

增设广义位移下箱梁剪力滞效应的变分法

耿少波, 石雪飞, 阮 欣, 王晓明

(同济大学 桥梁工程系, 上海 200092)

摘要: 考虑荷载横向移动时顶板、底板剪力滞效应的不同, 及腹板剪力在剪切变形中做功效应的影响, 根据以往学者得出的试验效果良好的三次抛物线型, 分设不同的纵向位移函数, 取 4 个独立的广义位移对箱梁的剪力滞效应进行分析. 由最小势能原理, 建立关于不同位移的微分方程及自然边界条件. 公式演引过程表明, 剪力滞效应与腹板剪切效应独立存在; 求解结果表明, 所演引的公式更符合实际结构应力及位移分布情况, 具有较高的实用价值.

关键词: 箱梁; 变分法; 剪切变形; 剪力滞效应; 广义位移
中图分类号: U 448.21 **文献标识码:** A

Variational Method of Shear Lag Effect of Box Beams with Adding Generalized Displacement Assumptions

GENG Shaobo, SHI Xuefei, RUAN Xin, WANG Xiaoming
(Department of Bridge Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, China)

Abstract: The top plate and bottom plate of box beams behave different shear lag effects when the symmetric load moves along the cross section. The web shear's work on the shearing deformation is taken. Based on the previous research and conclusion on the shear lag effect experiment, cubic parabola displacement function is adopted. Considering the top and bottom plate's different longitudinal displacements, four independent generalized displacements are taken to analysis the shear lag of box beams. Based on the principle of minimum potential energy, displacement differential equations and natural boundary conditions are formed respectively. Formula derivation process shows that shear lag effect and web shear deformation work independently. The computation results indicate that the derivation formulas can improve calculation accuracy.

Key words: box beams; variational method; shear deformation; shear lag effect; generalized displacements

箱梁由于其强抗扭、轻自重、易施工等优点在桥梁结构中得到广泛应用, 但由于翼板剪切变形的影响, 产生的剪力滞效应是桥梁设计中不容忽视的问题. 许多学者对剪力滞相关理论做了研究, 并取得了一些有益的成果^[1-8]. 关于剪力滞效应的分析方法有许多种, 如比拟杆法、变分法、有限梁段等. 基于最小势能原理的变分法由于其力学概念清晰、演引过程简便且是有限元方法的基础, 成为求解剪力滞效应的一种重要方法. 迄今已有不少相关文献采用变分法得出解析解, 如文献[1]最早采用能量变分法分析了具有双轴对称箱梁的剪滞效应, 文献[2]分析了带悬臂板的矩形箱梁的剪滞效应, 文献[3]采用变分原理和有限元法分析了不同梁桥的剪力滞效应, 文献[5]分析了负剪力滞效应, 并对剪力滞效应做了系统总结. 这些研究大多采用两个广义位移, 考虑对称荷载作用在腹板与顶板处且忽略腹板剪切效应来处理, 数值精确度与实际应力分布存在一定的误差, 广义位移数目假设较少, 不能有效说明腹板剪切效应的影响作用, 同时由于顶、底板受力条件不同, 其剪力滞效应也不应以单一的广义位移表示^[6]. 顶板、底板最大位移差函数宜采用与试验效果吻合较好的三次抛物线型^[5].

本文是在文献[1-8]的基础上, 增加腹板剪切变形, 仍假设翼板纵向位移在横向分布上可分离, 采用三次抛物线型^[5], 同时分设顶板、底板不同位移函数, 即取 4 个独立的广义位移 $\psi(x, y)$, $\omega'(x, y)$, $u_1(x, y)$, $u_2(x, y)$, 对薄壁箱梁的剪力滞进行变分法分析, 研究和演引了广义位移的微分方程及相应的自然边界条件, 揭示了剪力滞效应与腹板剪切变形彼此独立互不相关的规律, 得到了对称荷载作用在顶板任意位置时箱梁的应力变化规律, 并结合有限元软件做了相关对比分析, 说明了公式的实用价值.

收稿日期: 2009-03-23

基金项目: 国家“八六三”高技术研究发展计划资助项目(2007AA11Z103); 山东省交通科技资助项目(2007Y24)

作者简介: 耿少波(1982—), 男, 博士生, 主要研究方向为桥梁结构性能评估. E-mail: gsbyyvv@gmail.com

石雪飞(1964—), 男, 教授, 博士生导师, 工学博士, 主要研究方向为桥梁结构理论及桥梁结构可靠度.

E-mail: shixf@tongji.edu.cn.

1 体系势能建立

以图1所示典型箱梁截面为例建立势能基本方程.

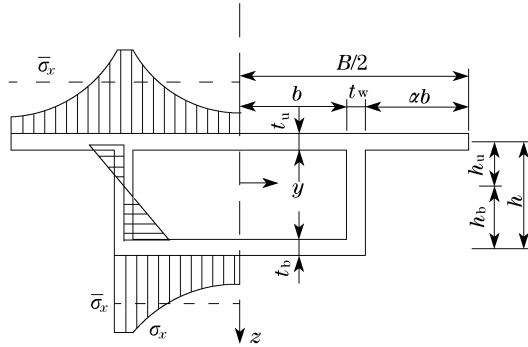


图1 典型箱梁尺寸及应力分布

Fig.1 Typical cross section and bending stress of box beam

引入广义位移 $\omega'(x, y)$ 后, 设顶板、底板位移不同, 则其纵向位移可表示为

$$U_1(x, y, \zeta) = h_u \left[\omega'(x, \zeta) - \gamma(x, \zeta) + \left(1 - \frac{y^3}{b^3}\right) u_1(x, \zeta) \right] \quad (1)$$

$$U_2(x, y, \zeta) = h_b \left[\omega'(x, \zeta) - \gamma(x, \zeta) + \left(1 - \frac{y^3}{b^3}\right) u_2(x, \zeta) \right] \quad (2)$$

式中: $\omega(x, \zeta)$ 为腹板的竖向位移; $\gamma(x, \zeta)$ 为腹板的剪切变形; $u_1(x, \zeta)$, $u_2(x, \zeta)$ 分别为顶板与底板不同的纵向位移差函数; b 为箱室顶板净宽的一半; h_u , h_b 分别为截面形心轴到顶板、底板中面的距离.

假设变形后翼板横截面仍与纵向纤维垂直, 建立竖向位移与纵向位移的关系

$$U_1(x, y, \zeta) = h_u \frac{\partial V_1(x, y, \zeta)}{\partial x} \quad (3)$$

$$U_2(x, y, \zeta) = h_b \frac{\partial V_2(x, y, \zeta)}{\partial x} \quad (4)$$

积分后便可得翼板的纵向位移

$$V_1(x, y, \zeta) = \omega(x, \zeta) - \int \gamma(x, \zeta) dx + \left(1 - \frac{y^3}{b^3}\right) \int u_1(x, \zeta) dx + C_1(y, \zeta) \quad (5)$$

$$V_2(x, y, \zeta) = \omega(x, \zeta) - \int \gamma(x, \zeta) dx + \left(1 - \frac{y^3}{b^3}\right) \int u_2(x, \zeta) dx + C_2(y, \zeta) \quad (6)$$

为求解公式(5), (6)中的 $C_1(y, \zeta)$, $C_2(y, \zeta)$, 由 $y = b$ 时 $V_1(x, y, \zeta) = V_2(x, y, \zeta)$, 可得 $C_1(y, \zeta) = C_2(y, \zeta) = 0$, 即为

$$V_1(x, y, \zeta) = \omega(x) - \int \gamma(x) dx + \left(1 - \frac{y^3}{b^3}\right) v_1(x, \zeta) \quad (7)$$

$$V_2(x, y, \zeta) = \omega(x) - \int \gamma(x) dx + \left(1 - \frac{y^3}{b^3}\right) v_2(x, \zeta) \quad (8)$$

且 $\int u_1(x, \zeta) dx = v_1(x, \zeta)$, $\int u_2(x, \zeta) dx = v_2(x, \zeta)$.

令 $\phi(x, \zeta) = \omega'(x, \zeta) - \gamma(x, \zeta)$, 当横向荷载在顶板移动至任一位置 $y = \zeta$, 计算外荷载势能 Π_p 时考虑剪力在剪切变形上做功, 则图1所示坐标系中的梁势能为

$$\Pi_p = - \left(\int_{x_1}^{x_2} p(x) V_1(x, y, \zeta) dx + \int_{x_1}^{x_2} Q(x) \gamma(x, \zeta) dx \right) \quad (9)$$

则腹板的应变能为

$$\Pi_w = \frac{1}{2} \int_{x_1}^{x_2} EI_w (\phi')^2 dx + \frac{1}{2} \int_{x_1}^{x_2} GA_s \gamma^2 dx \quad (10)$$

顶板的应变能为

$$\Pi_u = 2 \times \frac{1}{2} \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} t_u (E \epsilon_{xu}^2 + G \gamma_u^2) dy dx \quad (11)$$

底板的应变能为

$$\Pi_b = 2 \times \frac{1}{2} \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} t_b (E \epsilon_{xb}^2 + G \gamma_b^2) dy dx \quad (12)$$

其中,

$$\epsilon_{xu} = \frac{\partial U_1(x, y, \zeta)}{\partial x} \quad \gamma_u = \frac{\partial U_1(x, y, \zeta)}{\partial y} \quad \epsilon_{xb} = \frac{\partial U_2(x, y, \zeta)}{\partial x} \quad \gamma_b = \frac{\partial U_2(x, y, \zeta)}{\partial y} \quad (13)$$

代入各表达式后可得

$$\Pi_u = \frac{1}{2} \int_{x_1}^{x_2} EI_u \left[\phi'^2 + \frac{3}{2} \phi' u_1' + \frac{9}{14} u_1'^2 \right] dx + \frac{1}{2} \int_{x_1}^{x_2} GI_u \frac{9}{5b^2} u_1^2 dx \quad (14)$$

$$\Pi_b = \frac{1}{2} \int_{x_1}^{x_2} EI_b \left[\phi'^2 + \frac{3}{2} \phi' u_2' + \frac{9}{14} u_2'^2 \right] dx + \frac{1}{2} \int_{x_1}^{x_2} GI_b \frac{9}{5b^2} u_2^2 dx \quad (15)$$

则体系总势能为

$$\begin{aligned}
\Pi = & \Pi_p + \Pi_w + \Pi_u + \Pi_b = \\
& \int_{x_1}^{x_2} p(x) V_1(x, \zeta) dx + \int_{x_1}^{x_2} Q(x) \gamma(x, \zeta) dx + \\
& \frac{1}{2} \int_{x_1}^{x_2} EI_w \psi'^2 dx + \frac{1}{2} \int_{x_1}^{x_2} GA_s \gamma^2 dx + \\
& \frac{1}{2} \int_{x_1}^{x_2} EI_u \left[\psi'^2 + \frac{3}{2} \psi' u'_1 + \frac{9}{14} u_1'^2 \right] dx + \\
& \frac{1}{2} \int_{x_1}^{x_2} EI_b \left[\psi'^2 + \frac{3}{2} \psi' u'_2 + \frac{9}{14} u_2'^2 \right] dx + \\
& \frac{1}{2} \int_{x_1}^{x_2} GI_u \frac{9}{5b^2} u_1^2 dx + \frac{1}{2} \int_{x_1}^{x_2} GI_b \frac{9}{5b^2} u_2^2 dx \quad (16)
\end{aligned}$$

式中: E 为弹性模量; G 为剪切模量; $Q(x)$ 为剪力分布; $p(x)$ 为作用在梁体的外力; I_w, I_u, I_b 分别为腹板、顶板、底板对中性轴的惯性矩; A_s 为腹板的有效剪切面积.

2 基本微分方程建立

根据最小势能原理, 即 $\delta\Pi = 0$, 对式(16)取变分, 由于弯矩求导后为剪力, 即 $M'(x) = Q(x)$, 则可得控制微分方程及自然边界条件

$$EI_u \left(-\frac{9}{14} u_1'' - \frac{3}{4} \psi'' + \frac{9Gu_1}{5Eb^2} \right) - Q \left(1 - \frac{\zeta^3}{b^3} \right) = 0 \quad (17)$$

$$EI_b \left(-\frac{9}{14} u_2'' - \frac{3}{4} \psi'' + \frac{9Gu_2}{5Eb^2} \right) = 0 \quad (18)$$

$$M + EI\psi' + \frac{3}{4} EI_u u_1' + \frac{3}{4} EI_b u_2' = 0 \quad (19)$$

$$GA_s \gamma - Q = 0 \quad (20)$$

$$\left[\frac{9}{14} EI_u u_1' + \frac{3}{4} EI_u \psi' \right] \delta u_1 \Big|_{x_1}^{x_2} = 0 \quad (21)$$

$$\left[\frac{9}{14} EI_b u_2' + \frac{3}{4} EI_b \psi' \right] \delta u_2 \Big|_{x_1}^{x_2} = 0 \quad (22)$$

式(17)减式(18)可得

$$(u_1 - u_2)'' - \frac{14G}{5Eb^2} (u_1 - u_2) = -\frac{14}{9} \frac{Q}{EI_u} \left(1 - \frac{\zeta^3}{b^3} \right) \quad (23)$$

令 $k_0 = \frac{1}{b} \sqrt{\frac{14G}{5E}}$, $U = u_1 - u_2$, 则式(23)变为一元二次常微分方程, 可根据结构参数求解.

联立(17), (19), (23)可求出 u_1 的微分方程

$$\begin{aligned}
u_1'' - k^2 u_1 = & \frac{7}{6} \frac{Qn}{EI} \left\{ \left[1 - \frac{4I}{3I_u} \left(1 - \frac{\zeta^3}{b^3} \right) \right] \cdot \right. \\
& \left. \left(1 - \frac{7}{8} \frac{I_b}{I} \right) + \frac{7}{8} \frac{I_b}{I} \right\} - \frac{7}{8} \frac{I_b}{I} k^2 U \quad (24)
\end{aligned}$$

$$\text{其中, } n = \frac{1}{1 - \frac{7}{8} \left(\frac{I_u + I_b}{I} \right)}, k^2 = \frac{14Gn}{5Eb^2} = k_0^2 n.$$

由于 U 已求出, 为已知函数, 代入后可求出 u_1 , 且可求出 u_2 的表达式及其导数.

3 剪力滞系数的确定

剪力滞系数 λ 定义为: 考虑剪力滞后箱梁任意截面的计算应力与按初等梁理论计算的应力之比. 如果翼板与腹板交界处的法向应力大于初等梁理论计算值, 则为正剪力滞, 反之, 为负剪力滞. 当在弹性范围内考查剪力滞效应时, 采用胡克定律, 结合公式(1)、(2)及(19)可得出顶板、底板正应力分布的剪力滞系数表达式

$$\begin{cases} \lambda_u = 1 - \frac{EI}{M(x)} \left(1 - \frac{y^3}{b^3} - \frac{3}{4} \frac{I_u}{I} \right) u_1' + \\ \frac{EI}{M(x)} \frac{3}{4} \frac{I_b}{I} u_2' \\ \lambda_b = 1 - \frac{EI}{M(x)} \left(1 - \frac{y^3}{b^3} - \frac{3}{4} \frac{I_b}{I} \right) u_2' + \\ \frac{EI}{M(x)} \frac{3}{4} \frac{I_u}{I} u_1' \end{cases} \quad (25)$$

由方程建立及求解可知, 尽管在变形分析时考虑了剪切影响, 但剪切影响在求应力演引过程中消失, 即剪力滞效应与剪切变形独立, 互不影响.

4 简支梁均布荷载下的演引

为了说明具体求解过程, 以均布荷载作用下简支梁的剪力滞效应计算为例, 其他不同荷载作用下的梁体求解思路完全相同. 均布荷载从横截面顶面中间逐渐移动至腹板处.

由 u_1, u_2 联合方程(23)及 $Q(x) = 0.5q(l - 2x)$, 可得如下微分方程:

$$\begin{aligned}
(u_1 - u_2)'' - \frac{14G}{5Eb^2} (u_1 - u_2) = \\
- \frac{14}{9} \frac{1}{EI_u} \frac{q}{2} (l - 2x) \left(1 - \frac{\zeta^3}{b^3} \right) \quad (26)
\end{aligned}$$

通解加特解形式如下:

$$\begin{aligned}
U = (u_1 - u_2) = & \frac{14}{9} \frac{1}{EI_u} \frac{q}{k_0^2} \frac{q}{2} (l - 2x) \cdot \\
& \left(1 - \frac{\zeta^3}{b^3} \right) + C_1 \text{sh}(k_0 x) + C_2 \text{ch}(k_0 x) \quad (27)
\end{aligned}$$

代入边界条件 $(u_1 - u_2)'|_{x=0} = 0, (u_1 - u_2)'|_{x=l} = 0$
可求解表达式中的系数

$$\begin{cases} C_1 = \frac{14}{9} \frac{q}{EI_u k_0^3} \left(1 - \frac{\zeta^3}{b^3}\right) \\ C_2 = \frac{14}{9} \frac{q}{EI_u k_0^3} \left(1 - \frac{\zeta^3}{b^3}\right) \frac{1 - \text{ch}(k_0 l)}{\text{sh}(k_0 l)} \end{cases} \quad (28)$$

即表达式显化为

$$U = (u_1 - u_2) = \frac{14}{9} \frac{q}{EI_u k_0^3} \left(1 - \frac{\zeta^3}{b^3}\right) \cdot \left[\frac{(l - 2x)k_0}{2} + \text{sh}(k_0 x) + \frac{1 - \text{ch}(k_0 l)}{\text{sh}(k_0 l)} \text{ch}(k_0 x) \right] \quad (29)$$

代入公式(24)后为

$$u_1'' - k^2 u_1 = \frac{7}{6} \frac{Qn}{EI} \left[e \left(1 - \frac{7}{8} \frac{I_b}{I}\right) + \frac{7}{8} \frac{I_b}{I} \right] - \left(\frac{7}{8} \frac{I_b}{I} k^2 \times \frac{14}{9} \frac{q}{EI_u k_0^3} \right) \left(1 - \frac{\zeta^3}{b^3}\right) \cdot \left[\frac{(l - 2x)k_0}{2} + \text{sh}(k_0 x) + \frac{1 - \text{ch}(k_0 l)}{\text{sh}(k_0 l)} \text{ch}(k_0 x) \right] \quad (30)$$

式中: $e = 1 - \frac{4I}{3I_u} \left(1 - \frac{\zeta^3}{b^3}\right)$.

则 u_1 的总解为

$$u_1 = \frac{7}{6} \frac{Qn}{EI} \left[-e \frac{(l - 2x)}{2k^2} - \frac{7}{6} \frac{I_b(1 - \zeta^3/b^3)}{I_u k_0(k_0^2 - k^2)} \cdot \left(\text{sh}(k_0 x) + \frac{1 - \text{ch}(k_0 l)}{\text{sh}(k_0 l)} \text{ch}(k_0 x) \right) + C_3 \text{sh}(kx) + C_4 \text{ch}(kx) \right] \quad (31)$$

由边界条件 $u_1'|_{x=0} = 0, u_1'|_{x=l} = 0$ 求解后为

$$u_1' = \frac{7}{6} \frac{q}{EI k_0^2} \left[e - \frac{7I_b(1 - \zeta^3/b^3)k^2}{6I_u(k_0^2 - k^2)} \left(\text{ch}(k_0 x) + \frac{1 - \text{ch}(k_0 l)}{\text{sh}(k_0 l)} \text{sh}(k_0 x) \right) + \left(\frac{7I_b(1 - \zeta^3/b^3)k^2}{6I_u(k_0^2 - k^2)} - e \right) \text{ch}(kx) + \left(e - \frac{7I_b(1 - \zeta^3/b^3)k^2}{6I_u(k_0^2 - k^2)} \right) \frac{\text{ch}(kl) - 1}{\text{sh}(kl)} \text{sh}(kx) \right] \quad (32)$$

由 $u_2 = u_1 - U$, 即可快速求出 u_2 及 u_2' .

$$u_2' = \frac{7}{6} \frac{q}{EI k_0^2} \left[1 + \left(\frac{7I_b(1 - \zeta^3/b^3)k^2}{6I_u(k_0^2 - k^2)} - e \right) \text{ch}(kx) - \left(\frac{7I_b(1 - \zeta^3/b^3)k^2}{6I_u(k_0^2 - k^2)} + 1 - e \right) \left(\text{ch}(k_0 x) + \frac{1 - \text{ch}(k_0 l)}{\text{sh}(k_0 l)} \text{sh}(k_0 x) \right) \right]$$

$$\frac{1 - \text{ch}(k_0 l)}{\text{sh}(k_0 l)} \text{sh}(k_0 x) \left) + \left(e - \frac{7I_b(1 - \zeta^3/b^3)k^2}{6I_u(k_0^2 - k^2)} \right) \cdot \frac{\text{ch}(kl) - 1}{\text{sh}(kl)} \text{sh}(kx) \right] \quad (33)$$

当 $\zeta = b$, 即当荷载对称移动到腹板和顶板接触位置时, 则

$$u_1' = u_2' = \frac{7}{6} \frac{q}{EI} \frac{1}{k_0^2} \left[1 - \text{ch}(kx) + \frac{\text{ch}(kl) - 1}{\text{sh}(kl)} \text{sh}(kx) \right] \quad (34)$$

与文献[8]公式(3-33)完全相同.

5 结果对比分析

验证算例参数为: $L = 20$ m, $H_u = H_b = 0.8$ m, $b = 2.0$ m, $I_s/I = I_b/I = 0.413$, $E = 31.5$ GPa, $G/E = 0.43$, $q = 500$ N · m⁻¹ 对称分布. 本文采用 ANSYS 中 89 600 个 SOLID45 单元、112 560 个节点的混凝土简支箱梁模型作为对比分析. 实体单元类型模型划分单元很小时, 其数值解会逐渐逼近真实解, 故可进行结果对比分析. 以跨中截面作为分析要素, 说明分析思路.

由计算结果对比可知, 对称均布荷载在顶板横截面中心时, 顶板均为负剪力滞现象, 文献[5]的结果与 ANSYS 计算结果吻合良好, 本文计算结果离散程度较大, 见图 2; 当荷载移动至腹板时, 文献[5]结果显示跨中截面顶板基本没有剪力滞效应, 而本文和 ANSYS 结果略有不同, 呈现出轻微的正剪力滞现象, 见图 3.

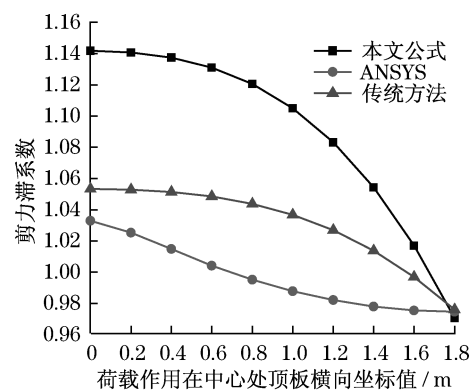


图 2 对称均布荷载移动至中心处跨中截面顶板剪力滞系数
Fig.2 Shear lag coefficient of top plate at middle span of simply supported beam under symmetrical uniform center load

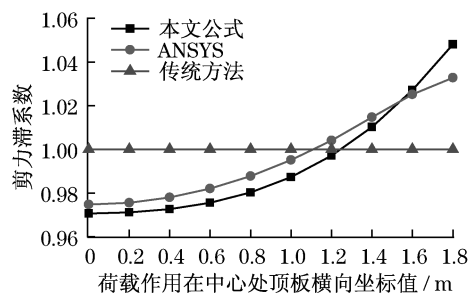


图3 对称均布荷载移动至腹板处跨中截面顶板剪力滞系数

Fig.3 Shear lag coefficient of top plate at middle span of simply supported beam under symmetrical uniform edge load

当对称荷载在顶板横截面中心时,由 ANSYS 和本文结果,底板为正剪力滞现象,文献[5]的计算结果为负剪力滞,相对误差较大,见图4;当荷载移动至腹板时,本文和 ANSYS 显示底板为正剪力滞,文献[5]显示规律不明显,见图5。

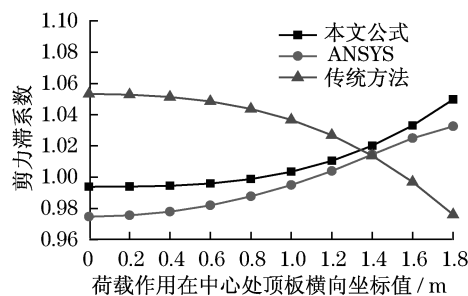


图4 对称均布荷载移动至中心处跨中底板剪力滞系数

Fig.4 Shear lag coefficient of bottom plate at middle span of simply supported beam under symmetrical uniform center load

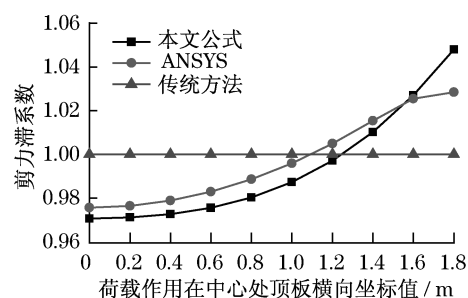


图5 对称均布荷载移动至腹板处跨中截面底板剪力滞系数

Fig.5 Shear lag coefficient of bottom plate at middle span of simply supported beam under symmetrical uniform edge load

文献[5]假设顶板与底板剪力滞变化规律相同,为一个相同的广义位移函数.从计算结果可知,这样的假设使得部分变化规律与 ANSYS 及本文计算结果不一致,部分相对误差增大。

6 其他结构类型剪力滞分析方法

对于其他桥型,如悬臂梁结构代入相应的边界条件即可得到类似解答;连续梁可以在简支梁基础上,采用叠加法或分支法进行;利用本文所演引的公式构成新的单元刚度矩阵后,可采用有限梁段法对刚构桥和斜拉桥等高次超静定结构进行有限元数值分析。

7 结语

增加剪切变形广义位移后,结构应力计算结果与传统方法计算结果存在一定差异,算例表明整体上本文演引公式与实体模型计算结果更为接近且相对误差较小.同时可将该位移函数变化后形成有限单元刚度矩阵,适用更为复杂的高次超静定数值分析。

本文所涉及的内容为增加广义位移情况下的应力计算,并未对位移进行详细介绍,位移计算可通过对广义位移 $\psi(x, y)$ 进行一次积分后得到.剪力滞效应的误差与广义位移假设的准确性及考虑因素的全面性是否有关,还需进一步深入研究。

参考文献:

- [1] Reissner E. Analysis of shear lag in box beams by the principle of minimum potential energy[J]. Q Appl Math, 1946, 6(3): 268.
- [2] 郭金琼, 房贞政, 罗孝登. 箱形梁桥剪力滞效应分析[J]. 土木工程学报, 1983, 16(1): 1.
GUO Jinqiong, FANG Zhenzheng, LUO Xiaodeng. Analysis of shear lag effect in box girder bridges[J]. China Civil Engineering Journal, 1983, 16(1): 1.
- [3] Luo Q Z, Li Q S, Tang J. Shear lag in box girder bridges[J]. Journal of Bridge Engineering, ASCE, 2002, 7(5): 308.
- [4] Chang S T. Shear lag effect in simply supported prestressed concrete box girder[J]. Journal of Bridge Engineering, ASCE, 2004, 9(2): 178.
- [5] 张士铎, 邓小华, 王文州. 箱形薄壁梁剪力滞效应[M]. 北京: 人民交通出版社, 1998.
ZHANG Shiduo, DENG Xiaohua, WANG Wenzhou. Shear lag effect in box girders[M]. Beijing: China Communications Press, 1998.
- [6] 吴亚平, 杨玫, 周大为, 等. 荷载横向变位下箱梁顶板与底板的剪力滞效应分析[J]. 土木工程学报, 2007, 40(10): 8.
WU Yaping, YANG Mei, ZHOU Dawei, et al. Analyses of the shear lag effect on the top and bottom plates of box beams with varying loading locations[J]. China Civil Engineering Journal, 2007, 40(10): 8.
- [7] 程翔云. 梁桥理论与计算[M]. 北京: 人民交通出版社, 1998.
CHENG Xiangyun. Theory and calculus for beam bridges[M]. Beijing: China Communications Press, 1998.
- [8] 项海帆. 高等桥梁结构理论[M]. 北京: 人民交通出版社, 2001.
XIANG Haifan. Higher bridge structure theory [M]. Beijing: China Communications Press, 2001.