文章编号:0253-374X(2010)04-0586-03
DOI:10.3969/j.issn.0253-374x.2010.04.021

输入矩阵定常型切换线性系统的能控性

徐志宇,许维胜,吴启迪
(同济大学 电子与信息工程学院,上海 201804)

摘要:重新考察一类切换线性系统的能控性,这类系统具有不同的系统矩阵和相同的输入矩阵.研究发现文献导出的必要充分条件为假命题,该判据只适用于 2 阶系统,对于 3 阶及以上系统其必要性不一定成立.并证明第一不变子空间只是能控状态集的真子集,而非其全体.最后通过 1 个反例对结论予以验证.

关键词:切换线性系统;输入矩阵定常;能控性;能控状态集;必要充分条件
中图分类号:TP 13 **文献标识码**:A

Controllability of Switched Linear System with Constant Input Matrix

XU Zhiyu, *XU Weisheng*, *WU Qidi*
(College of Electronics & Information Engineering, Tongji University, Shanghai 201804, China)

Abstract: The paper presents a reexamination of the controllability of a class of switched linear systems with different systematic matrices but the same input matrix. Investigations reveal that the necessary and sufficient condition derived in the former literatures is a false proposition, which only holds for the second-order systems, while the necessity is not always true for systems of the third or a higher order. The first invariant subspace proves to be a proper subset of controllable state set rather than the whole of it. Finally, a counterexample is presented to illustrate the conclusion.

Key words: switched linear system; constant input matrix; controllability; controllable state set; necessary and sufficient condition

切换线性系统(switched linear system,SLS)的能控性是混杂系统理论的研究热点之一[1-2].文献[3-4]导出一般 SLS 能控的必要充分条件.文献[5]得到一类特殊 SLS(系统矩阵定常、输入矩阵切换)的能控性简化判据;类似地,文献[6]研究另一类特殊 SLS(系统矩阵切换、输入矩阵定常)能控的等价命题,并据此判定 Boost 变换器的能控性.本文首先介绍 SLS 及其能控性的相关概念和定理;然后重述文献[6]中的命题,分析其推理的疏漏和谬误,证明其结论对 3 阶及以上系统不成立;最后通过 1 个反例予以说明.

1 预备知识

1.1 切换线性系统及其能控性

一般地,SLS 可表为

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}_{\sigma(t)}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}_{\sigma(t)}\boldsymbol{u}(t) \tag{1}$$

式中:$\boldsymbol{A}$ 为系统矩阵;$\sigma(t):\mathbf{R}^+ \to \{1,2,\cdots,N\}$ 为开关切换律;$\boldsymbol{x}(t)\in\mathbf{R}^n$ 为状态向量;$\boldsymbol{B}$ 为输入矩阵;$\boldsymbol{u}(t)\in\mathbf{R}^p$ 为输入向量.

定义 1 (切换序列)表 $i_m\in\{1,2,\cdots,N\}$ 为切换模态$(\boldsymbol{A}_{i_m},\boldsymbol{B}_{i_m})$的序号,$h_m\in(0,+\infty)$为其持续时间,则切换序列 π 定义为有限集

$$\pi \overset{\text{def}}{=} \{(i_1,h_1),(i_2,h_2),\cdots,(i_M,h_M)\} \tag{2}$$

式中:M 为切换序列π 的长度.切换模态与切换序列完全描述了系统(1)的动态过程.

定义 2 (能控性)系统(1)为能控的,如果对 $\forall \boldsymbol{x}\neq 0$,都存在 1 个切换序列$\{(i_m,h_m)\}_{m=1}^M$和 1 个无约束的容许输入 $\boldsymbol{u}(t)$,$t\in[0,T]$,使得 $\boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}$,$\boldsymbol{x}(T)=0$,其中 $T=\sum\limits_{m=1}^{M}h_m$.

定义 3 (能控状态集)[7] 对于切换序列 π =

收稿日期:2009-03-04
基金项目:国家"八六三"高技术研究发展计划资助项目(2006AA05Z211)
作者简介:徐志宇(1982—),男,博士生,主要研究方向为系统控制理论在 DC-DC 变换器中的应用.E-mail:xuzhiyu@yahoo.cn
吴启迪(1947—),女,教授,博士生导师,主要研究方向为现代控制理论与应用、计算机集成制造系统等.
E-mail:qidi@tongji.edu.cn

$\{(i_m, h_m)\}_{m=1}^{M}$，记 $T = \sum_{m=1}^{M} h_m$，则 π 的能控状态集定义为 $\mathscr{C}(\pi) \overset{\text{def}}{=} \{\boldsymbol{x} \mid$ 存在无约束的容许输入 $\boldsymbol{u}(t)$，$t \in [0, T]$，使得 $\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}(T) = 0\}$　　(3)

记系统(1)的能控集为 $\mathscr{C}$，显然

$$\mathscr{C} = \bigcup_{\forall \pi} \mathscr{C}(\pi) \tag{4}$$

类似地，可以定义系统(1)的能达性与能达状态集，考虑到系统(1)的能控集与能达集具有同一性[3-4]，本文中集中讨论能控性.

1.2　能控性判据

定义 4　(列空间)给定矩阵 $\boldsymbol{B}_{n\times p} = [\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_p]$，其列空间 $\mathscr{R}(\boldsymbol{B})$ 定义为

$$\mathscr{R}(\boldsymbol{B}) \overset{\text{def}}{=} \{\boldsymbol{B}\,\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^p\} \tag{5}$$

其实质是 $\mathrm{span}\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_p\}$.

定义 5　(不变子空间)给定矩阵 $\boldsymbol{A} \in \mathrm{R}^{n\times n}$ 和线性子空间 $\mathscr{W} \subseteq \mathbf{R}^n$，不变子空间定义为

$$\langle \boldsymbol{A} \mid \mathscr{W} \rangle \overset{\text{def}}{=} \mathscr{W} + \boldsymbol{A}\mathscr{W} + \cdots + \boldsymbol{A}^{n-1}\mathscr{W} \tag{6}$$

并简记 $\langle \boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{B} \rangle = \langle \boldsymbol{A} \mid \mathscr{R}(\boldsymbol{B}) \rangle$.

不变子空间具有如下性质：

性质 1　$\forall k, \boldsymbol{A}^k \mathscr{W} \subseteq \langle \boldsymbol{A} \mid \mathscr{W} \rangle$

性质 2　$\forall h \in \mathbf{R}, \exp(\boldsymbol{A}h)\mathscr{W} \subseteq \langle \boldsymbol{A} \mid \mathscr{W} \rangle$

性质 3　$\exp(\boldsymbol{A}t)\langle \boldsymbol{A} \mid \mathscr{W} \rangle = \langle \boldsymbol{A} \mid \mathscr{W} \rangle$

性质 4　$\langle \boldsymbol{A} \mid \mathscr{W} + \mathscr{V} \rangle = \langle \boldsymbol{A} \mid \mathscr{W} \rangle + \langle \boldsymbol{A} \mid \mathscr{V} \rangle$

定义如下子空间序列[8]：

$$\mathscr{W}_n = \begin{cases} \sum_{i=1}^{N} \langle \boldsymbol{A}_i \mid \boldsymbol{B}_i \rangle & n = 1 \\ \sum_{i=1}^{N} \langle \boldsymbol{A}_i \mid \mathscr{W}_{n-1} \rangle & n > 1 \end{cases} \tag{7}$$

定理 1[7-8]　$\mathscr{W}_1 = \mathbf{R}^n \Rightarrow$ 系统(1)能控.

定理 2[3-4]　$\mathscr{W}_n = \mathbf{R}^n \Leftrightarrow$ 系统(1)能控.

定理 3[7]　能控集 $\mathscr{C} = \mathbf{R}^n \Leftrightarrow$ 系统(1)能控.

2　输入矩阵定常型切换线性系统的能控性

2.1　问题重述

考虑一类特殊的 SLS，有

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}_{\sigma(t)}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\,\boldsymbol{u}(t) \tag{8}$$

文献[6]给出了如下论断，即：

命题 1　系统(8)的能控状态集为

$$\mathscr{C} = \sum_{i=1}^{N} \langle \boldsymbol{A}_i \mid \boldsymbol{B} \rangle \tag{9}$$

命题 2　系统(8)能控的必要充分条件为

$$\sum_{i=1}^{N} \langle \boldsymbol{A}_i \mid \boldsymbol{B} \rangle = \mathbf{R}^n \tag{10}$$

经过深入研究，发现上述命题均为假.注意到命题 2 的充分性即为定理 1，必定成立；命题 2 的必要性等价于命题 3.

命题 3　$\sum_{i=1}^{N} \langle \boldsymbol{A}_i \mid \boldsymbol{B} \rangle \neq \mathbf{R}^n \Rightarrow$ 系统(8) 不能控

下面考察命题 3 是否成立.

2.2　2 阶系统

$$n = 2, \forall N \geqslant 2$$

$$\mathscr{W}_1 = \langle \boldsymbol{A}_1 \mid \boldsymbol{B} \rangle + \langle \boldsymbol{A}_2 \mid \boldsymbol{B} \rangle + \cdots + \langle \boldsymbol{A}_N \mid \boldsymbol{B} \rangle = \mathrm{span}\{\boldsymbol{B} \vdots \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B} \vdots \cdots \vdots \boldsymbol{A}_N\boldsymbol{B}\}$$

若 $\dim(\mathscr{W}_1) = 1$，不妨设 $\mathscr{W}_1 = \mathrm{span}\{\boldsymbol{B}\}$，则

$$\mathscr{W}_2 = \langle \boldsymbol{A}_1 \mid \mathscr{W}_1 \rangle + \langle \boldsymbol{A}_2 \mid \mathscr{W}_1 \rangle + \cdots + \langle \boldsymbol{A}_N \mid \mathscr{W}_1 \rangle = \mathrm{span}\{\boldsymbol{B} \vdots \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B} \vdots \cdots \vdots \boldsymbol{A}_N\boldsymbol{B}\} = \mathrm{span}\{\boldsymbol{B}\} = \mathbf{R}^1$$

由定理 2 知系统(8)不能控，命题 3 得证.

2.3　3 阶系统

$$n = 3, \quad \forall N \geqslant 2$$

$$\mathscr{W}_1 = \langle \boldsymbol{A}_1 \mid \boldsymbol{B} \rangle + \langle \boldsymbol{A}_2 \mid \boldsymbol{B} \rangle + \cdots + \langle \boldsymbol{A}_N \mid \boldsymbol{B} \rangle = \mathrm{span}\{\boldsymbol{B}, \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}, \boldsymbol{A}_1^2\boldsymbol{B}, \cdots, \boldsymbol{A}_N\boldsymbol{B}, \boldsymbol{A}_N^2\boldsymbol{B}\}$$

(1) $\dim(\mathscr{W}_1) = 1$ 时，不妨设 $\mathscr{W}_1 = \mathrm{span}\{\boldsymbol{B}\}$

$$\mathscr{W}_2 = \langle \boldsymbol{A}_1 \mid \mathscr{W}_1 \rangle + \cdots + \langle \boldsymbol{A}_N \mid \mathscr{W}_1 \rangle = \mathrm{span}\{\boldsymbol{B}\} = \mathbf{R}^1$$

同理

$$\mathscr{W}_3 = \langle \boldsymbol{A}_1 \mid \mathscr{W}_2 \rangle + \cdots + \langle \boldsymbol{A}_N \mid \mathscr{W}_2 \rangle = \mathrm{span}\{\boldsymbol{B}\} = \mathbf{R}^1$$

由定理 2 知系统(8)不能控，命题 3 得证

(2) $\dim(\mathscr{W}_1) = 2$ 时，不妨设 $\mathscr{W}_1 = \mathrm{span}\{\boldsymbol{B} \vdots \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}\}$，$\mathscr{W}_2 = \mathrm{span}\{\boldsymbol{B} \vdots \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B} \vdots \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B} \vdots \cdots \vdots \boldsymbol{A}_N\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}\}$.

如果 $\forall \boldsymbol{A}_i, i = 1, 2, \cdots, N$，都有 $\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{B}, \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}$ 线性相关，则 $\mathscr{W}_2 = \mathrm{span}\{\boldsymbol{B} \vdots \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}\} = \mathbf{R}^2$，必有 $\mathscr{W}_3 = \mathbf{R}^2$，由定理 2 知系统(8)不能控，命题 3 得证

如果 $\exists \boldsymbol{A}_\sigma, \sigma = 1, 2, \cdots, N$，使 $\boldsymbol{A}_\sigma\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{B}, \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}$ 线性无关，则 $\mathscr{W}_2 = \mathrm{span}\{\boldsymbol{B} \vdots \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B} \vdots \boldsymbol{A}_\sigma\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}\} = \mathbf{R}^3$，必有 $\mathscr{W}_3 = \mathbf{R}^3$，由定理2知系统(8) 能控.命题3被证伪.即当 $\sum_{i=1}^{N} \langle \boldsymbol{A}_i \mid \boldsymbol{B} \rangle \neq \mathbf{R}^3$ 时，系统(8) 同样可能具有能控性.

显然命题 3 对 3 阶以上系统也不成立.综上所述，命题 3 为假，从而命题 2 的必要性不成立.

2.4　分析与讨论

结合定理 3 可知，命题 2 为假的根源是命题 1 为假，即系统(8) 的能控集 $\mathscr{C} \neq \sum_{i=1}^{N} \langle \boldsymbol{A}_i \mid \boldsymbol{B} \rangle$. 文献[6] 中有如下推理：

切换序列 π 的能控集

$$\mathscr{C}(\pi)=\sum_{m=1}^{M}\prod_{j=1}^{m}\exp(-\boldsymbol{A}_{i_j}h_j)\langle\boldsymbol{A}_{i_m}\mid\boldsymbol{B}\rangle=\sum_{m=1}^{M}\langle\boldsymbol{A}_{i_m}\mid\boldsymbol{B}\rangle \tag{11}$$

事实上,由于矩阵 $\boldsymbol{A}_{i_j}, j=1,2,\cdots,m$ 间的不一致性,不能应用性质3,所以式(11)的第2个等号不能成立.由于 $\mathscr{C}(\pi)\neq\sum_{m=1}^{M}\langle\boldsymbol{A}_{i_m}\mid\boldsymbol{B}\rangle$,导致 $\mathscr{C}\supsetneqq\sum_{i=1}^{N}\langle\boldsymbol{A}_i\mid\boldsymbol{B}\rangle=\mathscr{W}_1$,即 $\exists\boldsymbol{x}\in\mathscr{C},\boldsymbol{x}\notin\mathscr{W}_1$,因此 $\mathscr{W}_1=\mathbf{R}^n$ 是系统(8)能控的充分而不必要条件.命题2只对2阶系统(8)成立,而文献[6]中作为例证的Boost变换器恰好是2阶系统,因此造成了命题2为真的假象.

3 反例说明

以1个 $n=3,N=2$ 的系统(8)实例验证上节的论断.

考虑SLS:$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t), i=1,2$,其中

$$\boldsymbol{A}_1=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix},\boldsymbol{A}_2=\begin{bmatrix}r_1&&\\&r_2&\\&&r_3\end{bmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$\mathscr{W}_1=\langle\boldsymbol{A}_1\mid\boldsymbol{B}\rangle+\langle\boldsymbol{A}_2\mid\boldsymbol{B}\rangle=\operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\right\}=\mathbf{R}^2$$

$$\mathscr{W}_2=\langle\boldsymbol{A}_1\mid\mathscr{W}_1\rangle+\langle\boldsymbol{A}_2\mid\mathscr{W}_1\rangle=\operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}r_1\\r_2\\r_3\end{bmatrix}\right\}$$

只要 $r_2\neq r_3$,就有 $\mathscr{W}_3\supseteq\mathscr{W}_2=\mathbf{R}^3$,故 $\mathscr{W}_3=\mathbf{R}^3$,根据定理2,该系统是能控的.

命题2为假得证.

4 结论

一类切换线性系统具有不同的系统矩阵 $\boldsymbol{A}_i$ 和相同的输入矩阵 $\boldsymbol{B}$.文献[6]导出其能控的必要充分条件为 $\sum_{i=1}^{N}\langle\boldsymbol{A}_i\mid\boldsymbol{B}\rangle=\mathbf{R}^n$.该结论的充分性是显而易见的,为此本文重点论证其必要性不一定成立.理论分析发现该判据

① 适用于2阶系统;

② 对3阶及以上系统,第一不变子空间 $\sum_{i=1}^{N}\langle\boldsymbol{A}_i\mid\boldsymbol{B}\rangle$ 是能控集 $\mathscr{C}$ 的真子集,因此

$$\sum_{i=1}^{N}\langle\boldsymbol{A}_i\mid\boldsymbol{B}\rangle\neq\mathbf{R}^n\nRightarrow\mathscr{C}\neq\mathbf{R}^n$$

由于文献[6]所举Boost变换器为2阶系统,因此造成了其错误结论可以被实例验证的假象.最后通过1个3阶双模态的切换系统实例验证了理论分析的结果.

参考文献:

[1] CHENG Daizhan, QIAO Yupeng. Controllability of switched linear systems[C]// 26th Chinese Control Conference. New York: IEEE Press, 2007: 128-131.

[2] JI Zhijian, WANG Long, GUO Xiaoxia. On controllability of switched linear systems[J]. IEEE Trans Automat Contr, 2008, 53(3): 796.

[3] SUN Z, GE S S, LEE T H. Controllability and reachability criteria for switched linear systems[J]. Automatica, 2002, 38(5): 775.

[4] XIE Guangming, WANG Long. Necessary and sufficient conditions for controllability of switched linear systems[C]// American Control Conference. New York: IEEE Press, 2002: 1897-1902.

[5] 谢广明,郑大钟.一类线性切换系统能控性和能达性的充要条件[J].控制与决策,2001,16(2):248.
XIE Guangming, ZHENG Dazhong. Sufficient and necessary condition of controllability and reachability of a class of linear switching systems[J]. Control and Decision, 2001, 16(2): 248.

[6] 胡宗波,张波,邓卫华.输入矩阵定常的切换线性系统的能控性和能达性[J].华南理工大学学报:自然科学版,2004,32(6):14.
HU Zongbo, ZHANG Bo, DENG Weihua. Controllability and reachability of a class of linear switched systems with the same input matrix[J]. Journal of South China University of Technology: Natural Science Edition, 2004, 32(6): 14.

[7] XIE Guangming, ZHENG Dazhong, WANG Long. Controllability of switched linear systems[J]. IEEE Trans Automat Contr, 2002, 47(8): 1401.

[8] SUN Zhendong, ZHENG Dazhong. On reachability and stabilization of switched linear systems[J]. IEEE Trans Automat Contr, 2001, 46(2): 291.