

# 求解双线性单自由度复合随机系统

范么清<sup>1,2</sup>, 楼梦麟<sup>1</sup>

(1. 同济大学 土木工程防灾国家重点实验室, 上海 200092; 2. 上海筑紫建筑工程设计咨询有限公司, 上海 200086)

**摘要:** 在单自由度线性复合随机系统研究及 Monte Carlo 法模拟的基础上, 引入求解随机问题的非线性改进随机摄动法, 将双线性单自由度随机结构看成是均值结构及其变分, 假定反应的概率分布类型为正态分布或均匀分布, 从而将双线性复合随机微分方程展开为线性摄动随机微分方程, 然后与虚拟激励法结合, 迭代求解随机反应. 算例的计算结果表明, 将非线性改进随机摄动法与虚拟激励法结合, 所得的非线性复合随机振动系统的随机反应还是较为准确的. 为取得更精确的计算结果, 反应的概率分布类型的正确选择很重要.

**关键词:** 非线性改进随机摄动法; 双线性随机结构; 非线性复合随机振动

中图分类号: O 327

文献标识码: A

## Solution to Bi-linear SDOF Compound Stochastic Vibration

FAN Yaoqing<sup>1,2</sup>, LOU Menglin<sup>1</sup>

(1. State Key Laboratory of Disaster Reduction in Civil Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, China; 2. Shanghai Zhuji Architecture Engineering Design and Consultation Co., Ltd., Shanghai 200086, China)

**Abstract:** Based on the research of linear SDOF compound stochastic vibration and Monte Carlo simulation, non-linear improved stochastic perturbation method is adopted to solve single stochastic problem, and bi-linear SDOF stochastic structure is expanded to mean part and variation part. Then, the probability distribution type of stochastic response is assumed as normal distribution or uniform distribution. As a result, bi-linear compound stochastic differential equation is expanded to linear perturbation stochastic differential equations. Stochastic response is obtained with the pseudo excitation method and iteration. A case study shows that the combination of non-linear improved stochastic perturbation method with pseudo excitation method can get relatively accurate result of stochastic response of non-linear compound

stochastic vibration system. For more accurate results, precise pre-estimate of the probability distribution type of stochastic response is very important.

**Key words:** non-linear improved stochastic perturbation method; bi-linear stochastic structure; non-linear compound stochastic vibration

非线性随机振动的分析方法有精确解析法、实用近似法和数值模拟法. 数值模拟法以 Monte Carlo 法为代表.

从工程应用的角度来看, 各种实用近似方法主要有等效线性化法<sup>[1-6]</sup>、随机有限元法<sup>[7-8]</sup>、构造 Markov 状态方程求解法<sup>[9]</sup>、半隐式积分法<sup>[10]</sup>、改进摄动法<sup>[11]</sup>等. 其中, 等效线性化法使用较多.

王国砚<sup>[1]</sup>提到两种等效线性化方法: 方程差法和能量差法. M Grigoriu<sup>[12]</sup>用等效线性化法研究了由 Levy 白噪声引起的随机系统的随机响应. S. H Crandall<sup>[4]</sup>仔细研究了等效线性化方程差解法的两种程序. Andrew W. Smyth 和 Sami F. Masri<sup>[5]</sup>用等效线性化方法计算非平稳地震作用下线弹性弹簧系统的随机响应. Wing Kam Liu 等用随机有限元法<sup>[8]</sup>研究了内力为位移、速度、单元尺寸的非线性函数的非线性随机结构的求解方法. R. C. Micaletti<sup>[9]</sup>提出采用构造 Markov 状态方程求解随机反应. Yasuki Ohtori<sup>[9]</sup>提出采用半隐式积分法求解随机激励下有附加滞后阻尼的非线性结构的随机地震反应.

Nicola Impollonia 等<sup>[11]</sup>提出一种改进的摄动法, 将随机量(包括随机质量、随机内力——阻尼力和回复力)分解成均值部分和变分部分, 求解非线性随机结构的随机反应.

等效线性化法的等效方法很多, 多用于非线性确定结构的随机反应求解. 对于非线性复合随机系

收稿日期: 2009-04-22

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(90915011)

作者简介: 范么清(1971—), 男, 工程师, 工学博士, 主要研究方向为随机振动. E-mail: fanyaoqing4@126.com

楼梦麟(1947—), 男, 教授, 博士生导师, 主要研究方向为工程结构抗震、土-结构相互作用. E-mail: lml@mail.tongji.edu.cn

统,应用的不多.但非线性确定结构的随机反应求解方法仍然给复合随机系统的求解方法提供很多启发:首先,等效线性系统的等效参数与原非线性系统反应独立,这给等效参数的求解带来很多方便,按这种等效原则得到的随机反应具有一定的精确度;第二,在非线性很复杂的情况下,可以将阻尼项与恢复力项分别等效以便求解等效参数;第三,在假定非线性复合随机振动系统的反应概率分布类型时,不妨考虑反应概率分布类型为正态分布或均匀分布.

随机有限元法不涉及随机变量单独出现的式子,且方程右边荷载项已为确定性荷载,故能否转变为复合随机振动求解,似乎很困难.构造 Markov 状态方程的方法,是典型的复合随机微分方程的求解方法,但要求把通常给定随机激励的功率谱转变成白噪声过程的形式.半隐式积分法和构造 Markov 状态方程求解法类似,如能熟练掌握由随机激励的功率谱转换为白噪声驱动的随机荷载,则也可利用构造 Markov 状态方程的方法直接求解非线性复合随机系统的反应.由改进摄动法的解题过程知,结构体系的反应可表示为关于独立随机变量的线性组合形式,如将激励表示为虚拟激励,就可采用改进摄动法求解非线性复合随机系统的随机反应.

虚拟激励法是林家浩 1985 年提出的,以计算随机荷载作用确定结构的随机反应<sup>[13]</sup>.虚拟激励法将线性结构的平稳随机反应功率谱分析转化为确定性的简谐反应分析.若设外部激励的功率谱为  $S_{FF}(\omega)$ ,可以将虚拟激励法的原理表述如下:

$$\begin{aligned} S_{FF}(\omega) &\rightarrow \boxed{H(\omega)} \rightarrow S_{yy} = |H|^2 S_{FF}(\omega) \\ F(t) = e^{i\omega t} &\rightarrow \boxed{H(\omega)} \rightarrow y = He^{i\omega t} \\ \tilde{F}(t) = \sqrt{S_{FF}(\omega)} e^{i\omega t} &\rightarrow \boxed{H(\omega)} \rightarrow \tilde{y} = \sqrt{S_{FF}(\omega)} He^{i\omega t} \end{aligned}$$

其中:  $|H|$  表示传递函数的模;  $F(t)$  和  $\tilde{F}(t)$  为简谐虚拟激励,经过结构传递,得到虚拟反应  $y$  和  $\tilde{y}$  且虚拟反应与其共轭的积即为随机反应的功率谱,通过功率谱可以进一步求得随机系统的方差反应.虚拟激励法已逐步用于求解非平稳激励和非线性的随机系统的随机反应.

由上述虚拟反应的表达式可知,虚拟反应是时域和频域上的复数变量.文献[14]正是利用这一特点来直接消除 1 阶随机反应的久期项.如果要完整地表述,显然要利用复数空间;如果要在实数空间中观察到虚拟反应,自然想到用复数的模.本研究仅仅关心结构的自振频率附近的虚拟反应,因此,取  $\omega$  为

结构自振频率时虚拟反应模的时程.

在上述分析的基础上,引入非线性改进随机摄动法,将双线性随机结构离散为均值部分和变分部分,并把随机激励按虚拟激励法展开,试着求解双线性随机结构在随机激励下的随机反应.

### 1 用非线性改进随机摄动法展开双线性随机结构

考虑一个单自由度双线性复合随机振动系统(图 1)

$$m_{ns} \ddot{y}(t) + c_{ns} \dot{y}(t) + f_{ns}(\alpha_2, y(t)) = -m_{ns} \ddot{x}_{gs}(t) \tag{1}$$

式中

$$m_{ns} = m_0 + \sigma_m \alpha_1 \tag{2}$$

$$f_{ns}(\alpha_2, y) = \begin{cases} k_1 y, & |y| \leq y_c \\ k_2 y + (k_1 - k_2) y_c \text{sign}(y), & |y| > y_c \end{cases} \tag{3}$$

$$c_{ns} = 2\xi \sqrt{m_{ns} k_1} \tag{4}$$

$$k_1 = k_0 + \sigma_k \alpha_2 \tag{5}$$

$$\sigma_m = R_\rho m_0 \tag{6}$$

$$\sigma_k = R_E k_0 \tag{7}$$

$$\text{sign}(y) = \begin{cases} +1, & y \geq 1 \\ -1, & y < 1 \end{cases} \tag{8}$$

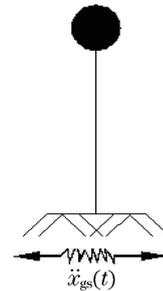


图 1 单自由度系统力学模型  
Fig.1 Mechanical model of SDOF system

式(1)~(8)中:  $m_{ns}$  为随机质量;  $c_{ns}$  为随机阻尼;  $f_{ns}(\alpha_2, y)$  为非线性随机恢复力;  $k_{ns}$  为随机刚度;  $m_0$  为随机质量均值;  $\xi$  为结构阻尼比;  $\sigma_m$  为随机质量均方差;  $\alpha_1, \alpha_2$  是均值为 0、方差为 1 的随机变量,此处采用高斯随机分布;  $k_0$  为随机刚度  $k_1$  的均值;  $\sigma_k$  为随机刚度均方差;  $R_\rho, R_E$  分别为密度、弹性模量的变异系数(此处假定随机弹性模量与随机密度相互独立);下标  $n$  和  $s$  分别表示非线性系统和随机系统,以区别于线性随机系统<sup>[14]</sup>;  $\ddot{y}(t), \dot{y}(t), y(t)$

分别为加速度、速度和位移随机反应;  $\ddot{x}_{gs}(t)$  为输入地震波随机过程;  $y_c$  为双线性折线分界值. 按非线性改进随机摄动法, 将双线性随机结构展开如下:

$$m_{ns}(\alpha_1) = \bar{m}_{ns}(\alpha_1) + \delta m_{ns} \quad (9)$$

$$c_{ns}(\alpha) = \bar{c}_{ns}(\alpha) + \delta c_{ns} \quad (10)$$

$$f_{ns}(\alpha_2, y) = \bar{f}_{ns}(\alpha_2, y) + \delta f_{ns} \quad (11)$$

式中:  $\alpha = \{\alpha_1 \quad \alpha_2\}^T$ ;  $\delta$  表示变分. 且——

$$\bar{m}_{ns}(\alpha_1) = m_0 + X(\alpha_1^2) m_{11} \quad (12)$$

$$\delta m_{ns} = m_{11} \alpha_1 \quad (13)$$

$$\bar{c}_{ns}(\alpha) = c_0 + X(\alpha_1^2) c_{11} + X(\alpha_2^2) c_{22} \quad (14)$$

$$\delta c_{ns} = c_1 \alpha_1 + c_2 \alpha_2 \quad (15)$$

$$\bar{f}_{ns}(\alpha_2, y) = f_0 + X(\alpha_1^2) f_{11} + X(\alpha_2^2) f_{22} \quad (16)$$

$$\delta f_{ns} = f_{11} \alpha_1 + f_{22} \alpha_2 \quad (17)$$

式中,  $X(\cdot)$  表示随机参数的均值. 其中, 随机质量、随机阻尼各参数计算如下:

$$m_0 = m_{ns}(\alpha_1) \Big|_{\alpha_1=0} = m_0 \quad (18)$$

$$m_{11} = \frac{\partial m_{ns}(\alpha_1)}{\partial \alpha_1} \Big|_{\alpha_1=0} = \sigma_m \quad (19)$$

$$m_{11} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 m_{ns}(\alpha_1)}{\partial \alpha_1^2} \Big|_{\alpha_1=0} = 0 \quad (20)$$

$$c_0 = c_{ns}(\alpha) \Big|_{\alpha=0} = 2\hat{\epsilon} \sqrt{m_0 k_0} \quad (21)$$

$$c_1 = \frac{\partial c_{ns}(\alpha)}{\partial \alpha_1} \Big|_{\alpha=0} = \frac{R_\rho c_0}{2} \quad (22)$$

$$c_2 = \frac{\partial c_{ns}(\alpha)}{\partial \alpha_2} \Big|_{\alpha=0} = \frac{R_E c_0}{2} \quad (23)$$

$$c_{11} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 c_{ns}(\alpha)}{\partial \alpha_1^2} \Big|_{\alpha=0} = -\frac{R_\rho^2 c_0}{8} \quad (24)$$

$$c_{22} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 c_{ns}(\alpha)}{\partial \alpha_2^2} \Big|_{\alpha=0} = -\frac{R_E^2 c_0}{8} \quad (25)$$

非线性随机回复力  $f_{ns}(\alpha_2, y)$  的各参数计算公式如下:

$$f_0(y) = f_{ns}(\alpha_2, y) \Big|_{\alpha=0} = \begin{cases} k_0 y, & |y| \leq y_c \\ k_2 y + (k_0 - k_2) y_c \text{sign}(y), & |y| > y_c \end{cases} \quad (26)$$

$$f_1(y, \hat{y}) = \frac{\partial f_{ns}(\alpha_2, y)}{\partial \alpha_1} \Big|_{\alpha=0} = \begin{cases} = k_0 \hat{y}_1, & |y| \leq y_c \\ = k_2 \hat{y}_1, & |y| > y_c \end{cases} \quad (27)$$

$$f_2(y, \hat{y}) = \frac{\partial f_{ns}(\alpha_2, y)}{\partial \alpha_2} \Big|_{\alpha=0} = \begin{cases} \sigma_k y + k_0 \hat{y}_2, & |y| \leq y_c \\ k_2 \hat{y}_2 + \sigma_k y_c \text{sign}(y), & |y| > y_c \end{cases} \quad (28)$$

$$f_{11} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 f_{ns}(\alpha_2, y)}{\partial \alpha_1^2} \Big|_{\alpha=0} = \begin{cases} \frac{k_0}{2} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial \alpha_1^2} \Big|_{\alpha=0}, & |y| \leq y_c \\ \frac{k_2}{2} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial \alpha_1^2} \Big|_{\alpha=0}, & |y| > y_c \end{cases} \quad (29)$$

$$f_{22} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 f_{ns}(\alpha_2, y)}{\partial \alpha_2^2} \Big|_{\alpha=0} = \begin{cases} \frac{k_0}{2} \frac{\partial^2 y}{\partial \alpha_2^2} \Big|_{\alpha=0}, & |y| \leq y_c \\ \frac{k_2}{2} \frac{\partial^2 y}{\partial \alpha_2^2} \Big|_{\alpha=0}, & |y| > y_c \end{cases} \quad (30)$$

$$\text{由此可得 } m_{ns}(\alpha_1) = m_0 + \sigma_m \alpha_1 \quad (31)$$

$$c_{ns}(\alpha) = c_0 (1 - R_\rho^2/8 - R_E^2/8) + c_0/2(R_\rho \alpha_1 + R_E \alpha_2) \quad (32)$$

将随机反应写成反应均值及 1 阶展开项, 得

$$y(t) = \bar{y}(t) + \alpha_1 \hat{y}_1 + \alpha_2 \hat{y}_2 \quad (33)$$

式中,  $\hat{y}_1 = \frac{\partial y}{\partial \alpha_1} \Big|_{\alpha=0}$ ,  $\hat{y}_2 = \frac{\partial y}{\partial \alpha_2} \Big|_{\alpha=0}$ , 分别为随机反应

对随机参数的灵敏度,  $\hat{y} = \{\hat{y}_1 \quad \hat{y}_2\}^T$ . 由式(33)可知, 展开后的随机反应实际是随机过程与空间随机场的线性组合, 因此, 能利用虚拟激励法求复合双线性随机系统的随机反应<sup>[15]</sup>. 由于不涉及反应的 2 阶灵敏度, 因此不会用到式(29)和式(30). 由此,  $f_{ns}(\alpha_2, y)$  按式(11)表示为

$$f_{ns}(\alpha_2, y) = f_0(\bar{y}) + [f_1(\bar{y}, \hat{y}) \alpha_1 + f_2(\bar{y}, \hat{y}) \alpha_2] \quad (34)$$

如果式(33)包含 1 阶灵敏度的二次项, 则  $f_{11} \neq 0$ ,  $f_{22} \neq 0$ . 将式(33)代入式(26)~(28), 化简后可得

$$f_0(\bar{y}) = \left[ k_2 + (k_0 - k_2) \int_{-y_c}^{y_c} p_Y(y) dy \right] \bar{y} \quad (35)$$

$$f_1(\bar{y}, \hat{y}) = \left[ k_2 + (k_0 - k_2) \int_{-y_c}^{y_c} p_Y(y) dy \right] \hat{y}_1 \quad (36)$$

$$f_2(\bar{y}, \hat{y}) = \left[ k_2 + (k_0 - k_2) \int_{-y_c}^{y_c} p_Y(y) dy \right] \hat{y}_2 + \left[ \sigma_k \int_{-y_c}^{y_c} p_Y(y) dy \right] \bar{y} \quad (37)$$

式中, 复合随机系统随机反应的均值假定为零, 但这一均值不同于  $\bar{y}$ .

在文献[14]中, 采用 Monte Carlo 模拟法模拟过这种双线性复合随机系统的随机反应, 计算结果表明, 随机反应的概率分布类型不是完全的正态分布, 也不是均匀分布. 其概率分布类型的离散程度较正

态分布稍大,曲线稍缓和.本文参考文献[4]的做法,考虑两种概率分布类型求非线性随机恢复力参数并形成虚拟摄动方程.

### 1.1 假定反应概率分布类型为正态分布

若反应服从正态分布,令

$$\int_{-y_c}^{y_c} p_Y(y)dy = 2I_1(y_c, \sigma_y) \quad (38)$$

从而式(26)~(28)变为

$$f_0(\bar{y}) = [k_2 + 2(k_0 - k_2)I_1(y_c, \sigma_y)]\bar{y} \quad (39)$$

$$f_1(\bar{y}, \hat{y}) = [k_2 + 2(k_0 - k_2)I_1(y_c, \sigma_y)]\hat{y}_1 \quad (40)$$

$$f_2(\bar{y}, \hat{y}) = 2I_1(y_c, \sigma_y) \cdot$$

$$[R_E k_0 \bar{y} + (k_0 - k_2)\hat{y}_2] + k_2 \hat{y}_2 \quad (41)$$

将式(39)~(41)代入式(34),可得

$$\begin{aligned} f_{ns}(\alpha_2, y) = & [k_2 + 2(k_0 - k_2)I_1(y_c, \sigma_y)]\bar{y} + \\ & [k_2 + 2(k_0 - k_2)I_1(y_c, \sigma_y)I_1(y_c, \sigma_y)] \cdot \\ & \hat{y}_1 \alpha_1 + \{k_2 \hat{y}_2 + 2I_1(y_c, \sigma_y) \cdot \\ & [\sigma_k \bar{y} + (k_0 - k_2)\hat{y}_2]\} \alpha_2 \end{aligned} \quad (42)$$

将式(31), (32), (42)代入式(1),按摄动法的思想,令式中随机参数前的系数相等,化简后可得

$$\begin{aligned} m_0 \ddot{y} + c_0(1 - R_\rho^2/8 - R_E^2/8) \dot{y} + \\ [k_2 + 2(k_0 - k_2)I_1(y_c, \sigma_y)]\bar{y} = \\ - m_0 \ddot{x}_{gs}(t) \end{aligned} \quad (43)$$

$$\begin{aligned} m_0 \dot{\hat{y}}_1 + c_0(1 - R_\rho^2/8 - R_E^2/8) \hat{y}_1 + \\ [k_2 + 2(k_0 - k_2)I_1(y_c, \sigma_y)]\hat{y}_1 = \\ R_\rho \{c_0/2[1 - (R_\rho^2 + R_E^2)/4] \bar{y} + \\ [k_2 + 2(k_0 - k_2)I_1(y_c, \sigma_y)]\bar{y}\} \end{aligned} \quad (44)$$

$$\begin{aligned} m_0 \dot{\hat{y}}_2 + c_0(1 - R_\rho^2/8 - R_E^2/8) \hat{y}_2 + \\ [k_2 + 2(k_0 - k_2)I_1(y_c, \sigma_y)]\hat{y}_2 = \\ - R_E [c_0 \bar{y}/2 + 2I_1(y_c, \sigma_y)k_0 \bar{y}] \end{aligned} \quad (45)$$

### 1.2 假定反应概率分布类型为均匀分布

若反应分布服从下式的均匀分布:

$$p_Y(y) = \begin{cases} 0, & -\infty < y < -\sqrt{3}\sigma_y + \mu_y \\ (2\sqrt{3}\sigma_y)^{-1}, & -\sqrt{3}\sigma_y + \mu_y \leq y \leq \sqrt{3}\sigma_y + \mu_y \\ 0, & \sqrt{3}\sigma_y + \mu_y < y < \infty \end{cases} \quad (46)$$

则当  $y_c < \sqrt{3}\sigma_y$  时,

$$f_0(\bar{y}) = [k_2 + (k_0 - k_2)y_c/\sqrt{3}\sigma_y]\bar{y} \quad (47)$$

$$f_1(\bar{y}, \hat{y}) = [k_2 + (k_0 - k_2)y_c/\sqrt{3}\sigma_y]\hat{y}_1 \quad (48)$$

$$f_2(\bar{y}, \hat{y}) = y_c/\sqrt{3}\sigma_y [R_E k_0 \bar{y} +$$

$$(k_0 - k_2)\hat{y}_2] + k_2 \hat{y}_2 \quad (49)$$

当  $y_c \geq \sqrt{3}\sigma_y$  时,

$$f_0(\bar{y}) = k_0 \bar{y} \quad (50)$$

$$f_1(\bar{y}, \hat{y}) = k_0 \hat{y}_1 \quad (51)$$

$$f_2(\bar{y}, \hat{y}) = R_E k_0 \bar{y} + k_0 \hat{y}_2 \quad (52)$$

同理,将式(47)~(52)代入式(34),可求得随机恢复力,然后和随机阻尼、随机质量代入双线性随机微分方程,得各阶摄动方程.限于篇幅,此处不赘述.

## 2 用迭代方法求解展开后的随机微分方程

和线性复合随机振动系统类似,此处不考虑随机参数的交叉项及二次项.对比式(43)~(45)与线性单自由度复合随机系统的摄动展开公式<sup>[15]</sup>,可以看到,由于同为摄动法,运动方程左边的常数项系数都是一样的,因此,这个方法也存在久期项的问题.非线性改进摄动法对于阻尼系数多了二阶项,当考虑  $k_2 = k_0$  时,  $2I_1(y_c, \sigma_y) = 1$ ,双线性复合随机振动系统的摄动方程变为线性复合随机振动系统的摄动方程,双线性复合随机振动系统变为线性复合随机振动系统.因此,用于线性复合随机系统随机反应的求解方法,此处仍可采用.由于式(43)~(45)中,反应均方差未知,因此在每一时间步,采用迭代方法求解反应均方差,即先假定初始反应均方差,从而计算得到新的均方差,反复迭代直到反应均方差收敛,此时的均方差可作为下一时刻均方差值的初值.

## 3 计算结果比较

单自由度系统质点平均密度  $\rho_0 = 2.5 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ , 变异系数  $R_\rho = 5\%$ , 质点体积  $V = 2 \text{ m}^3$ , 弹性模量均值  $E_0 = 10^{10} \text{ Pa}$ , 变异系数  $R_E = 3\%$ , 截面惯性矩  $I = 0.005208 \text{ m}^4$ , 杆件高度  $h = 2 \text{ m}$ . 阻尼比  $\xi = 0.05$ , 质量  $m = \rho V$ , 刚度计算公式  $k = 3EI/h^3$ , 屈服阶段的弹性模量为  $E_0 = 3 \times 10^9 \text{ Pa}$ . 结构所受的地震作用为均匀调制非平稳随机地震作用, 基岩与地面之间场地土的基频  $\omega_g = 15.6 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ , 基岩与地面之间场地土的阻尼比  $\xi_g = 0.6$ , 地面运动加速度峰值期望值  $|x_g|_{\max} = 6.2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ , 峰值因子  $\nu = 3$ . 阻尼的计算公式为  $c = 2\xi \sqrt{mk}$ . 均匀调制非

平稳随机地震模型参数分别为  $\lambda_1 = 1.0126$ ,  $t_1 = 1$  s,  $t_2 = 7$  s,  $\lambda_2 = 1.7832$ ,  $T_e = 10$  s. 假定反应概率分布类型为正态分布和均匀分布,分别求随机反应.

### 3.1 假定反应概率分布类型为正态分布时的计算结果

#### 3.1.1 虚拟反应

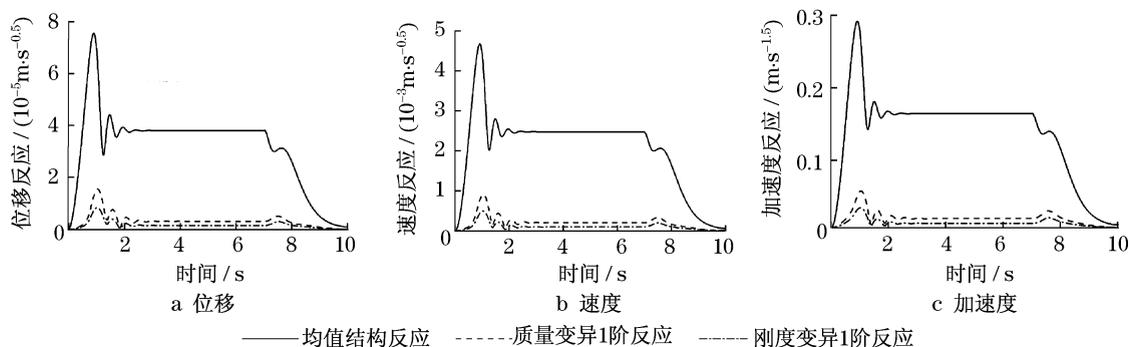


图2 虚拟反应( $\omega = 65$  rad · s<sup>-1</sup>)

Fig.2 Pseudo response( $\omega = 65$  rad · s<sup>-1</sup>)

图2为假定反应概率分布类型为正态分布时,该非线性非平稳复合随机振动系统在  $65$  rad · s<sup>-1</sup> 处的虚拟反应(按虚拟激励法的原理,虚拟反应实际是一个复数量,这里用复数的模描述这个物理量).由图可见,由于非线性的影响,在反应的初始阶段和衰减阶段,虚拟反应变化剧烈,表现出很强的非平稳性.

#### 3.1.2 随机反应

图3为计算得到的非线性复合随机振动系统的随机反应.图4为位移反应的计算结果与 Monte Carlo 法模拟结果之间的相对误差.由图可知,在平稳阶段,相对误差近 5%;速度和加速度反应的相对误差不大,

平稳阶段时不到 0.5%. 在地震作用的非平稳阶段(包括地震作用初始增大阶段和衰减阶段),相对误差较大,但由于这时随机反应不大,二者差别也不大.

图5为不同时刻的迭代次数,由图可知,最大迭代次数为 5 次.

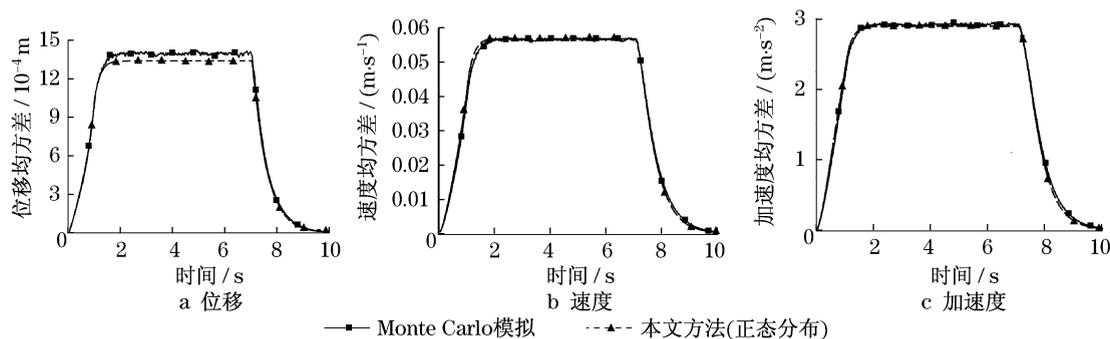


图3 非线性复合随机系统反应均方差(正态分布)

Fig.3 Response mean variation about no-linear compound stochastic system(normal distribution)

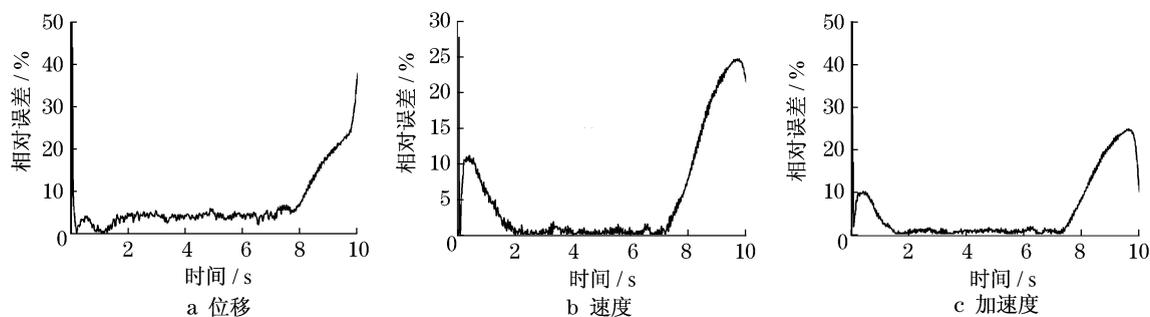


图4 非线性复合随机系统反应均方差相对误差(正态分布)

Fig.4 Relative error of response mean variation about no-linear compound stochastic system(normal distribution)

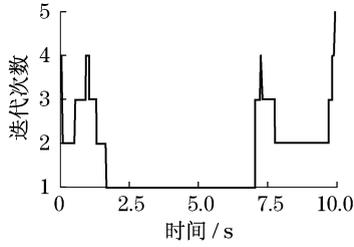


图5 迭代次数  
Fig.5 Iteration frequency

3.1.3 迭代计算精度的影响

图6是迭代计算精度分别为0.1,0.05,0.01,0.001时得到的均方差反应.由图可见,计算时可以采用0.1的相对误差.

3.2 假定反应概率分布类型为均匀分布

3.2.1 虚拟反应

图7为假定反应概率分布类型为均匀分布时的非线性非平稳复合随机振动系统在65 rad·s<sup>-1</sup>处的虚拟反应.图7与图2的差别表现在平稳阶段的虚拟反应减小,地震作用增长阶段虚拟反应跳跃振荡更剧烈.

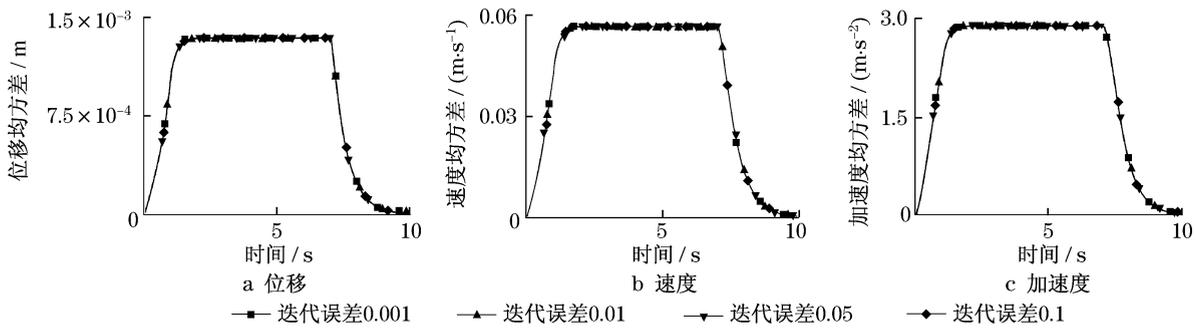


图6 不同迭代精度的反应结果比较

Fig.6 Result comparison about different iteration precision

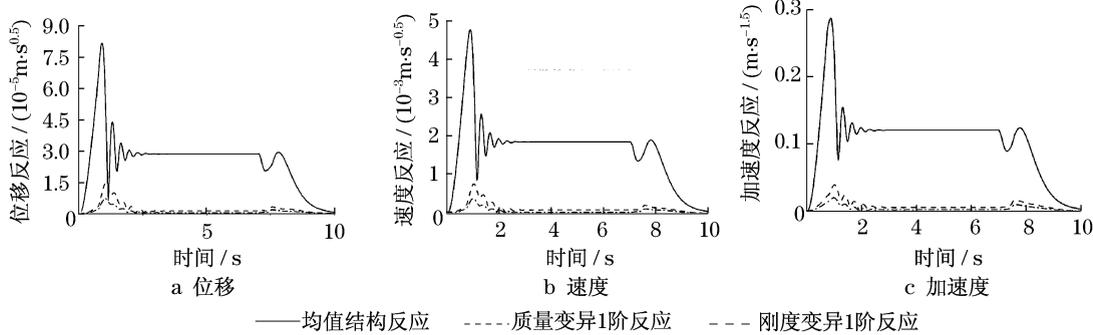


图7 虚拟反应( $\omega = 65 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ )

Fig.7 Pseudo response( $\omega = 65 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ )

3.2.2 随机反应

统的均方差反应,以及相对于 Monte Carlo 模拟结果的相对误差.当假定反应的概率分布为均匀时,

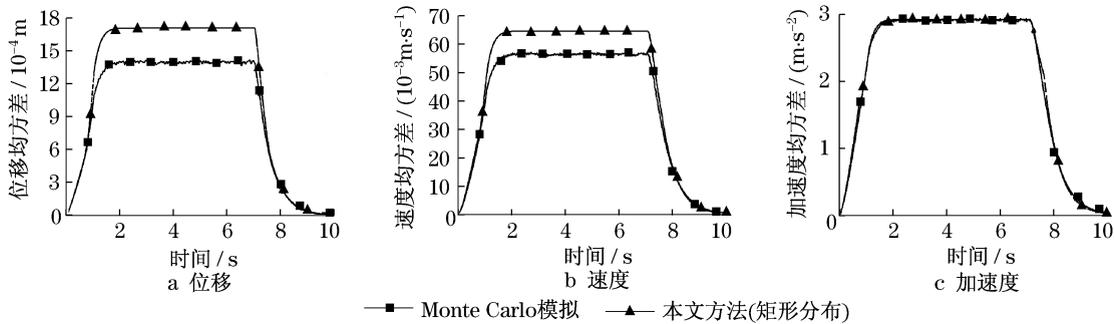


图8 非线性复合系统随机反应(均匀分布)

Fig.8 Response mean variation about no-linear compound stochastic system(equal value distribution)

所算得平稳阶段的位移、速度均方差反应较 Monte Carlo 模拟结果小,相对误差很大(15%~25%),加速度方差响应和 Monte Carlo 模拟结果接近.非平稳阶段的相对误差依然很大.

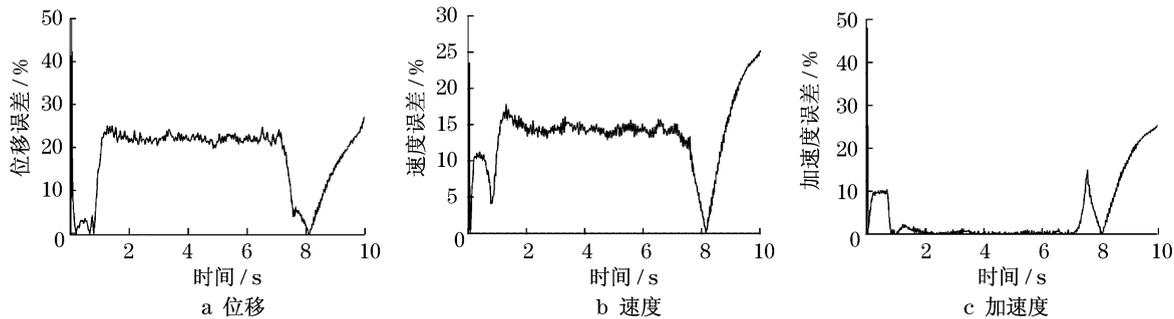


图9 非线性复合系统反应均方差相对误差(均匀分布)

Fig.9 Relative error of response mean variation about no-linear compound stochastic system(equal value distribution)

图10为不同时刻的迭代次数,由图可知,最大迭代次数为5次.

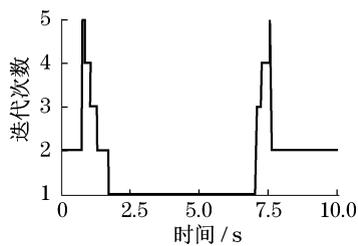


图10 迭代次数

Fig.10 Iteration frequency

#### 4 误差原因及需要进一步研究的问题

本文将非线性改进摄动法与虚拟激励法结合,求解了双线性复合随机系统的随机反应.计算结果与 Monte Carlo 模拟结果<sup>[15]</sup>有误差,这些误差产生的原因有如下几点:

(1) 随机反应的展开为1阶展开.由于是单自由度系统,计算结果与模拟结果误差不是很大;但当用于多自由度系统时,误差可能会大.

(2) 对随机反应概率分布类型的假定.本文假定概率分布类型为正态分布与均匀分布,计算结果表明,不同概率分布类型的计算误差是不一样的. Monte Carlo 模拟结果表明,平稳阶段反应概率分布类型不是完全正态分布,而是比对应正态分布的离散程度稍大,曲线稍平缓.

因此,还需要在以下方面展开:①将本方法用于多自由度系统;②进一步探讨其他非线性情况;③对不同反应概率类型进行比较.

#### 5 结论

与等效随机线性化法<sup>[15]</sup>相比,按非线性改进摄动虚拟激励法求解随机反应,更容易收敛.等效随机线性化法的计算精度不是很好,而改进随机摄动法的计算精度要好些.但改进随机摄动法也存在久期项问题.反应的概率分布类型也影响计算精度.

双线性非平稳复合随机振动系统的随机反应有一些特点:频域虚拟反应在非平稳增长阶段跳跃性很大,表现较强的非平稳性;地震作用增长和衰减的非平稳阶段相对误差很大,但此时的反应很小,不影响计算结果;当假定反应概率分布类型为均匀分布时,平稳阶段的均方差相对误差较大.

#### 参考文献:

- [1] 王国砚.非线性随机振动中的等效线性化方法研究及在工程的应用[D].上海:同济大学航空航天与力学学院,1999. WANG Guoyan. Study on equivalent linearization methods for non-linear stochastic vibration and their applications in Engineering [D]. Shanghai: Tongji University. College of Aerospace Engineering and Applied Mechanics, 1999.
- [2] Naess A. Prediction of extreme response of nonlinear structures by extended stochastic linearization[J]. J Pro Engng Mech, 1995(10):153.
- [3] Pol D Spanos, Spyro Tsavachidis. Deterministic and stochastic analyses of a nonlinear system with a Biot visco-elastic element [J]. J Earthquake Engng Struct Dyn, 2001, 30: 595.
- [4] Crandall S H. Is stochastic equivalent linearization a subtly flawed procedure? [J]. J Probabilistic Engineering Mechanics, 2001, 16: 169.

(下转第 1051 页)