

# 带垂度水平索-桥耦合面内参数振动

任淑琰<sup>1,2</sup>, 顾明<sup>1</sup>

(1. 同济大学 土木工程防灾国家重点实验室, 上海 200092; 2. 上海林同炎李国豪土建工程咨询有限公司, 上海 200092)

**摘要:** 考虑拉索垂度, 建立了水平索-桥系统的面内参数振动运动方程. 采用分离变量法描述拉索的横向位移, 并取拉索的前两阶模态, 用 Galerkin 方法得到拉索二阶广义坐标运动方程; 同时, 建立桥面等效质量块的运动微分方程. 在此基础上, 采用多尺度方法, 导出了运动方程的理论解. 以南京长江二桥 A20 拉索为研究对象对拉索响应进行了数值求解, 分析了主要参数对拉索响应的影响, 并对理论解进行了验证.

**关键词:** 带垂度水平拉索-节段桥面系统; 参数激振; 理论解; 多尺度法

**中图分类号:** TU 311.3; O 322

**文献标识码:** A

## Parametric Vibration of Horizontal Cable with Sag and Deck System

REN Shuyan<sup>1,2</sup>, GU Ming<sup>1</sup>

(1. State Key Laboratory of Disaster Reduction in Civil Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, China; 2. Lin Tung-Yen & Li Guo-Hao Consultants Shanghai Ltd., Shanghai 200092, China)

**Abstract:** This paper presents parametric vibration of a system of a horizontal cable with sag and a mass block representing a bridge deck section under axial harmonic excitation. The differential equations of the cable and the mass are established. By using the variable separation method to cable's cross displacement and taking the first two modes of the cable into account, the differential equations governing the motions of the first two generalized coordinates of the cable are derived based on Galerkin method. On the basis of the theoretical model, the theoretical solutions of the differential equations of the cable-deck system are derived with multiple-scale method. Taking Cable A20 of No. 2 Nanjing Bridge over Yangtze River as an example, the vibration characteristics of the system is numerically investigated and the validity of the theoretical solutions is tested.

**Key words:** system of horizontal cable with sag and bridge

deck section; parametric vibration; theoretical solution; multiple-scale method

斜拉桥拉索由于质量小、阻尼小、刚度小的特点, 在风、车辆等荷载作用下可能发生强烈的横向振动<sup>[1-2]</sup>. 由于桥面和桥塔的运动, 拉索的张力将随桥面和桥塔的运动不断改变, 这相当于拉索受到的激励作为参数出现在其运动方程中, 拉索的运动微分方程中具有时变系数, 因此拉索和桥面/桥塔构成了参数振动系统<sup>[3-4]</sup>.

参激振动按照参数随时间变化的规律可以分为确定性参数振动和随机参数振动<sup>[5-6]</sup>. 本文研究斜拉桥拉索的确定性参数振动问题. Lilien 等<sup>[7]</sup>分析了在轴向余弦荷载作用下斜拉索的大幅振动. A Pinto Da Costa 等<sup>[8]</sup>利用哈密顿原理, 推导出了在简谐支座激励下拉索的参数振动方程, 并利用谐波平衡法求解得到了振幅的近似计算公式, 并讨论了拉索倾角、阻尼等参数的影响. Michel Virlogeux<sup>[9]</sup>在研究拉索在正弦位移激励下的拉索的振动时, 将位移激励分为沿轴向和垂直于轴线两部分, 这两部分分别产生参数振动和强迫振动, 并给出了强迫振动的振幅计算公式和参数振动不稳定区域的边界. 在这些文献中对拉索参数振动的研究都是假定了激励为谐波形式, 纯粹考察拉索的参数振动特性, 没有考虑拉索和桥面系统振动的耦合作用.

亢战等<sup>[3]</sup>考虑了桥面的质量和刚度, 建立了索-桥耦合振动模型, 通过数值积分对模型求解, 指出了参数振动的可能性, 并讨论了阻尼等参数的影响. Zhang 等<sup>[10]</sup>将斜拉索的端部支承模拟为弹簧单元, 采用有限元法分析在端部简谐激励下的响应. 赵跃宇<sup>[11]</sup>建立了拉索在端部轴向正弦激励下的索梁耦

收稿日期: 2009-04-28

基金项目: 国家自然科学基金创新群体科学基金资助项目(50621062)

作者简介: 任淑琰(1977—), 女, 高级工程师, 工学博士, 主要研究方向为桥梁抗风. E-mail: xiaoge961587@hotmail.com

通讯作者: 顾明(1957—), 男, 教授, 工学博士, 博士生导师, 主要研究方向为风工程. E-mail: minggu@tongji.edu.cn

合振动方程,考虑拉索的第一阶模态,用多尺度法进行求解.汪至刚等<sup>[12]</sup>将拉索简化成弦,桥面简化为弹簧-质量系统,用数值方法分析了索-桥耦合参数振动.陈水生等<sup>[13]</sup>进一步考虑拉索的垂度、倾角得到了索-桥耦合振动模型更为精细的数值解. Wu等<sup>[14]</sup>分析了一钢箱梁斜拉桥在正弦激励、车辆荷载以及地震作用下拉索的参数振动. Vincenzo Gattulli等<sup>[15]</sup>建立了索桥耦合振动模型,对索和梁的第一阶模态进行数值求解,并用实验验证.这些文献将拉索与桥面在参数振动时的动力耦合作用考虑了进去,但是存在不足:①采用解析方法分析的模型往往只取拉索第一阶模态进行分析;②对于拉索参数共振的共振区个数存在争议.

本系列论文考虑拉索垂度以及前两阶模态参与,建立了水平索-桥系统的面内参数振动的理论模型;基于多尺度法,给出了拉索响应的理论解.以南京长江二桥 A20 拉索为研究对象,得到了一些新的结论.

## 1 考虑拉索垂度时水平拉索参数振动模型

考虑拉索垂度,将拉索简化处理为两端在同一水平高度上.不考虑拉索的倾角,相当于忽略了重力弦向分力的作用,也就忽略了斜索张力弦向分力沿索长的变化.图1为考虑拉索垂度时索桥耦合振动的简化模型示意图,模型中质量块的质量为  $M$ ,刚度为  $K$ ;拉索单位长质量为  $m$ ,弦长为  $L$ ,弹性模量为  $E$ ,截面积为  $A$ ,张力为  $T$ ,其中静张力为  $T_s$ ,动张力为  $T_d$ .

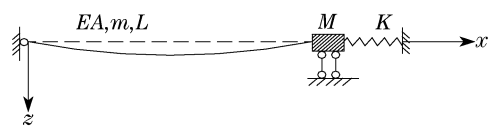


图1 考虑拉索垂度时索-桥耦合振动简化模型  
Fig.1 Schematic diagram of the vibration model of horizontal cable with sag and deck system

假设拉索满足下面几条基本假定:①拉索的静力平衡曲线为二次抛物线;②不考虑拉索的抗弯刚度、抗剪刚度及抗扭刚度<sup>[16]</sup>;③索在振动过程中处于线弹性范围.

在考虑垂度时,无阻尼拉索的运动微分方程为<sup>[13]</sup>:

$$m \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} - mg =$$

$$\frac{\partial}{\partial s} \left\{ (T_s + T_d) \frac{\partial [w(x, t) + z(x)]}{\partial s} \right\} \quad (1)$$

式中:  $w(x, t)$  为拉索的横向位移,从拉索的静力平衡位置记起;  $s$  为拉索弧长,其他变量的定义和前面相同.

将方程(1)展开,代入拉索张力和其水平分力  $H$  的关系式  $T = H(ds/dx)$ ,并利用索静力平衡方程或者垂度方程消去重力项后得<sup>[13]</sup>:

$$m \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} \frac{ds}{dx} = H_d \frac{\partial^2 [w(x, t) + z(x)]}{\partial x^2} + H_s \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \quad (2)$$

式中:  $ds/dx \approx 1 + 1/2 (dz/dx)^2$ <sup>[13]</sup>;  $H_d, H_s$  分别为动、静张力的水平分力.

设拉索的横向位移  $w(x, t)$  仍采用分离变量法表示,取前两阶模态进行分析,即:

$$w(x, t) = A_1(t) \sin(\pi x/L) + A_2(t) \sin(2\pi x/L) \quad (3)$$

其中,  $\sin(i\pi x/L)$  为拉索的第  $i$  ( $i = 1, 2$ ) 阶振型,  $A_i(t)$  ( $i = 1, 2$ ) 为其广义坐标.

由水平索的应力-应变关系及式(3)可以得到拉索动张力的水平分力为

$$H_d = \frac{EA}{L} \left[ X(t) + \frac{1}{2} \int_0^L \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx + \int_0^L \frac{dz}{dx} \frac{\partial w}{\partial x} dx \right] = \frac{EA}{L} \left\{ X(t) + \frac{\pi^2}{4L} [A_1^2(t) + 4A_2^2(t)] + \frac{2mgL}{\pi H_s} A_1(t) \right\} \quad (4)$$

将式(4)代入方程(2),并利用 Galerkin 方法<sup>[17]</sup>整理得到拉索前两阶模态两个运动微分方程,质量块  $M$  的运动微分方程和张紧索-桥面系统的方程<sup>[18]</sup>形式形同,并将拉索前两阶模态运动微分方程代入可以得到,得到垂度水平索-桥耦合振动方程组(以下简称“运动方程”):

$$\begin{cases} \ddot{A}_1 + \omega_1^2 A_1 + \beta_2 X = -\alpha_1 A_1^3 - 4\alpha_1 A_2^2 A_1 - \alpha_2 X A_1 - 3\beta_1 A_1^2 - 4\beta_1 A_2^2 \\ \ddot{A}_2 + \omega_2^2 A_2 = -\alpha_3 A_1^2 A_2 - 4\alpha_3 A_2^3 - 4\alpha_4 X A_2 - 8\beta_3 A_1 A_2 \\ \ddot{X} + \omega_3^2 X + \beta_4 A_1 = -\alpha_5 A_1^2 - 4\alpha_5 A_2^2 \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \text{其中, } \omega_1^2 &= \frac{1}{mI_1} \left[ H_s \left( \frac{\pi}{L} \right)^2 + 8EA \left( \frac{mg}{\pi H_s} \right)^2 \right]; \omega_2^2 = \\ &4 \frac{H_s}{mI_2} \left( \frac{\pi}{L} \right)^2; \alpha_1 = \frac{EA}{4mI_1} \left( \frac{\pi}{L} \right)^4; \alpha_2 = \frac{EA}{mI_1 L} \left( \frac{\pi}{L} \right)^2; \\ \alpha_3 &= \frac{EA}{mI_2} \left( \frac{\pi}{L} \right)^4; \alpha_4 = \frac{EA}{mI_2 L} \left( \frac{\pi}{L} \right)^2; \beta_1 = \frac{EA g}{\pi H_s I_1} \left( \frac{\pi}{L} \right)^2; \end{aligned}$$

$$\beta_2 = \frac{4EA_g}{\pi H_s I_1 L}; \beta_3 = \frac{EA_g}{\pi H_s I_2} \left( \frac{\pi}{L} \right)^2; I_1 = \int_0^L \frac{ds}{dx} \sin^2 \left( \frac{\pi x}{L} \right) dx = -\frac{1}{4} \left( \frac{mgL}{\pi H_s} \right)^2 + \frac{1}{24} \left( \frac{mgL}{H_s} \right)^2 + 1; I_2 = \int_0^L \frac{ds}{dx} \sin^2 \left( \frac{2\pi x}{L} \right) dx = -\frac{1}{16} \left( \frac{mgL}{\pi H_s} \right)^2 + \frac{1}{24} \left( \frac{mgL}{H_s} \right)^2 + 1$$

以上各系数由拉索的几何参数与材料参数共同决定。 $I_1$  和  $I_2$  是考虑拉索垂度引入的修正系数,垂度曲率较小时, $I_1$  和  $I_2$  均近似为 1。 $\omega_1$  与  $\omega_2$  分别为拉索的一、二阶固有频率。 $\omega_1$  的表达式与文献[8]推导得到的结果一致。考虑拉索垂度后,拉索一阶频率随垂度增大而增大;若不考虑拉索垂度, $\omega_1$  的表达式就退化为张紧弦的一阶频率公式。拉索的二阶频率  $\omega_2$  和不考虑垂度时近似相等; $\omega_3^2 = K/M + EA/ML$ ;  $\alpha_5 = EA/(4M)(\pi/L)^2$ ;  $\beta_4 = 2mgEA/(\pi MH_s)$ ;  $\omega_3$  为质量块的频率; $\omega_3, \alpha_5$  和  $\beta_4$  由拉索的材料参数与几何参数以及质量块的参数共同决定。

若将方程(5)中的二阶模态去掉,与文献[13]中的方程索桥耦合运动微分方程形式一致。

## 2 多尺度法求解

索-桥运动方程(5)中存在耦合一次项,难以直接求解,因此需要先对其解耦,引入下面的变换使运动方程解耦:

$$\begin{cases} A_1(t) \\ A_2(t) \\ X(t) \end{cases} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ (\omega_a^2 - \omega_1^2)/\beta_2 & 0 & (\omega_b^2 - \omega_1^2)/\beta_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{cases} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{cases} \quad (6)$$

其中,运动方程对应的线性方程特征值为  $\omega_a, \omega_2$  和

$$\epsilon^3 \text{ 阶: } \begin{cases} D_0^2 y_{13} + \omega_a^2 y_{13} = -D_1^2 y_{11} - 2D_0 D_2 y_{11} - 2D_0 D_1 y_{12} - 2d_1 y_{11} y_{12} - 2d_2 y_{21} y_{22} - \\ 2d_3 y_{31} y_{32} - d_4 y_{11} y_{32} - d_4 y_{12} y_{31} - d_5 y_{21}^2 y_{11} - d_5 y_{21}^2 y_{31} - d_6 y_{11}^3 - \\ 3d_6 y_{11}^2 y_{31} - 3d_6 y_{11} y_{31}^2 - d_6 y_{31}^3 \\ D_0^2 y_{23} + \omega_2^2 y_{23} = -D_1^2 y_{21} - 2D_0 D_2 y_{21} - 2D_0 D_1 y_{22} - d_7 y_{11} y_{22} - d_7 y_{12} y_{21} - \\ d_8 y_{21} y_{32} - d_8 y_{22} y_{31} - d_9 y_{11}^2 y_{21} - 2d_9 y_{11} y_{21} y_{31} - d_9 y_{31}^2 y_{21} - d_{10} y_{21}^3 \\ D_0^2 y_{33} + \omega_b^2 y_{33} = -D_1^2 y_{31} - 2D_0 D_2 y_{31} - 2D_0 D_1 y_{32} - 2d_{11} y_{11} y_{12} - 2d_{12} y_{21} y_{22} - \\ 2d_{13} y_{31} y_{32} - d_{14} y_{11} y_{32} - d_{14} y_{12} y_{31} - d_{15} y_{21}^2 y_{11} - d_{15} y_{21}^2 y_{31} - d_{16} y_{11}^3 - \\ 3d_{16} y_{11}^2 y_{31} - 3d_{16} y_{11} y_{31}^2 - d_{16} y_{31}^3 \end{cases} \quad (11)$$

式中, $D_n$  为微分算子,且  $D_n \equiv \partial/\partial T_n, n=0,1,2, \dots, m-1$ ;  $T_n = \epsilon^n t$  为时间变量; $t$  为时间。

设方程(9)的解为

$\omega_b$ , 且有  $\omega_a^2 = (\omega_1^2 + \omega_3^2)/2 - \sqrt{(\omega_1^2 - \omega_3^2)^2 + 4\beta_2\beta_4}/2$ ,  $\omega_b^2 = (\omega_1^2 + \omega_3^2)/2 + \sqrt{(\omega_1^2 - \omega_3^2)^2 + 4\beta_2\beta_4}/2$ . 可以证明,  $\omega_b > \max(\omega_1, \omega_3)$ ,  $\omega_a < \min(\omega_1, \omega_3)$ .

解耦后的运动方程化为

$$\begin{cases} \ddot{y}_1 + \omega_a^2 y_1 = -d_1 y_1^2 - d_2 y_2^2 - d_3 y_3^2 - d_4 y_1 y_3 - \\ d_5 (y_2^2 y_1 + y_2^2 y_3) - d_6 (y_1^3 + 3y_1^2 y_3 + \\ 3y_1 y_3^2 + y_3^3) \\ \ddot{y}_2 + \omega_2^2 y_2 = -d_7 y_1 y_2 - d_8 y_2 y_3 - d_9 (y_1^2 y_2 + \\ 2y_1 y_2 y_3 + y_3^2 y_2) - d_{10} y_2^3 \\ \ddot{y}_3 + \omega_b^2 y_3 = -d_{11} y_1^2 - d_{12} y_2^2 - d_{13} y_3^2 - \\ d_{14} y_1 y_3 - d_{15} (y_2^2 y_1 + y_2^2 y_3) - d_{16} (y_1^3 + \\ 3y_1^2 y_3 + 3y_1 y_3^2 + y_3^3) \end{cases} \quad (7)$$

其中, $d_i (i=1, \dots, 15)$  为拉索的几何参数与材料参数的函数,参见文献[18].

令方程(7)的三次近似解为

$$y_i(t) = \sum_{j=1}^3 \epsilon^j y_{ij}(T_0, T_1, T_2), \quad i=1,2,3 \quad (8)$$

$\epsilon$  为小参数.将式(8)代入方程(7)并归并  $\epsilon$  的同阶次项,得到如下三组微分方程:

$$\epsilon \text{ 阶: } D_0^2 y_{i1} + \omega_k^2 y_{i1} = 0, \quad i=1,2,3; \quad k=a,2,b \quad (9)$$

$$\epsilon^2 \text{ 阶: } \begin{cases} D_0^2 y_{12} + \omega_a^2 y_{12} = -2D_0 D_1 y_{11} - d_1 y_{11}^2 - \\ d_2 y_{21}^2 - d_3 y_{31}^2 - d_4 y_{11} y_{31} \\ D_0^2 y_{22} + \omega_2^2 y_{22} = -2D_0 D_1 y_{21} - d_7 y_{11} y_{21} - \\ d_8 y_{21} y_{31} \\ D_0^2 y_{32} + \omega_b^2 y_{32} = -2D_0 D_1 y_{31} - d_{11} y_{11}^2 - \\ d_{12} y_{21}^2 - d_{13} y_{31}^2 - d_{14} y_{11} y_{31} \end{cases} \quad (10)$$

$$y_{j1} = Y_j(T_1, T_2) e^{i\omega_k T_0} + cc, \quad j=1,2,3; \quad k=a,2,b \quad (12)$$

式中: $Y_j$  为只与时间变量  $T_1, T_2$  有关的振幅函数;

cc 为式中各项的共轭.

将式(12)代入  $\epsilon^2$  阶方程(10)得:

$$\left\{ \begin{array}{l} D_0^2 y_{12} + \omega_a^2 y_{12} = -2i\omega_a \frac{\partial Y_1}{\partial T_1} e^{i\omega_a T_0} - d_1 Y_1^2 e^{2i\omega_a T_0} - d_2 Y_2^2 e^{2i\omega_2 T_0} - d_3 Y_3^2 e^{2i\omega_b T_0} - \\ d_4 Y_1 Y_3 e^{i(\omega_a + \omega_b) T_0} - d_4 Y_1 \bar{Y}_3 e^{i(\omega_a - \omega_b) T_0} - d_1 Y_1 \bar{Y}_1 - d_2 Y_2 \bar{Y}_2 - d_3 Y_3 \bar{Y}_3 + cc \\ D_0^2 y_{22} + \omega_2^2 y_{22} = -2i\omega_2 \frac{\partial Y_2}{\partial T_1} e^{i\omega_2 T_0} - d_7 Y_1 Y_2 e^{i(\omega_a + \omega_2) T_0} - d_7 Y_1 \bar{Y}_2 e^{i(\omega_a - \omega_2) T_0} - \\ d_8 Y_2 Y_3 e^{i(\omega_2 + \omega_b) T_0} - d_8 Y_2 \bar{Y}_3 e^{i(\omega_2 - \omega_b) T_0} + cc \\ D_0^2 y_{32} + \omega_b^2 y_{32} = -2i\omega_b \frac{\partial Y_3}{\partial T_1} e^{i\omega_b T_0} - d_{11} Y_1^2 e^{2i\omega_a T_0} - d_{12} Y_2^2 e^{2i\omega_2 T_0} - d_{13} Y_3^2 e^{2i\omega_b T_0} - \\ d_{14} Y_1 Y_3 e^{i(\omega_a + \omega_b) T_0} - d_{14} Y_1 \bar{Y}_3 e^{i(\omega_a - \omega_b) T_0} - d_{11} Y_1 \bar{Y}_1 - d_{12} Y_2 \bar{Y}_2 - d_{13} Y_3 \bar{Y}_3 + cc \end{array} \right. \quad (13)$$

从式(13)可见,  $\omega_b : \omega_a \approx 2 : 1$  时,第 1,3 式存在共振项;  $\omega_b : \omega_2 \approx 2 : 1$  时,第 2,3 式存在共振项.

下面对  $\omega_b$  远离  $2\omega_a$  且远离  $2\omega_2$ ,  $\omega_b : \omega_a \approx 2 : 1$  和  $\omega_b : \omega_2 \approx 2 : 1$  三种情况分别讨论.

## 2.1 $\omega_b$ 远离 $2\omega_a$ 且 $\omega_b$ 远离 $2\omega_2$ 时

在  $\omega_b$  远离  $2\omega_a$  且  $\omega_b$  远离  $2\omega_2$  时由方程(13)的

解代入  $\epsilon^3$  阶方程(11)得:

$$\left\{ \begin{array}{l} D_0^2 y_{13} + \omega_a^2 y_{13} = -2i\omega_a \frac{dY_1}{dT_2} e^{i\omega_a T_0} + \mu_1 Y_1^3 e^{3i\omega_a T_0} + \mu_2 Y_3^3 e^{3i\omega_b T_0} + \mu_3 Y_1 e^{i\omega_a T_0} + \mu_4 Y_3 e^{i\omega_b T_0} + \\ \mu_5 Y_1^2 Y_3 e^{i(2\omega_a + \omega_b) T_0} + \mu_6 Y_1^2 \bar{Y}_3 e^{i(2\omega_a - \omega_b) T_0} + \mu_7 Y_1 Y_3^2 e^{i(\omega_a + 2\omega_b) T_0} + \mu_8 \bar{Y}_1 Y_3^2 e^{i(-\omega_a + 2\omega_b) T_0} + \\ \mu_9 Y_2^2 Y_1 e^{i(\omega_a + 2\omega_2) T_0} + \mu_{10} Y_2^2 \bar{Y}_1 e^{i(-\omega_a + 2\omega_2) T_0} + \mu_{11} Y_2^2 Y_3 e^{i(2\omega_2 + \omega_b) T_0} + \mu_{12} Y_2^2 \bar{Y}_3 e^{i(2\omega_2 - \omega_b) T_0} + cc \\ D_0^2 y_{23} + \omega_2^2 y_{23} = -2i\omega_2 \frac{dY_2}{dT_2} e^{i\omega_2 T_0} + \mu_{13} Y_2^3 e^{3i\omega_2 T_0} + \mu_{14} Y_2 e^{i\omega_2 T_0} + \mu_{15} Y_1 Y_2 Y_3 e^{i(\omega_a + \omega_2 + \omega_b) T_0} + \\ \mu_{16} Y_1 \bar{Y}_2 Y_3 e^{i(\omega_a - \omega_2 + \omega_b) T_0} + \mu_{17} Y_1 Y_2 \bar{Y}_3 e^{i(\omega_a + \omega_2 - \omega_b) T_0} + \mu_{18} Y_1 \bar{Y}_2 \bar{Y}_3 e^{i(\omega_a - \omega_2 - \omega_b) T_0} + \\ \mu_{19} Y_1^2 Y_2 e^{i(2\omega_a + \omega_2) T_0} + \mu_{20} Y_1^2 \bar{Y}_2 e^{i(2\omega_a - \omega_2) T_0} + \mu_{21} Y_3^2 Y_2 e^{i(2\omega_b + \omega_2) T_0} + \mu_{22} Y_3^2 \bar{Y}_2 e^{i(2\omega_b - \omega_2) T_0} + cc \\ D_0^2 y_{33} + \omega_b^2 y_{33} = -2i\omega_b \frac{dY_3}{dT_2} e^{i\omega_b T_0} + \mu_{23} Y_1^3 e^{3i\omega_a T_0} + \mu_{24} Y_3^3 e^{3i\omega_b T_0} + \mu_{25} Y_1 e^{i\omega_a T_0} + \mu_{26} Y_3 e^{i\omega_b T_0} + \\ \mu_{27} Y_1^2 Y_3 e^{i(2\omega_a + \omega_b) T_0} + \mu_{28} Y_1^2 \bar{Y}_3 e^{i(2\omega_a - \omega_b) T_0} + \mu_{29} Y_1 Y_3^2 e^{i(\omega_a + 2\omega_b) T_0} + \mu_{30} \bar{Y}_1 Y_3^2 e^{i(-\omega_a + 2\omega_b) T_0} + \\ \mu_{31} Y_1 Y_2^2 e^{i(\omega_a + 2\omega_2) T_0} + \mu_{32} \bar{Y}_1 Y_2^2 e^{i(-\omega_a + 2\omega_2) T_0} + \mu_{33} Y_2^2 Y_3 e^{i(2\omega_2 + \omega_b) T_0} + \mu_{34} Y_2^2 \bar{Y}_3 e^{i(2\omega_2 - \omega_b) T_0} + cc \end{array} \right. \quad (14)$$

其中,  $\mu_i$  ( $i = 1, \dots, 34$ ) 为拉索的几何参数与材料参数的函数,参见文献[18].

由式(14)可见,在  $\omega_b$  远离  $2\omega_a$  且  $\omega_b$  远离  $2\omega_2$  时,且  $\omega_a \approx \omega_b$  或  $\omega_b \approx 3\omega_a$  或  $\omega_2 \approx 0.5(\omega_a + \omega_b)$  或  $\omega_2 \approx 0.5(\omega_b - \omega_a)$  时,系统存在内共振,下面对这四种共振情形分别讨论.

### (1) $\omega_a \approx \omega_b$ 时

采用指数形式来表示振幅函数,即  $Y_n = b_n e^{i\theta_n} / 2, n = 1, 2, 3$ .

当  $\omega_a \approx \omega_b$  时,利用消除长期项的条件,可得  $b_2$  为常数,  $b_1$  和  $b_3$  是时间变量  $T_2$  的函数,且满足下面的关系式:

$$b_1^2 + \omega_b b_3^2 / \omega_a = c, \quad c \text{ 为常数} \quad (15)$$

即  $b_1$  和  $b_3$  总是有界,即拉索二阶振幅  $A_2$  为常值,而一阶振幅  $A_1$  和桥面的振幅  $X$  都有界.

### (2) $\omega_b \approx 3\omega_a$ 时

当  $\omega_b \approx 3\omega_a$  时,从  $\omega_a$  和  $\omega_b$  的公式可得拉索一阶频率  $\omega_1$  和桥面频率  $\omega_3$  之间关系式为

$$\omega_3^2 = (41\omega_1^2 \pm 10\sqrt{16\omega_1^4 - 9\beta_2\beta_4})/9 \quad (16)$$

由式(14)的长期项条件可以得到  $b_2$  为常数,  $b_1$  和  $b_3$  是时间  $T_2$  的函数,且满足下式:

$$b_1^2 + \mu_6 \omega_b b_3^2 / \mu_{23} \omega_a = c, \quad c \text{ 为常数} \quad (17)$$

在式(17)中如果  $\mu_6$  和  $\mu_{23}$  同号,则  $b_1$  和  $b_3$  都是有界的,而且两者此消彼长;如果  $\mu_6$  和  $\mu_{23}$  异号,  $b_1$  和  $b_3$  有可能随时间增加而增大,则不能保证  $b_1$  和  $b_3$  还具有有界性.

### (3) $\omega_2 \approx 0.5(\omega_a + \omega_b)$ 时

此时,由式(14)的长期项条件得到  $b_1, b_2$  和  $b_3$  均为时间变量  $T_2$  的函数,且满足下式:

$$b_1^2 + \mu_{12} \omega_2 b_2^2 / \mu_{16} \omega_a = c_1 \quad (18a)$$

$$b_1^2 - \mu_{12} \omega_b b_3^2 / \mu_{33} \omega_a = c_2 \quad (18b)$$

$$b_2^2 + \mu_{16} \omega_b b_3^2 / \mu_{33} \omega_2 = c_3 \quad (18c)$$

式中,  $c_1, c_2$  和  $c_3$  为常数. 此外,  $b_i (i=1, 2, 3)$  随时间的变化规律取决于  $\mu_{12}, \mu_{16}$  和  $\mu_{33}$  的符号.

(4)  $\omega_2 \approx 0.5(\omega_b - \omega_a)$  时

此时, 由式(14)的长期项条件得到  $b_3$  为常数,  $b_1, b_2$  为时间  $T_2$  的函数, 且满足下式:

$$b_1^2 - \mu_{12} \omega_2 b_2^2 / \mu_{17} \omega_a = c, \quad c \text{ 为常数} \quad (19)$$

若上式中系数  $\mu_{12}$  和  $\mu_{17}$  同号, 那么  $b_1$  和  $b_2$  随着时间增加可能增加, 拉索的一、二阶振幅  $A_1, A_2$  以及桥面的振幅  $X$  均可能随时间增加而增大, 从而系统出现不稳定振动; 若  $\mu_{12}$  和  $\mu_{17}$  异号, 则  $b_1$  和  $b_2$  均有界, 因此  $A_1, A_2$  以及  $X$  均为有界量.

## 2.2 $\omega_b : \omega_a \approx 2 : 1$ 时

此时, 根据式(6)中  $\omega_a$  和  $\omega_b$  的表达式, 可得拉索一阶频率  $\omega_1$  和桥面频率  $\omega_3$  应满足:

$$\omega_3^2 = (17\omega_1^2 \pm 5\sqrt{9\omega_1^4 - 16\beta_2\beta_4})/8 \quad (20)$$

将方程近似解的阶数取到二次, 设  $\omega_b = 2\omega_a + \epsilon\sigma$ , 由方程(13)的长期项条件导出:

$$\begin{aligned} d_4 \bar{Y}_1 Y_3 e^{i\sigma T_1} + 2i\omega_a dY_1/dT_1 &= 0; \quad dY_2/dT = 0 \\ d_{11} Y_1^2 e^{-i\sigma T_1} + 2i\omega_b dY_3/dT_1 &= 0 \end{aligned} \quad (21)$$

式(21)说明  $Y_2$  是常数, 即  $A_2$  也是常数.  $Y_1$  和  $Y_3$  是  $T_1$  的函数, 由此可得:

$$\begin{cases} \dot{b}_1 = -\frac{1}{4\omega_a} d_4 b_1 b_3 \sin(-2\theta_1 + \theta_3 + \sigma T_1) \\ \dot{b}_3 = \frac{1}{4\omega_b} d_{11} b_1^2 \sin(-2\theta_1 + \theta_3 + \sigma T_1) \\ \dot{\theta}_1 = \frac{1}{4\omega_a} d_4 b_3 \cos(-2\theta_1 + \theta_3 + \sigma T_1) \\ \dot{\theta}_3 = \frac{1}{4\omega_b b_3} d_{11} b_1^2 \cos(-2\theta_1 + \theta_3 + \sigma T_1) \end{cases} \quad (22)$$

由式(22)的前两式可以得到:

$$b_1^2 + d_4 \omega_b b_3^2 / d_{11} \omega_a = c, \quad c \text{ 为常数} \quad (23)$$

式(23)表明如果系数  $d_4$  和  $d_{11}$  同号,  $b_1$  和  $b_3$  有界, 从而  $A_1$  和  $X$  也有界; 若  $d_4$  和  $d_{11}$  异号, 则  $b_1$  和  $b_3$  ( $A_1$  和  $X$ ) 可随时间增加而增长, 从而导致拉索和桥面出现不稳定振动.

## 2.3 $\omega_b : \omega_2 \approx 2 : 1$ 时

将方程近似解的阶数取到二次. 设  $\omega_b = 2\omega_2 + \epsilon\sigma$ , 由方程(13)的长期项条件得到:

$$\begin{aligned} dY/dT_1 &= 0; \quad d_8 \bar{Y}_2 Y_3 e^{i\sigma T_1} + 2i\omega_2 \cdot dY_2/dT_1 = 0 \\ d_{12} Y_2^2 e^{-i\sigma T_1} + 2i\omega_b \cdot dY_3/dT_1 &= 0 \end{aligned} \quad (24)$$

因此  $Y_1$  是常数,  $Y_2$  和  $Y_3$  是时间变量  $T_1$  的函数,

由  $Y_1$  和  $Y_3$  的指数形式表达式可以得到:

$$\begin{cases} \dot{b}_2 = -d_8 b_2 b_3 \sin(-2\theta_2 + \theta_3 + \sigma T_1)/4\omega_2 \\ \dot{b}_3 = d_{12} b_2^2 \sin(-2\theta_2 + \theta_3 + \sigma T_1)/4\omega_b \\ \dot{\theta}_2 = d_8 b_3 \cos(-2\theta_2 + \theta_3 + \sigma T_1)/4\omega_2 \\ \dot{\theta}_3 = d_{12} b_2^2 \cos(-2\theta_2 + \theta_3 + \sigma T_1)/4\omega_b b_3 \end{cases} \quad (25)$$

由式(25)进一步得到  $b_2$  和  $b_3$  满足的关系式如下:

$$b_2^2 + d_8 \omega_b b_3^2 / d_{12} \omega_2 = c, \quad c \text{ 为常数} \quad (26)$$

而  $b_2$  和  $b_3$  随时间的变化规律取决于系数  $d_8$  和  $d_{12}$  的正负. 若  $d_8$  和  $d_{12}$  同号, 则  $b_2$  和  $b_3$  有界, 从而拉索和桥面的振幅均有界; 若  $d_8$  和  $d_{12}$  反号,  $b_2$  和  $b_3$  则有可能随时间增加而增长, 从而使拉索和桥面的振幅不断增加, 系统产生不稳定振动.

## 3 算例分析

以南京长江二桥 A20 拉索为例进行算例分析, 基本参数为: 张力在 B 端(下端)的竖向分量  $V_B = 3\,369.351 \text{ kN}$ ; 为拉索单位长度自重  $mg = 0.795 \text{ kN} \cdot \text{m}^{-1}$ ; 拉索的水平投影长度  $l = 292.389 \text{ m}$ , 垂直投影长度  $h = 153.859 \text{ m}$ ; 拉索 A, B 两锚固端之间的弦长  $L = 330.4 \text{ m}$ ; 拉索断面面积  $A = 0.01019 \text{ m}^2$ ; 拉索弹性模量  $E = 1.90 \times 10^8 \text{ kPa}$ , 阻尼系数取为  $0.92 \text{ N} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-1}$ , 对应的拉索一阶阻尼比为  $0.19\%$ ; 静张力  $T_s = 7\,516.8 \text{ kN}$ , 拉索的一阶频率  $\omega_1 = 0.467 \text{ Hz}$ , 比按张紧弦的频率公式<sup>[18]</sup>得到的频率值大  $1.3\%$ ; 而拉索的二阶频率  $\omega_2 = 0.9208 \text{ Hz}$ , 和张紧弦频率公式<sup>[18]</sup>得到的结果近似相等. 可见, 拉索的垂度效应对其一阶频率有影响, 而对其二阶频率影响非常小.

图 2 为拉索和质量块位移响应中的最大振幅随两者频率比  $\omega_3/\omega_1$  的变化情况. 在  $\omega_3/\omega_1$  接近  $1/3, 1/2, 1$  及  $2$  的时候, 拉索一阶振幅均出现较明显的峰值; 在  $\omega_3/\omega_1$  接近  $3$  和  $5$  时, 虽然拉索一阶振幅的值要比初始扰动大, 但是却没有明显峰值出现; 拉索的二阶振幅在  $\omega_3/\omega_1$  接近  $4$ , 即  $\omega_3/\omega_2$  接近  $2$  时出现较大的峰值; 而桥面在各个共振情况下的最大振幅均和初始扰动值相同.

此外, 对比有垂度索模型的结果图 2 和张紧弦模型的结果<sup>[18]</sup>可以发现:

(1) 在考虑拉索垂度时, 拉索一阶模态的共振区间增多. 这是由于考虑拉索垂度以后, 拉索的运动微分方程中增加了平方非线性项与线性耦合项.

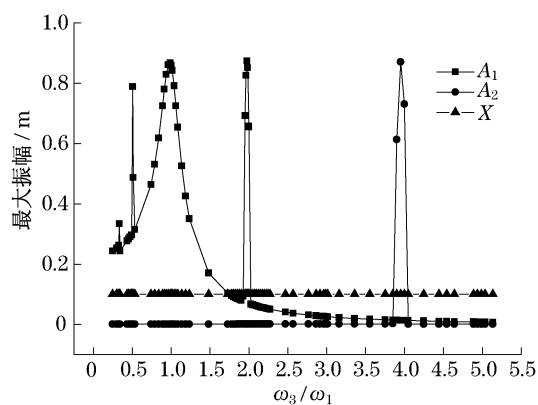


图2 考虑垂度时水平拉索和质量块位移响应的最大振幅随固有频率比  $\omega_3/\omega_1$  的变化

Fig.2 The max amplitude of cable and deck for different frequency ratio  $\omega_3/\omega_1$

(2) 在  $\omega_3/\omega_1 \approx 1$  处的主共振区间要比不考虑垂度时宽得多. 就振幅峰值而言, 考虑垂度时拉索一阶振幅的峰值在  $\omega_3/\omega_1 \approx 1$  处比不考虑垂度时大, 而其他峰值在两种情况下相差不大. 拉索一阶模态的响应特性相对于张紧弦有所变化, 特别是 1:1 共振时变化较大.

(3) 考虑拉索垂度以后, 拉索的二阶模态在  $\omega_3/\omega_1 \approx 2$  即  $\omega_3/\omega_2 \approx 1$  处的峰值不明显. 在拉索二阶运动微分方程中, 由于重力垂度产生了拉索一、二阶模态之间的耦合项, 当拉索一阶模态发生 2:1 共振

时, 这一项所占的比重较大, 从而使拉索二阶响应特性和张紧弦的不同. 对于  $\omega_3/\omega_1 \approx 4$  处的共振区, 拉索出现较强的二阶共振; 并且对考虑和不考虑拉索垂度, 拉索二阶振幅峰值相差不大. 这是因为拉索的一阶模态在这种情况下没有被激励起来, 因此, 拉索重力垂度引起的拉索一、二阶模态的耦合平方项对于改变拉索二阶模态的运动特性贡献很小.

在图2中, 当  $\omega_3/\omega_1$  接近 1/2 或 2 时, 拉索一阶模态共振区间中振幅峰值对应的频率比  $\omega_3/\omega_1$  分别为 0.507 和 1.975, 满足式(16); 而当  $\omega_3/\omega_1$  接近 1/3 时, 拉索一阶模态的振幅峰值对应的频率比  $\omega_3/\omega_1$  为 0.336, 满足式(20). 由于解析分析中无法得到其他几种共振情况下  $\omega_3/\omega_1$  的显示表达式, 因此对于  $\omega_3/\omega_1$  接近于 1 时拉索一阶振幅的峰值以及  $\omega_3/\omega_1$  接近于 4 时拉索二阶最大振幅所对应的频率比  $\omega_3/\omega_1$  的具体值无法得到, 只能由数值计算结果图2看出, 在  $\omega_3/\omega_1 \approx 1$  或  $\omega_3/\omega_1 \approx 4$  处的峰值对应的频率比分别 0.988 和 3.950.

拉索响应频谱结果表明, 考虑拉索垂度时, 由于拉索一阶运动方程和桥面运动方程有耦合线性刚度项, 拉索一阶响应以及桥面的响应成分中均有两个频率存在, 但以各自的固有频率为主.

图3~图7分别为 1:3, 1:2, 1:1, 2:1 及 4:1 共振时拉索和桥面位移响应及相应的频谱. 由图3~图7可知: (1) 在各种共振情况下, 拉索一、二

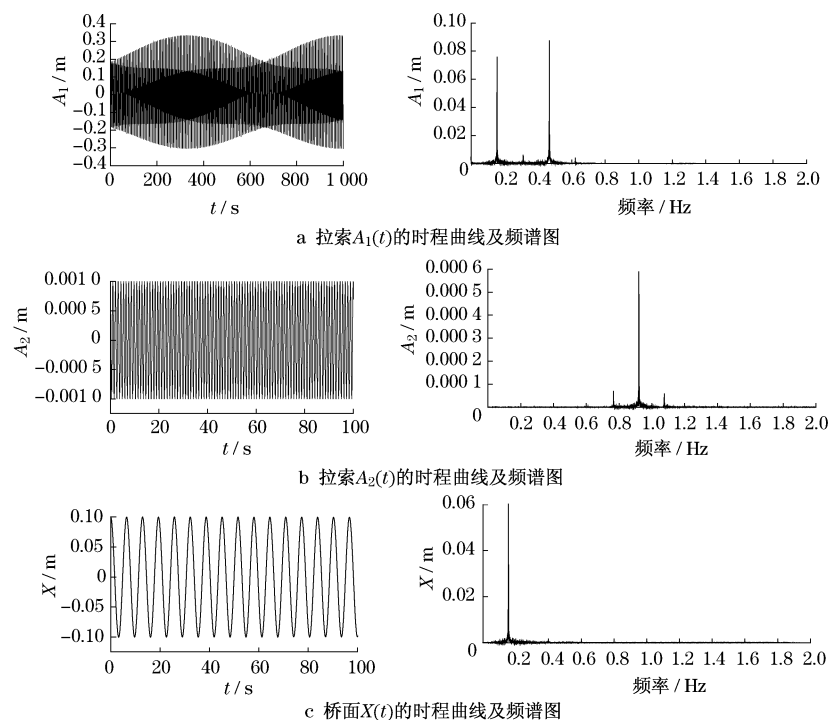
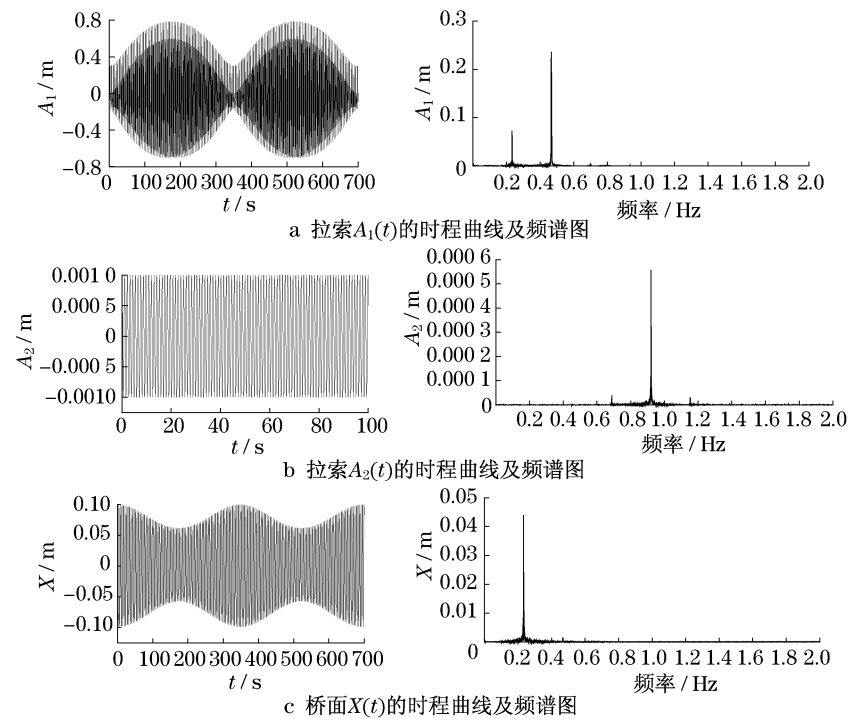
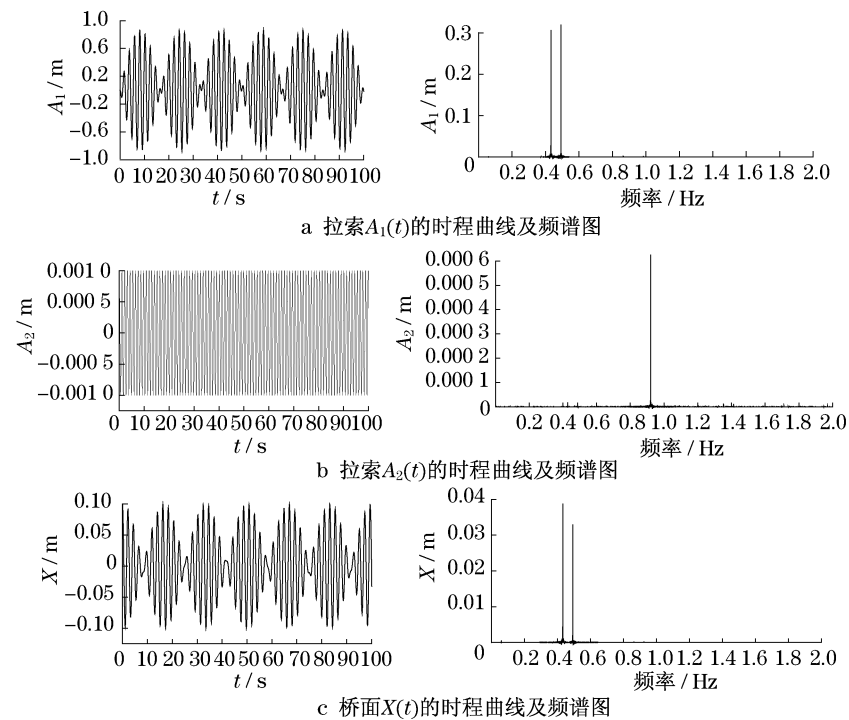


图3  $\omega_3 = 0.336 \omega_1$  时拉索和桥面的时程曲线及频谱图

Fig.3 Time history and spectrum graph of amplitudes of cable and deck when  $\omega_3 = 0.336 \omega_1$

图4  $\omega_3 = 0.507 \omega_1$  时拉索和桥面的时程曲线及频谱图Fig.4 Time history and spectrum graph of amplitudes of cable and deck when  $\omega_3 = 0.507 \omega_1$ 图5  $\omega_3 = 0.988 \omega_1$  时拉索和桥面的时程曲线及频谱图Fig.5 Time history and spectrum graph of amplitudes of cable and deck when  $\omega_3 = 0.988 \omega_1$ 

阶振幅及桥面的振幅都是有限值,计算得到在各种共振情况下拉索振幅和桥面振幅之间均满足振幅的有界性条件。(2)从频谱图知,由于拉索一阶模态与桥面之间存在线性耦合项,拉索一阶振幅主要有两

个特征频率成分  $\omega_a$  和  $\omega_b$ , 其中  $\omega_a \approx \min(\omega_1, \omega_3)$ ,  $\omega_b \approx \max(\omega_1, \omega_3)$ , 并且在靠近拉索一阶固有频率  $\omega_1$  处的峰值较大;拉索二阶振幅主要频率成分为  $\omega_2$ ;桥面振幅也含有  $\omega_a$  和  $\omega_b$  两个频率成分,但以

接近桥面固有频率  $\omega_3$  为主频,在近  $\omega_1$  处的谱峰值很小,但  $\omega_b \approx \omega_a$  时桥面在两频率处谱峰值均很大,因为此时拉索一阶频率和桥面频率很接近.拉索和桥面在组合频率、倍频处也有很小的谱峰值,其对应

的频率值可由二阶以及三阶近似解析解得到.(3)共振情况下桥面位移和被激励起来的拉索位移呈现“拍”的特性,振幅交替增减,而没有被激励起来时则做简谐振动.这与近似解析解的结论一致.

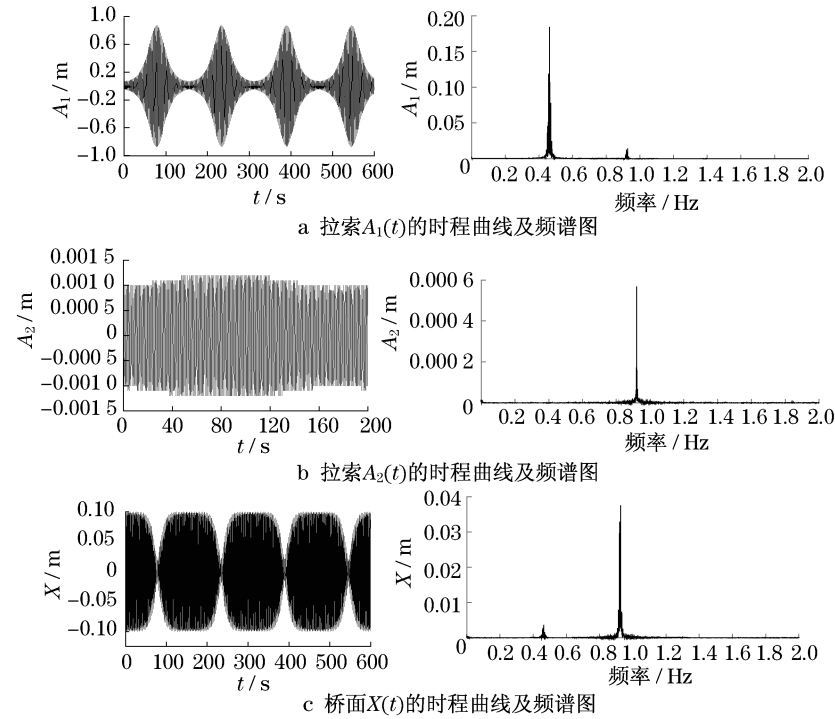


图6  $\omega_3 = 1.975 \omega_1$  时拉索和桥面的时程曲线及频谱图

Fig.6 Time history and spectrum graph of amplitudes of cable and deck when  $\omega_3 = 1.975 \omega_1$

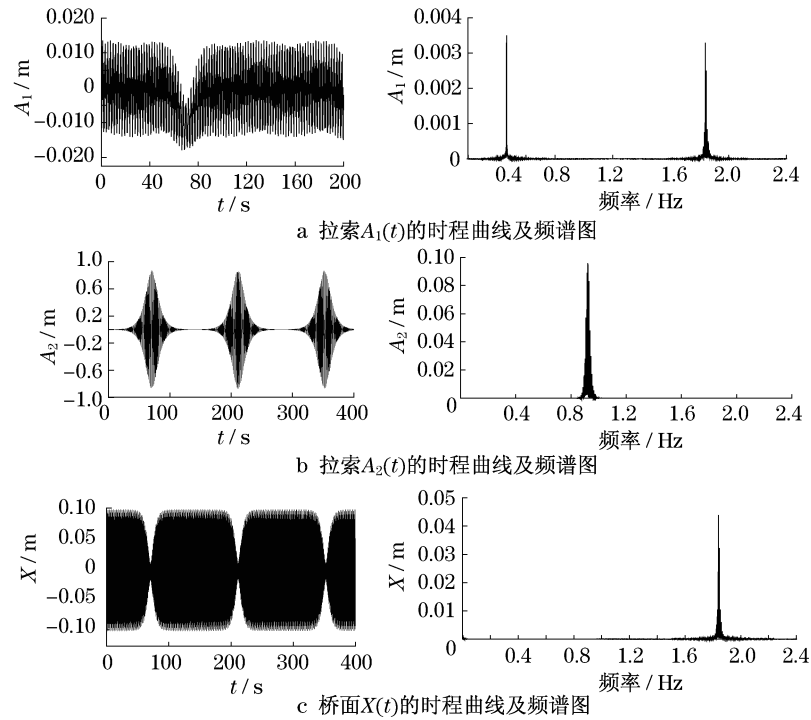


图7  $\omega_3 = 3.950 \omega_1$  时拉索和桥面的时程曲线及频谱图

Fig.7 Time history and spectrum graph of amplitudes of cable and deck when  $\omega_3 = 3.950 \omega_1$



## 4 结语

本文提出了带垂度水平索-桥系统考虑二阶模态的面内参数振动的理论模型,采用多尺度方法,导出运动方程的理论解,特别讨论了几种不同特征频率比时拉索运动方程解的特性.采用数值方法计算了南京长江二桥 A20 拉索的参数激振响应,得到了索-桥体系参数振动的初步结论.

(1) 考虑拉索垂度后拉索的一阶固有频率增大,而且随垂度增大而增大;而拉索的二阶固有频率基本不变,与相应的张紧弦的二阶频率接近.

(2) 当桥面频率和拉索一阶频率比约为 4 时,即桥面频率是拉索二阶频率的 2 倍左右时,拉索二阶振幅很大.当桥面频率和拉索一阶频率比约为 2 时,二阶振幅较小.

(3) 在各种共振情况下,即使不考虑拉索和桥面的阻尼,振幅也都满足有界性条件,是有界量,具有限幅特性.

(4) 在考虑拉索垂度后,系统共振时,拉索一阶振幅的最大值并不出现在频率比为 1 或 2 时,而是小于 1 或 2.

(5) 考虑拉索垂度时,由于拉索一阶运动方程和桥面运动方程有耦合线性刚度项的存在,拉索一阶响应以及桥面的响应成分中均有两个频率存在,但以各自的固有频率为主.

(6) 当系统发生共振时,被激励起来的拉索模态的位移曲线呈现“拍”的特性.

## 参考文献:

- [1] Yozo Fujino. Vibration, control and monitoring of long-span bridges-recent research, developments and practice in Japan [J]. Journal of Constructional Steel Research, 2002, 58: 71.
- [2] 顾明,刘慈军,罗国强,等.斜拉桥拉索的风(雨)激振及控制[J].上海力学,1998,19(4):281.  
GU Ming, LIU Cijun, LUO Guoqiang, et al. Rain-wind induced vibration of cable on cable-stayed bridges and its control[J]. Shanghai Journal of Mechanics, 1998, 19(4): 281.
- [3] 亢战,钟万勰.斜拉桥参数共振问题的数值研究[J].土木工程学报,1998,31(4):14.  
KANG Zhan, ZHONG Wanxie. Numerical study on parametric response of cables in cable stayed bridge [J]. China Civil Engineering Journal, 1998, 31(4): 14.
- [4] Nayfeh A H, Mook D T. Nonlinear oscillations[M]. New York: Wiley-Interscience, 1979.
- [5] 朱位秋.随机振动[M].北京:科学出版社,1998.  
ZHU Weiqiu. Stochastic vibration [M]. Beijing: Science Press, 1998.
- [6] Ibrahim R A. Parametric random vibration[M]. New York: John Wiley & Sons, 1985.
- [7] Lilien J L, Pinto Da Costa A. Vibration amplitudes caused by parametric excitation of cable stayed structure[J]. Journal of Sound and Vibration, 1994, 174(1): 69.
- [8] Pinto Da Costa A, Martins J A C, Branco F, et al. Oscillations of bridge stay cables induced by periodic motions of deck and/or towers [J]. Journal of Engineering Mechanics, 1996, 122(7): 613.
- [9] Virlogeux M. Cable vibration in cable-stayed bridges [M] // Bridge Aerodynamics. Larsen and Esdahl (eds). Rotterdam: [s. n.], 1998: 213 - 233.
- [10] Zhang Q L, Perl U. Dynamic behaviours of cables in parametrically unstable zones [J]. Computers and Structures, 1999, 73: 437.
- [11] 赵跃宇.大跨径斜拉非线性动力学的模型与理论研究[D].长沙:湖南大学土木工程学院,2000.  
ZHAO Yueyu. Study on non-linear dynamics of long-span cable-stayed bridge [D]. Changsha: Hunan University. School of Civil Engineering, 2000.
- [12] 汪至刚,孙炳楠.斜拉桥参数振动引起的拉索大幅振动[J].工程力学,2001,18(1):103.  
WANG Zhigang, SUN Bingnan. Cable vibration for cable stayed bridge by parametric response [J]. Engineering Mechanics, 2001, 18(1): 103.
- [13] 陈水生,孙炳楠.斜拉桥索-桥耦合非线性参数振动数值研究[J].土木工程学报,2003,36(4):70.  
CHEN Shuisheng, SUN Bingnan. Numerical study on nonlinear parametric vibration of coupled cables and bridge decks [J]. China Civil Engineering Journal, 2003, 36(4): 70.
- [14] Wu Q, Takahashi K, Okabayashi T, et al. Response characteristics of local vibrations in stay cables on an existing cable-stayed bridge [J]. Journal of Sound and Vibration, 2003, 261: 403.
- [15] Gattulli V, Marco L. One-to-two global-local interaction in a cable-stayed beam observed through analytical, finite element and experiment models [J]. International Journal of Non-linear Mechanics, 2005, 40: 571.
- [16] Irvine H M. Cable structure [M]. Cambridge: MIT Press, 1981.
- [17] 季文美,方同,陈松淇.机械振动[M].北京:科学出版社,1985.  
JI Wenmei, FANG Tong, CHENG Songqi. Mechanical oscillation [M]. Beijing: Science Press, 1985.
- [18] 任淑琰.斜拉桥拉索参数振动研究[D].上海:同济大学土木工程学院,2007.  
REN Shuyan. Parametric oscillation of cables in cable-stayed bridges [D]. Shanghai: Tongji University. College of Civil Engineering, 2007.