥表面朝上, 为形成任意边界条件下混凝土的

干燥过程,利用温度可调热电风扇以变温度状态持续扇风以形成混凝土表面湿度随时间下降的空气环境.水分迁移机理试验概念见图 2 所示.

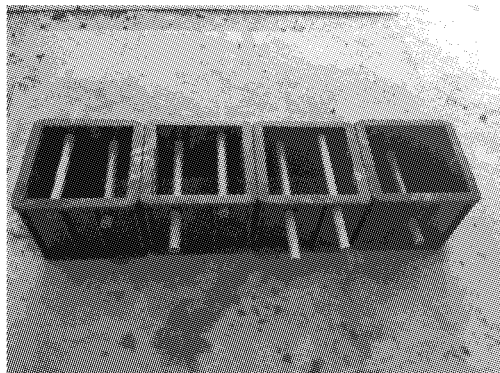


图 1 预留测试孔的混凝土试模

Fig.1 Waterproof plastic mold with holes

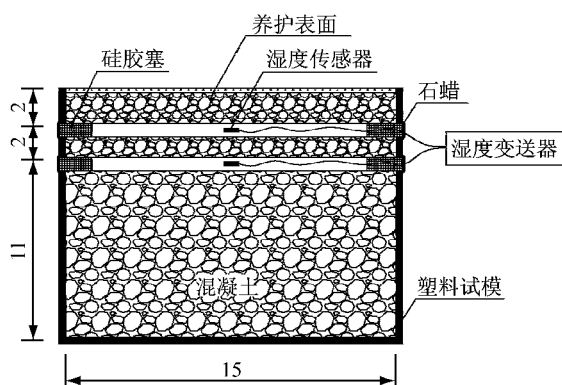


图 2 混凝土水分迁移机理试验概念图(单位:cm)

Fig.2 Schematic of water movement testing for concrete (unit: cm)

## 4 算法验证

经过拟合,试验形成空气相对湿度随时间的变化可以用指数关系表示为

$$\varphi(t) = a_0 \exp(bt) \quad (27)$$

式中: $a_0$  为  $t = 0$  时刻的湿度值,为常数 1; $b$  是表征相对湿度下降速度的常数.

采用 Levenberg-Marquardt 算法进行未知参数的估计<sup>[43-44]</sup>,结果表明可以较好地拟合空气湿度随时间变化的函数曲线.

$$\varphi(t) = \exp(-0.056t) \quad (28)$$

图 3 为空气相对湿度的实测值和对应的拟合曲线.拟合优度结果见表 2.

为了验证 Adomian 分解法的有效性,将

Adomian 分解法,Crank-Nicolson 有限差分法和试验结果进行比较.考虑 N30,N40 和 N50 在空气养生条件下的水分迁移机理问题,利用标定的参数<sup>[45]</sup>,分别利用 Adomian 分解法和 Crank-Nicolson 有限差分法计算早龄期混凝土仅由干燥过程引起的相对湿度变化规律.混凝土仅在干燥过程中引起的相对湿度实测值为空气养生条件下与密封条件下的相对湿度测试值之差.

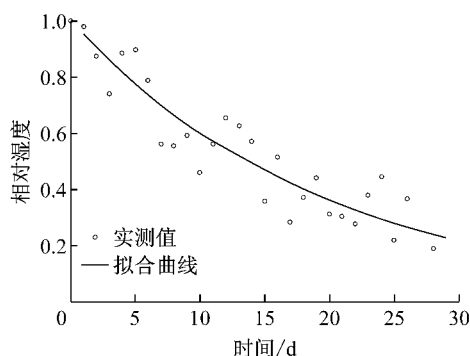


图 3 空气相对湿度随时间变化函数

Fig.3 Function of relative air humidity over time

表 2 拟合参数估计

Tab.2 Estimates of fitting paramters

参数	平方和 误差	经调整的 判断系数 $R^2$	均方根 误差	判断系 数 $R^2$
取值	2 627	0.830 8	0.830 8	9.686

由于水分扩散系数函数  $D(\theta_d)$  的高度非线性特性,在采用 Adomian 分解法计算 Adomian 多项式的逆运算时需要的计算资源较大.在实际中,将  $D(\theta_d)$  在  $\theta_d = 0.5$  处做泰勒展开,取其前 3 项来逼近  $D(\theta_d)$ .这种近似虽然有一定误差,但是可以极大提高运算速度,且能展示 Adomian 分解法的求解过程.

经过计算,可以发现对于 3 种混合料 N30,N40 和 N50 来说,取式(23)的前 3 项即可得到较高精度的计算结果,即

$$\theta_d(x,t) = \sum_{n=0}^2 \theta_n(x,t) \quad (29)$$

针对由特征展开法计算得到的第 1 项  $\theta_0(x,t)$ ,计算发现,对于 3 种混合料 N30,N40 和 N50 来说,分别取其前 15,8 和 6 项可以得到精度小于 1%的逼近.这里,定义的  $\theta_0(x,t)$  误差为

$$\sum_{n=0}^{N+1} \theta_n(x,t) - \sum_{n=0}^N \theta_n(x,t).$$

N30,N40 和 N50 对应的误差分别如图 4—图 6 所示.

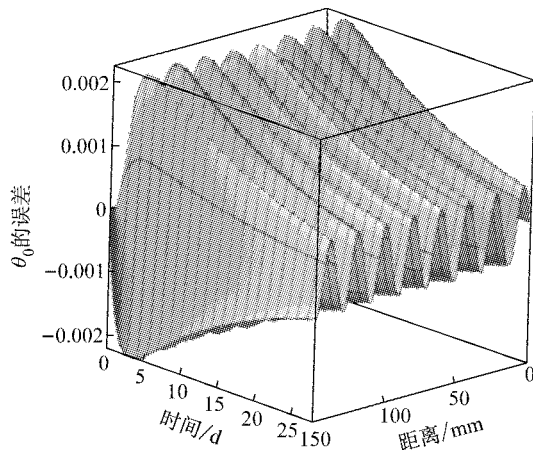


图 4  $\theta_0(x, t)$  的误差: N30  
Fig.4 Error of  $\theta_0(x, t)$ : N30

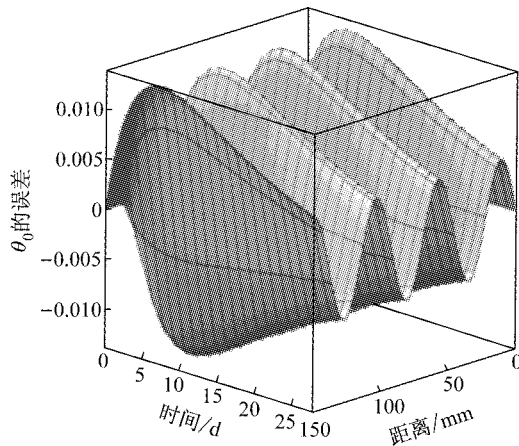


图 5  $\theta_0(x, t)$  的误差: N40  
Fig.5 Error of  $\theta_0(x, t)$ : N40

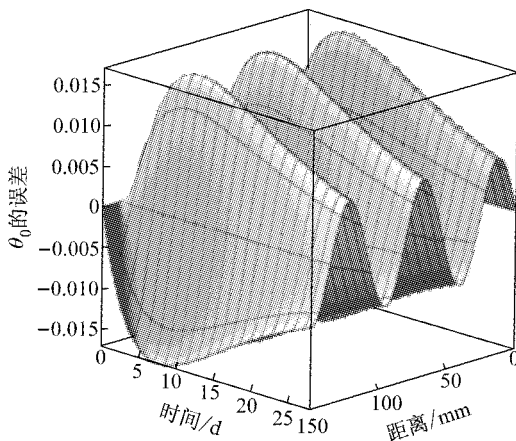


图 6  $\theta_0(x, t)$  的误差: N50  
Fig.6 Error of  $\theta_0(x, t)$ : N50

将试验得到的仅考虑干燥过程中的水分迁移效应造成的混凝土湿度在 2 cm 和 4 cm 处的分布实测值与 Adomian 分解法和有限差分法计算得到模拟

值分别比较如图 7—图 9。

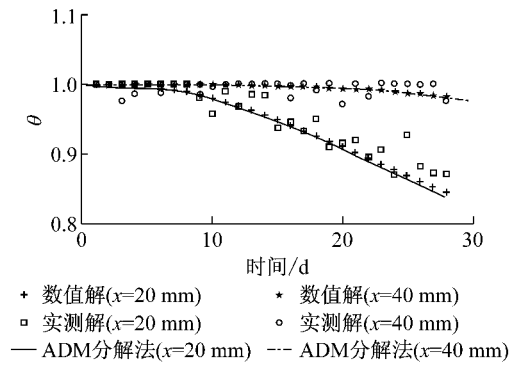


图 7 求解结果与实测值对比: N30  
Fig.7 Comparison of test results with model solution for N30

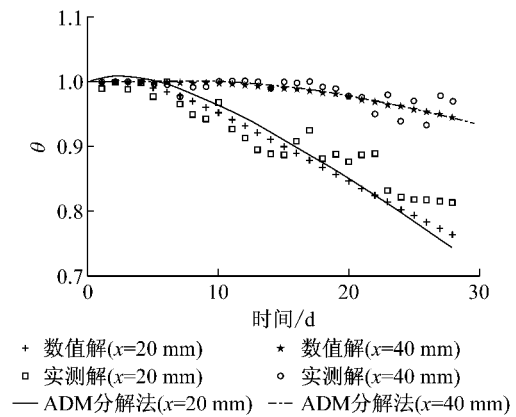


图 8 求解结果与实测值对比: N40  
Fig.8 Comparison of test results with model solution for N40

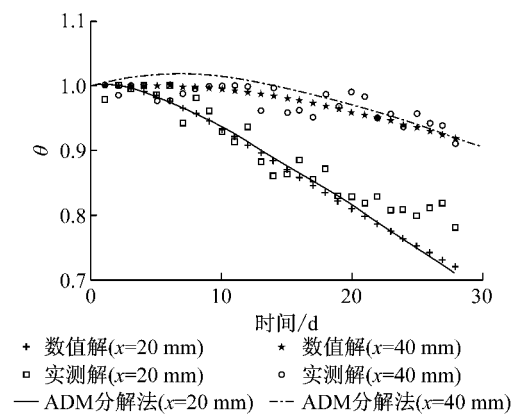


图 9 求解结果与实测值对比: N50  
Fig.9 Comparison of test results with model solution for N50

由图可知, Adomian 分解法和有限差分法计算结果几乎一致, 对于 N50 在 2 cm 深度处的最大误差约为 0.01, 这是由于 Adomian 分解法中采用有限项来逼近无限项的过程造成的, 但足以满足工程精度要求; 实测值与模拟值存在较大误差, 这是由两方面

原因造成的:一是空气湿度函数曲线的近似;二是湿度传感器本身存在的系统误差。

## 5 结语

以 Adomian 分解法分析的方法,推导了早龄期混凝土板在任意边界条件下的水分迁移模型的近似解析解,并与试验数据和 Crank-Nicolson 有限差分法数值解的结果进行了比较。

结果表明:Adomian 多项式逼近水分迁移模型中的非线性项的收敛速度非常快,使得所求解的近似解析解的收敛速度也非常快,Adomian 分解法能求解任意边界条件下的混凝土板干燥过程的偏微分方程。同时,经过简单的推导,该方法也能作为求解任意初始条件和任意边界条件下的近似解析解方法。

## 参考文献:

- [1] 魏亚. 水泥混凝土路面湿度翘曲形成机理及变形计算[J]. 工程力学, 2012, 29(11): 266.  
WEI Ya. Mechanism of moisture warping and deformation calculations in concrete pavements[J]. Engineering Mechanics, 2012, 29(11): 266.
- [2] Buch N, Zollinger D G. Preliminary investigation on effects of moisture on concrete pavement strength and behavior[J]. Transportation Research Record, 1993(1382): 26.
- [3] Janssen D J. Moisture in Portland cement concrete [J]. Transportation Research Record 1121, 1987(1121): 40.
- [4] Jeong J, Zollinger D G. Environmental effects on the behavior of jointed plain concrete pavements [J]. Journal of Transportation Engineering, 2005, 131(2): 140.
- [5] Bažant Z P, Najjar L J. Nonlinear water diffusion in nonsaturated concrete[J]. Material and Construction, 1972, 5(1): 3.
- [6] Kang S, Kim J, Lee Y, *et al.* Moisture diffusivity of early age concrete considering temperature and porosity [J]. KSCE Journal of Civil Engineering, 2012, 16(1): 179.
- [7] Li C, Li K, Chen Z. Numerical analysis of moisture influential depth in concrete and its application in durability design[J]. Tsinghua Science & Technology, 2008, 13: 7.
- [8] Wei Y, Gao X, Hansen W. Influential depth by water absorption and surface drying in concrete slabs[J]. Journal of the Transportation Research Board, 2013, 2342: 76.
- [9] Xu Q, Ruiz J M, Chang G K, *et al.* Moisture transport model for enhancing FHWA HIPERPAV predictions[J]. Journal of the Transportation Research Board, 2009(2113): 1.
- [10] Zhang J, Qi K, Huang Y. Calculation of moisture distribution in early-age concrete[J]. Journal of Engineering Mechanics, 2009, 135(8): 871.
- [11] 晁鹏飞, 郑建岚, 王雪芳. 高性能混凝土水分扩散数值解法[J]. 福州大学学报(自然科学版), 2007, 35(6): 898.  
CHAO Pengfei, ZHENG Jianlan, WANG Xuefang. Numerical algorithm for moisture diffusion in High performance concrete [J]. Journal of Fuzhou University: Natural Science, 2007, 35(6): 898.
- [12] 高原, 张君, 孙伟. 密封养护混凝土内部湿度与收缩的一体化试验与模拟[J]. 建筑材料学报, 2013(2): 203.  
GAO Yuan, ZHANG Jun, SUN Wei. Tests and simulations of interior humidity and shrinkage of concrete under sealed condition [J]. Journal of Building Materials, 2013(2): 203.
- [13] 胡昌斌, 王丽娟, 吕恒. 水泥混凝土路面早期湿度场数值模拟研究[J]. 工程力学, 2014, 31(4): 178.  
HU Changbin, WANG Lijuan, LU Heng. Numerical modeling of cement concrete pavements' internal moisture fields at early ages [J]. Engineering Mechanics, 2014, 31(4): 178.
- [14] Barry D A, Parlange J Y, Li L, *et al.* Comment on "Analytical decomposition of the nonlinear unsaturated flow equation" by Sergio E. Serrano[J]. Water Resources Research, 2002, 38(2): 1.
- [15] Barry D A, Parlange J Y, Sander G C, *et al.* A class of exact solutions for Richards' equation [J]. Journal of Hydrology, 1993, 142(1): 29.
- [16] Hogarth W L, Parlange J Y. Application and improvement of a recent approximate analytical solution of Richard's Equation [J]. Water Resources Research, 2000, 36(7): 1965.
- [17] Lockington D A, Parlange J Y, Barry D A, *et al.* Drying of porous building materials: hydraulic diffusivity and front propagation[J]. Materials and Structures, 2003, 36(7): 448.
- [18] Lockington D A, Parlange J. Anomalous water absorption in porous materials[J]. Journal of Physics D: Applied Physics, 2003, 36(6): 760.
- [19] Lockington D, Parlange J Y, Dux P. Sorptivity and the estimation of water penetration into unsaturated concrete[J]. Materials and Structures, 1999, 32(5): 342.
- [20] Parlange M B, Prasad S N, Parlange J Y, *et al.* Extension of the Heaslet-Alksne Technique to arbitrary soil water diffusivities[J]. Water Resources Research, 1992, 28(10): 2793.
- [21] Parlange J Y. Theory of water-movement in soils: 1. one dimensional absorption [J]. Soil Science and Plant Nutrition 1971, 111(2): 134.
- [22] Parlange J Y, Barry D A, Parlange M B, *et al.* New approximate analytical technique to solve Richards equation for arbitrary surface boundary conditions [J]. Water Resources Research, 1997, 33(4): 903.
- [23] Parlange J Y, Barry D A, Parlange M B, *et al.* Sorptivity calculation for arbitrary diffusivity [J]. Transport in Porous Media, 1994, 15(3): 197.

- [24] Parlange J Y, Hogarth W L, Barry D A, *et al.* Analytical approximation to the solutions of Richards' equation with applications to infiltration, ponding, and time compression approximation[J]. *Advances in Water Resources*, 1999, 23(2): 189.
- [25] Parlange J Y, Hogarth W L, Parlange M B, *et al.* Approximate analytical solution of the nonlinear diffusion equation for arbitrary boundary conditions[J]. *Transport in Porous Media*, 1998, 30(1): 45.
- [26] Parlange J Y, Lisle I G, Prasad S N, *et al.* Wetting front analysis of the nonlinear diffusion equation [J]. *Water Resources Research*, 1984, 20(5): 636.
- [27] Sander G C, Parlange J, Kühnel V, *et al.* Exact nonlinear solution for constant flux infiltration[J]. *Journal of Hydrology*, 1988, 97(3): 341.
- [28] Richards L A. Capillary conduction of liquids through porous mediums[J]. *Physics*, 1931(1): 318.
- [29] Knight J H, Philip J R. Exact solutions in nonlinear diffusion [J]. *Journal of Engineering Mathematics*, 1974, 8(3): 219.
- [30] Philip J R. General method of exact solution of the concentration-dependent diffusion equation [J]. *Australian Journal of Physics*, 1960, 13(1): 1.
- [31] Nasseri M, Shaghaghian M R, Daneshbod Y, *et al.* An analytic solution of water transport in unsaturated porous media[J]. *Journal of Porous Media*, 2008, 11(6): 591.
- [32] Warrick A W. Analytical solutions to the one-dimensional linearized moisture flow equation for arbitrary input[J]. *Soil Science*, 1975, 120(2): 79.
- [33] Serrano S E. Modeling infiltration with approximate solutions to Richard's Equation[J]. *Journal of Hydrologic Engineering*, 2004, 9(5): 421.
- [34] Serrano S E, Adomian G. New contributions to the solution of transport equations in porous media[J]. *Mathematical and Computer Modelling*, 1996, 24(4): 15.
- [35] Serrano S E. Analytical decomposition of the nonlinear unsaturated flow equation[J]. *Water Resources Research*, 1998, 34(3): 397.
- [36] Rashidi M M, Domairry G, Dinarvand S. Approximate solutions for the Burger and regularized long wave equations by means of the homotopy analysis method[J]. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2009, 14(3): 708.
- [37] Pamuk S. Solution of the porous media equation by Adomian's decomposition method[J]. *Physics Letters A*, 2005, 344(2): 184.
- [38] Asgari A, Bagheripour M H, Mollazadeh M. A generalized analytical solution for a nonlinear infiltration equation using the exp-function method[J]. *Scientia Iranica*, 2011, 18(1): 28.
- [39] 李春秋. 干湿交替下表层混凝土中水分与离子传输过程研究[D]. 北京: 清华大学, 2009.
- LI Chunqiu. Study on water and ionic transport processes in cover concrete under drying-wetting cycles [D]. Beijing: Tsinghua University, 2009.
- [40] Adomian G. Solving frontier problems of physics: the decomposition method[M]. *Fundamental Theories of Physics*, 1994.
- [41] Chen W, Lu Z. An algorithm for Adomian decomposition method[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2004, 159(1): 221.
- [42] Adomian G. A review of the decomposition method and some recent results for nonlinear equations [J]. *Computers & Mathematics with Applications*, 1991, 21(5): 101.
- [43] Marquardt D W. An algorithm for least-squares estimation of nonlinear parameters[J]. *Journal of the Society for Industrial & Applied Mathematics*, 1963, 11(2): 431.
- [44] Levenberg K. A method for the solution of certain non-linear problems in least squares[J]. *Quarterly Journal of Applied Mathematics*, 1944, 11(2): 164.
- [45] 张脩. 水泥混凝土路面板水分迁移机理及湿度场表征[D]. 上海: 同济大学, 2015.
- ZHANG Xiao. Mechanisms of water movement in cement concrete pavements and the representation of moisture gradients [D]. Shanghai: Tongji University, 2015.