

多域组合非耦合热弹性问题的虚边界元法

许 强¹, 张志佳¹, 米 东²

(1. 同济大学 建筑工程系, 上海 200092; 2. 江苏大恒集团有限公司, 江苏 南京 211112)

摘要: 采用边界元法求解热弹性力学问题通常涉及到关于温度作用的域内体积分, 使其在求解此类问题时失去了可降维的优点. 为此, 应用虚边界元法思想分别考虑热传导问题和与之对应的弹性力学问题的数值格式, 并将两者的求解思路结合起来, 从而形成解多域组合非耦合热弹性问题时无需计算域内体积分的虚边界元法思想. 该方法具有一般性, 既适用于二维问题又适用于三维问题, 而且可将多域求解思想蜕化到单域问题. 按单域定义的方板、厚壁圆筒热应力的计算和按多域定义的含圆形夹杂方板有效热膨胀系数的数值模拟结果已充分表明该方法具有较好的计算效率和较高的计算精度.

关键词: 虚边界元法; 多域组合; 热弹性

中图分类号: O 343.6

文献标识码: A

Virtual Boundary Element Method for Solving Uncoupled Thermo-elastic Problems with Multi-domain Combinations

XU Qiang¹, ZHANG Zhijia¹, MI Dong²

(1. Department of Building Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, China; 2. Jiangsu MounTop Group Co., Ltd., Nanjing 211112, China)

Abstract: The volume integrals caused by temperature has to be dealt with while the boundary element method is employed to solve thermo-elastic mechanics problems, as a result, the advantages of reducing dimensions are extinguished. This paper presents, a numerical approach for solving uncoupled thermo-elastic problems with multi-domain combinations without calculating volume integral, which is the formation of the numerical formats established for solving heat conduction and corresponding elasticity in accordance with virtual boundary element method (VBEM), respectively, and two ideas are combined, too. The method is available for both 2-D and 3-D problem, and can also degenerates single-domain problem solving. The method can also be applied to thermo-

elastic problems of composite materials containing holes or inclusions, arbitrary combinations with different material properties and contact problems. In the end, several numerical examples are given to illustrate the performance of the method, and the results validate the high accuracy and efficiency of the method.

Key words: virtual boundary element method; multi-domain combinations; thermo elasticity

非耦合热弹性问题的求解是边界元法应用研究领域之一, 如何提高此类问题的计算效率和计算精度一直倍受关注^[1-5]. 相对有限元法, 边界元法因其仅需在边界上进行网格剖分, 在求解不含体力问题时计算效率更为突显, 但在解非耦合热弹性问题时, 必须先求解给定的热传导问题; 然后将域内各点温度变化所引起弹性体的变形视为与温度作用相对应的初应变或温度荷载(体积力)对弹性体的作用, 求解与之对应的弹性力学问题. 若引入温度荷载, 则涉及到处理域内体积分, 此时传统的边界元法在计算效率方面失去了优势. 当然, 对于易于处理的问题, 也有学者利用格林积分定理将域内体积分部分转换成边界积分, 但不具有一般性. 另外, 边界元直接法需要处理奇异积分, 系数阵为满阵, 且存在边界层效应等, 这些不足都直接影响着边界元直接法的计算精度和计算效率. 关于热弹性问题, 已有诸多学者依据边界元直接法做了大量的研究工作并提出了新的改进思想. 例如, Ghosh 等^[2]通过对位移边界积分方程做相应变换, 使得原强奇异积分核转变成弱奇异积分核; Luo 等^[3]对位移积分方程中的强奇异积分核, 根据扣除法采取减去一项和再补回一项等手段, 使几乎强奇异降阶; 周焕林等^[4]提出一种较为通用的数值处理手段, 即几乎超、强奇异积分的正则化.

收稿日期: 2009-06-01

作者简介: 许 强(1951—), 男, 教授, 博士生导师, 工学博士, 主要研究方向为计算固体力学、结构优化. E-mail: xuqiang@tongji.edu.cn

以上方法均在不同程度上提高了数值解的精度.

本文作者所提出的虚边界元法和多域组合虚边界元法的思想^[6-9],均可避免奇异积分的处理,系数阵为对称的,且不存在边界层效应.相对边界元直接法,已有诸多数值结果表明虚边界元法具有数值稳定性好,计算精度和计算效率高等特点;尤其是多域组合虚边界元法更具有应用方便、灵活等特性.多域求解思想亦可蜕化为求解单域问题^[9].

本文以二维问题作为研究对象,将多域组合非耦合热弹性问题分解为热传导问题和与之对应的弹性力学问题,并分别进行.依据二维无限域单位强度点热源的位移、应力基本解和叠加原理建立了解“热传导问题”的数值格式,亦形成了解多域组合热传导问题的虚边界元法思想;依据文献^[9]思想求解“对应的弹性力学问题”.上述两种思路的结合即形成了本文对多域组合非耦合热弹性问题的求解方法,此方法无需处理由温度作用所引起的域内体积积分.该方法适应性较广,不但可解按单域定义的热弹性问题,而且可解含孔和含夹杂的复合材料、各域材料性质不同的组合体、接触等按多域定义的热弹性问题.

1 多域组合热传导问题的虚边界元法

设所给问题的整体域为 Ω , 其任意子域为 Ω_i , 且有 $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \dots \cup \Omega_n$ 和 $\Omega_1 \cap \Omega_2 \cap \dots \cap \Omega_n = \emptyset$, 如图1所示.由文献^[11]定义,可将各分域板的厚度、各分域材料性质、各分层物质等的不同视为具有不同的属性,即每个子域 Ω_i 的属性是不同的.设 Γ 为整体域 Ω 的边界, Γ_i 为子域 Ω_i 的边界.对于任意子域 Ω_i , 当 $\Gamma_i \cap \Gamma$ 为非空集时,则称此对应边界部分为该子域的外部边界,反之称其为内部边界,并记为 Γ_{ij} ; 而 Γ_{ij} 应视为不同子域 Ω_i 与 Ω_j 为相邻子域时的公共边界(或结合面).于是,第 i 个子域的实边界可表示为 $\Gamma_i = (\Gamma_i \cap \Gamma) + \sum_j \Gamma_{ij}$ (j 为与当前子域 Ω_i 相邻时的子域号).对于热传导问题,分别以 Γ_i^t , Γ_i^q 表示第 i 个子域 Ω_i 的已知温度和已知热流密度边界,且有 $\Gamma_i^t \cap \Gamma_i^q = \emptyset$.需强调的是,对于内部边界 Γ_{ij} 不存在温度和热流密度的已知边界条件,仅存在结合面处相应物理量的连续性条件.

依据虚边界元法对单域问题的求解思想^[6-8],将任意子域 Ω_i 嵌入一个具有空洞为 Ω_i 的无限域中(其属性与 Ω_i 的相同),在此无限域中作一由 Γ_i 外延拓所得的有限虚边界 S_i , S_i 所包含的区域记为

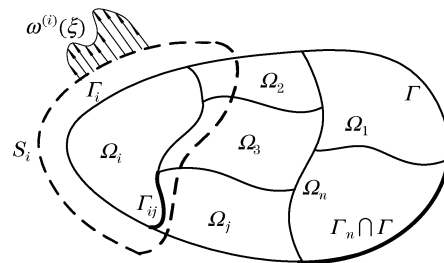


图1 多域组合体示意图

Fig.1 Sketch map of multi-domain composite body

$\Omega'_i (\Omega'_i \supset \Omega_i)$, 每一 Ω_i 所对应的无限域在分析计算时仅与该 Ω_i 域有关.假定在虚边界 S_i 上作用有未知待求的虚拟热源函数 $\omega^{(i)}(\xi) (\xi \in S_i)$, 于是,对于多域组合热传导问题的求解,可通过满足各子域的外部边界条件(亦满足整体域的外部边界上所给定的温度、热流密度边界值条件)和各相邻子域结合面 Γ_{ij} (内部边界)处温度及热流的连续性条件来建立关于各子域虚边界上未知待求虚拟热源函数 $\omega^{(i)}(\xi)$ 的方差泛函,即

$$J[\omega^{(1)}(\xi), \omega^{(2)}(\xi), \dots, \omega^{(n)}(\xi)] = \sum_{i=1}^n \left\{ \int_{\Gamma \cap \Gamma_i^t} \alpha_i [T^{(i)}(x) - \bar{T}^{(i)}(x)]^2 d\Gamma + \int_{\Gamma \cap \Gamma_i^q} \beta_i [q^{(i)}(x) - \bar{q}^{(i)}(x)]^2 d\Gamma \right\} + \sum_{J(\Gamma_{ij})} \left\{ \sum_{m=1}^{M_J} \alpha_J [T^{(i)}(x_m) - T^{(j)}(x_m)]^2 + \sum_{m=1}^{M_J} \beta_J [q^{(i)}(x_m) + q^{(j)}(x_m)]^2 \right\} \quad (1)$$

式中: n 为总的子域数; $\Gamma \cap \Gamma_i^t$, $\Gamma \cap \Gamma_i^q$ 分别为当前子域 Ω_i 的温度和热流密度边界(亦属于整体域的外部边界); $\bar{T}^{(i)}(x)$, $\bar{q}^{(i)}(x)$ 为对应边界上的已知温度和已知热流密度; J 为当前内部边界 Γ_{ij} 的编号; M_J 为对应内部边界的超额配点数; α_i , β_i 和 α_J , β_J 为相应的加权系数.在整体坐标下,结合面 Γ_{ij} 处的连续性条件有

$$\begin{cases} q^{(i)}(x_m) = -q^{(j)}(x_m) \\ T^{(i)}(x_m) = T^{(j)}(x_m) \end{cases} \quad \forall x_m \in \Gamma_{ij} \quad (2)$$

式(1)表示在外部边界上积分满足,在内部边界上超额配点满足.由于 Γ_i 上每一点 x 处的 $T^{(i)}(x)$, $q^{(i)}(x)$ 均为未知待求虚拟热源函数 $\omega^{(i)}(\xi)$ 的函数,故式(1)为多域组合热传导问题的方差泛函.

式(1)只能采用数值方法求解,也就是说只能将无穷维的问题化为有限维的问题求近似解.设 $Q^{(i)}$

为子域 Ω_i 所对应虚边界上虚拟热源函数的试探空间,则有 $\omega^{(i)}(\xi) \in Q^{(i)}$; 又设 $Q_{N_i}^{(i)}$ 是 $Q^{(i)}$ 的子空间,取试函数 $\tilde{\omega}^{(i)}(\xi) \in Q_{N_i}^{(i)} \subset Q^{(i)}$. 对 $\tilde{\omega}^{(i)}(\xi)$ 可采用类似于有限元法、样条函数法、无网格法等来构造,以虚边界上各单元的节点或一群离散点(无网格法)处的虚拟热源作为待求量. 设 n_i 为子域 Ω_i 所对应虚边界上的节点数,则对应该虚边界上未知节点虚拟热源个数为 $N_i = n_i$. 记整个求解问题各子域虚边界上节点虚拟热源未知待求量的总数为 N , 则有 $N = \sum_{i=1}^n N_i$. 记 $\tilde{\omega}^{(i)}$ 为子域 Ω_i 所对应的虚节点热源列向量,则有 $\tilde{\omega}^{(i)} = \{\tilde{\omega}_1^{(i)}, \tilde{\omega}_2^{(i)}, \dots, \tilde{\omega}_{N_i}^{(i)}\}^T$. 记 $\tilde{\omega}$ 为整体问题的未知待求节点虚拟热源向量,则有 $\tilde{\omega} = \{\{\tilde{\omega}^{(1)}\}^T, \{\tilde{\omega}^{(2)}\}^T, \dots, \{\tilde{\omega}^{(i)}\}^T, \dots, \{\tilde{\omega}^{(n)}\}^T\}^T$, 或记为 $\tilde{\omega} = \{\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2, \dots, \tilde{\omega}_s, \dots, \tilde{\omega}_N\}^T$. 通过对积分方程(1)的变分及对变分方程的离散化,可将方差泛函 $J[\omega^{(1)}(\xi), \omega^{(2)}(\xi), \dots, \omega^{(n)}(\xi)]$ 的零极小值问题化为子空间 $Q_{N_1}^{(1)}, Q_{N_2}^{(2)}, \dots, Q_{N_n}^{(n)}$ 中方差泛函 $J[\tilde{\omega}^{(1)}(\xi), \tilde{\omega}^{(2)}(\xi), \dots, \tilde{\omega}^{(n)}(\xi)]$ 的极小值问题,即

$$\delta J[\tilde{\omega}^{(1)}(\xi), \tilde{\omega}^{(2)}(\xi), \dots, \tilde{\omega}^{(n)}(\xi)] = 0 \quad (3)$$

式(3)称为最小二乘变分方程. 由这个方程可得

$$\frac{\partial J[\tilde{\omega}^{(1)}(\xi), \tilde{\omega}^{(2)}(\xi), \dots, \tilde{\omega}^{(n)}(\xi)]}{\partial \tilde{\omega}_s} = 0 \quad s = 1, 2, \dots, N \quad (4)$$

于是得到求解各虚边界上各节点处虚拟热源值的控制方程. 将式(4)写成矩阵形式,则有

$$\begin{bmatrix} \mathbf{G}_{N_1 \times N_1}^{(1)} & \mathbf{D}_{N_1 \times N_2}^{(2)} & \cdots & \mathbf{D}_{N_1 \times N_i}^{(i)} & \cdots & \mathbf{D}_{N_1 \times N_n}^{(n)} \\ \mathbf{D}_{N_2 \times N_1}^{(1)} & \mathbf{G}_{N_2 \times N_2}^{(2)} & \cdots & \mathbf{D}_{N_2 \times N_i}^{(i)} & \cdots & \mathbf{D}_{N_2 \times N_n}^{(n)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{D}_{N_i \times N_1}^{(1)} & \mathbf{D}_{N_i \times N_2}^{(2)} & \cdots & \mathbf{G}_{N_i \times N_i}^{(i)} & \cdots & \mathbf{D}_{N_i \times N_n}^{(n)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{D}_{N_n \times N_1}^{(1)} & \mathbf{D}_{N_n \times N_2}^{(2)} & \cdots & \mathbf{D}_{N_n \times N_i}^{(i)} & \cdots & \mathbf{G}_{N_n \times N_n}^{(n)} \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \tilde{\omega}_{N_1 \times 1}^{(1)} \\ \tilde{\omega}_{N_2 \times 1}^{(2)} \\ \vdots \\ \tilde{\omega}_{N_i \times 1}^{(i)} \\ \vdots \\ \tilde{\omega}_{N_n \times 1}^{(n)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{B}_{N_1 \times 1}^{(1)} \\ \mathbf{B}_{N_2 \times 1}^{(2)} \\ \vdots \\ \mathbf{B}_{N_i \times 1}^{(i)} \\ \vdots \\ \mathbf{B}_{N_n \times 1}^{(n)} \end{Bmatrix} \quad (5)$$

式中:系数矩阵是以子块形式表达的. 其中,对角线子块 \mathbf{G} 是关于子域 Ω_i 所形成的系数子阵;而非对角线子块 \mathbf{D} 是相邻子域的结合面处连续性条件的影响所形成的系数子阵; \mathbf{B} 为与已知边界条件对应的列向量. 由于方程(1)是方差泛函,故式(5)的系数矩阵具有对称性;另外,当 Ω_i 与 Ω_j 为非相邻子域时,则此时不存在结合面 Γ_{ij} ,这时相应的非对角线子块 \mathbf{D} 的系数应为零值,即 \mathbf{D} 为零子块. 总之,只要恰当地对各子域进行编号,最终可形成具有对称性的带状系数矩阵.

由式(5)求出 $\tilde{\omega}$ 后,可依据式(6)求解各子域 Ω_i 内和对应边界 Γ_i 上任一点 x 处的温度及其热流密度,即

$$\begin{cases} T^{(i)}(x) = \int_{S_i} T^*(x, \xi) \tilde{\omega}^{(i)}(\xi) dS(\xi) \\ q^{(i)}(x) = \int_{S_i} q^*(x, \xi) \tilde{\omega}^{(i)}(\xi) dS(\xi) \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (6)$$

式中: $T^*(x, \xi)$, $q^*(x, \xi)$ 分别为平面内源点 ξ 作用单位强度点热源而引起场点 x 处的温度及其热流密度的基本解^[8], 这里 x 表示子域 Ω_i 内及其边界 Γ_i 上的点, ξ 表示对应虚边界 S_i 上的点.

最后强调的是,虚边界元法解多域组合问题的思想非常容易蜕化到单域问题,即对解单域问题式(1)中的右端关于结合面处相关物理量的连续性条件不存在亦可.

2 虚边界元法解多域组合热弹性问题的基本思想

在不考虑体积力和惯性项时,均匀各向同性体的热弹性运动方程可简化为^[10]

$$u_{i,jj} + \frac{1}{1-2\nu} u_{j,ji} = \frac{2(1+\nu)}{1-2\nu} \lambda T_{,i} \quad (7)$$

式中: u_i 为 i 方向位移; ν 为泊松比; λ 为热膨胀系数; T 是温度场; $i = 1, 2$. 由方程(7)可知,满足这种非齐次方程的位移 u_i 可视为对应齐次方程的解 u_i^M 和由温度荷载(右端项)产生的特解 u_i^T 相加获得. 于是,有

$$u_i(x) = u_i^T(x) + u_i^M(x) \quad i = 1, 2 \quad (8)$$

需说明的是,从对应齐次方程的形式看, u_i^M 与温度场不直接相关,但对具体给定问题解, u_i^M 必须考虑包括由温度荷载引起的位移、应力在边界上的影响. 由此可知,解 u_i^M 属于常规的弹性力学问题(不考虑常规体力作用). 下面分别针对 u_i^T 和 u_i^M 的求解予

以较详细地阐述.

依据上文中的思想求解 u_i^T . 通过满足给定问题温度边界 $\Gamma \cap \Gamma_k^t$ 及 $\Gamma \cap \Gamma_k^q$ 上的已知温度和热流密度以及各相邻子域间温度和热流密度的连续性条件来求出虚边界上的虚拟热源函数 $\tilde{\omega}(\xi) = \{\tilde{\omega}^{(1)}(\xi), \tilde{\omega}^{(2)}(\xi), \dots, \tilde{\omega}^{(n)}(\xi)\}$, 再根据源点 ξ 作用单位强度点热源而引起场点 x 处的位移 $u_i^*(x, \xi)$ 和应力 $\sigma_{ij}^*(x, \xi)$ 的二维平面应变问题基本解^[1]

$$\begin{cases} u_i^* = -\frac{1}{8\pi k} \frac{1+\nu}{1-\nu} \lambda r_i (2\ln r + 1) \\ \sigma_{ij}^* = \frac{E\lambda}{8\pi k(1-\nu)} \left(2\ln r \delta_{ij} - 2 \frac{r_i r_j}{r^2} - \frac{1+2\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \right) \end{cases} \quad (9)$$

k 为导热系数, 并利用叠加原理可建立求解域内任意点 x 处仅由温度作用所产生的位移 $u_i^T(x)$ 、应力 $\sigma_{ij}^T(x)$ 的积分方程, 即

$$\begin{cases} u_i^T(x) = \int_{s_k} u_i^*(x, \xi) \tilde{\omega}^{(k)}(\xi) dS(\xi) \\ \sigma_{ij}^T(x) = \int_{s_k} \sigma_{ij}^*(x, \xi) \tilde{\omega}^{(k)}(\xi) dS(\xi) \end{cases} \quad i, j = 1, 2 \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (10)$$

当点 x 趋于各子域边界时, 仅由温度作用所产生的边界位移 $u_i^T(x)$ 和面力 $P_i^T(x)$ (如图2所示) 分别为

$$\begin{cases} u_i^T(x) = \int_{s_k} u_i^*(x, \xi) \tilde{\omega}^{(k)}(\xi) dS(\xi) \\ P_i^T(x) = \int_{s_k} \sigma_{ij}^*(x, \xi) n_j \tilde{\omega}^{(k)}(\xi) dS(\xi) \end{cases} \quad i, j = 1, 2 \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (11)$$

此处需强调的是, 通常情况下, 仅由式(11)所求出的“位移和面力”并不能直接满足原热弹性问题在当前子域 Ω_l 的外部边界 $\Gamma \cap \Gamma_l^t$ 和 $\Gamma \cap \Gamma_l^q$ (其中 Γ_l^t 和 Γ_l^q 分别是子域 Ω_l 的位移和面力边界的一般定义) 上所给定的已知位移 $\bar{u}_i(x)$ 和已知面力 $\bar{P}_i(x)$ (如图3所示), 及相邻子域结合面 Γ_{lk} 处位移和面力的连续

性条件. 也就是说, 在外部边界上

$$\begin{cases} u_i^T(x) \neq \bar{u}_i(x) & x \in \Gamma \cap \Gamma_l^t \\ P_i^T(x) \neq \bar{P}_i(x) & x \in \Gamma \cap \Gamma_l^q \\ i = 1, 2 \quad l = 1, 2, \dots, n \end{cases}$$

在内部边界上

$$\begin{cases} u_{i(l)}^T(x_m) \neq u_{i(k)}^T(x_m) \\ P_{i(l)}^T(x_m) \neq -P_{i(k)}^T(x_m) \end{cases} \quad i = 1, 2 \quad x_m \in \Gamma_{lk}$$

这因为, 原热弹性力学问题的位移解必须满足式(8), 亦在位移边界 $\Gamma \cap \Gamma_l^t$ 上必有 $u_i(x) = \bar{u}_i(x)$;

同理, 在应力边界 $\Gamma \cap \Gamma_l^q$ 上必有 $P_i(x) = \bar{P}_i(x)$.

解与 $u_i^M(x)$ 对应的新弹性力学问题. 由原热弹性问题在位移边界 $\Gamma \cap \Gamma_l^t$ 上必有 $u_i(x) = \bar{u}_i(x)$ 可知, 方程(7)对应齐次方程的解 u_i^M 在位移边界 $\Gamma \cap \Gamma_l^t$ 上必须满足下列所示位移 $\bar{u}_i^M(x)$ (如图4所示):

$$\bar{u}_i^M(x) = \bar{u}_i(x) - u_i^T(x) \quad x \in \Gamma \cap \Gamma_l^t \quad i = 1, 2 \quad (12)$$

同理, 在应力边界 $\Gamma \cap \Gamma_l^q$ 上必须满足下列所示面力:

$$\begin{aligned} \bar{P}_i^M(x) &= \bar{P}_i(x) - P_i^T(x) \\ x &\in \Gamma \cap \Gamma_l^q \quad i = 1, 2 \end{aligned} \quad (13)$$

而在相邻子域结合面 Γ_{lk} 处原热弹性力学问题必须满足位移 $u_{i(l)}(x_m) = u_{i(k)}(x_m)$ 和面力 $P_{i(l)}(x_m) = -P_{i(k)}(x_m)$ 的连续性条件, 即满足

$$\begin{cases} (u_i^T(x_m) + u_i^M(x_m))_{(l)} = (u_i^T(x_m) + u_i^M(x_m))_{(k)} \\ (P_i^T(x_m) + P_i^M(x_m))_{(l)} = -(P_i^T(x_m) + P_i^M(x_m))_{(k)} \end{cases} \quad i = 1, 2 \quad x_m \in \Gamma_{lk} \quad (14)$$

由外部边界条件式(12), (13)和内部连续性条件式(14)构成了与原热弹性问题所对应的新弹性力学问题, 而解此问题可采用多域组合弹性力学问题虚边界元法^[6]的思想.

于是, 原多域组合热弹性问题的位移、应力的全解分别为

$$u_i(x) = u_i^T(x) + u_i^M(x) \quad i = 1, 2 \quad (15)$$

$$\sigma_{ij}(x) = \sigma_{ij}^T(x) + \sigma_{ij}^M(x) \quad i, j = 1, 2 \quad (16)$$

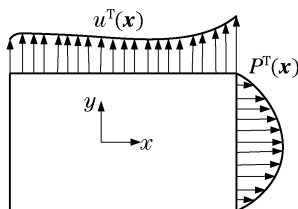


图2 温度荷载产生的位移和面力
Fig.2 Boundary conditions caused by temperature loads

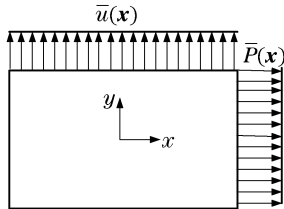


图3 实际边界条件
Fig.3 Real boundary conditions

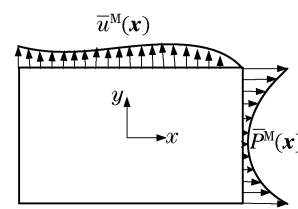


图4 新弹性力学问题的边界条件
Fig.4 Boundary conditions of new elastic mechanics problem

3 数值算例

算例 1 对边约束的方形薄板受均布温升,如图 5 所示.薄板边长 4 m,均布温升 ΔT 为 $1\text{ }^{\circ}\text{C}$;材料弹性模量 $E = 210\text{ GPa}$,泊松比 $\nu = 0.3$,线膨胀系数 $\lambda = 1.2 \times 10^{-5}\text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}$.

虚、实边界间距离取 1 m,每条虚、实边界各取 50 个线性单元,且每个单元均采用 2 个高斯积分点.本文方法和文献[4]中边界元法的计算结果与解析解的比较见表 1.由表 1 可知,相对于文献[4]的结果,本文解更逼近于解析解的结果,且其数值几乎相同.这主要因为本文方法所建立的积分方程是无奇异的,故在计算中不存在边界层效应.

表 1 位移和应力计算结果

Tab.1 Calculation results of displacement and stress

| 接近边界的点坐标 | | y 向位移 $u_y/10^{-5}\text{ m}$ | | | x 向应力 σ_x/MPa | | |
|--------------|--------------|--------------------------------|-----------|-----------|-------------------------------|-----------|-----------|
| x/m | y/m | 文献[4] | 本文解 | 解析解 | 文献[4] | 本文解 | 解析解 |
| 1.800 000 | 1.800 000 | 2.808 000 | 2.808 000 | 2.808 000 | -2.520 00 | -2.520 00 | -2.520 00 |
| 1.880 000 | 1.880 000 | 2.932 800 | 2.932 800 | 2.932 800 | -2.520 00 | -2.520 00 | -2.520 00 |
| 1.890 000 | 1.890 000 | 2.948 400 | 2.948 400 | 2.948 400 | -2.520 00 | -2.520 00 | -2.520 00 |
| 1.900 000 | 1.900 000 | 2.963 999 | 2.964 000 | 2.964 000 | -2.520 00 | -2.520 00 | -2.520 00 |
| 1.970 000 | 1.970 000 | 3.073 199 | 3.073 200 | 3.073 200 | -2.520 00 | -2.520 00 | -2.520 00 |
| 1.980 000 | 1.980 000 | 3.088 800 | 3.088 800 | 3.088 800 | -2.520 00 | -2.520 00 | -2.520 00 |
| 1.990 000 | 1.990 000 | 3.104 400 | 3.104 400 | 3.104 400 | -2.520 00 | -2.520 00 | -2.520 00 |
| 1.991 000 | 1.991 000 | 3.105 984 | 3.105 960 | 3.105 960 | -2.520 00 | -2.520 00 | -2.520 00 |
| 1.999 000 | 1.999 000 | 3.118 270 | 3.118 440 | 3.118 440 | -2.520 00 | -2.520 00 | -2.520 00 |
| 1.999 900 | 1.999 900 | 3.119 517 | 3.119 844 | 3.119 844 | -2.520 56 | -2.520 00 | -2.520 00 |
| 1.999 960 | 1.999 960 | 3.119 594 | 3.119 937 | 3.119 938 | -2.524 53 | -2.520 00 | -2.520 00 |
| 1.999 970 | 1.999 970 | 3.119 607 | 3.119 953 | 3.119 953 | -2.498 61 | -2.520 00 | -2.520 00 |
| 1.999 980 | 1.999 980 | 3.119 620 | 3.119 968 | 3.119 969 | -2.469 40 | -2.520 00 | -2.520 00 |
| 1.999 990 | 1.999 990 | 3.119 632 | 3.119 984 | 3.119 984 | — | -2.520 00 | -2.520 00 |
| 1.999 999 | 1.999 999 | 3.119 662 | 3.119 998 | 3.119 998 | — | -2.520 00 | -2.520 00 |

算例 2 受轴对称温度变化作用的厚壁圆筒如图 6 所示,不考虑体力的情况下其环向应力解析解为^[11]

$$\sigma_{\theta} = -\frac{E\lambda t_0}{2(1-\nu)}\left[\frac{\ln\frac{b}{r}-1}{\ln\frac{b}{a}}+\frac{\frac{b^2}{r^2}+1}{\frac{b^2}{a^2}-1}\right]$$

式中: r 为求解域内任一点的径向尺度.为了与解析

解作比较,对上式取内半径 $a = 3\text{ m}$,外半径 $b = 6\text{ m}$, $E = 69\text{ GPa}$, $\nu = 0.33$, $\lambda = 23 \times 10^{-5}\text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}$, $t_0 = 10\text{ }^{\circ}\text{C}$,按本文方法进行数值求解.

图 7 为在不同单元数的剖分下,厚壁圆筒径向各点的环向应力 σ_{θ} 按本文方法的计算结果与对应解析解的相对差值分布.图中曲线表明,各点环向应力 σ_{θ} 的计算精度随着单元数 N 的增加而提高.此分析也可视为对本文算法收敛性的数值论证.

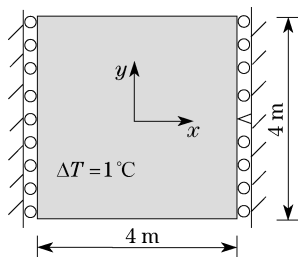


图 5 受均布温升的方板
Fig.5 A square plate with uniformly temperature change

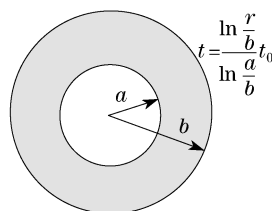


图 6 受轴对称温度变化的长圆柱
Fig.6 Long cylinder with symmetrical temperature change

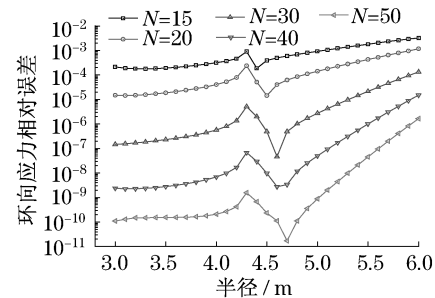


图 7 环向应力沿径向的相对误差分布
Fig.7 Relative error distribution of circumferential stress along the radial direction

算例3 图8为含有4个半径为 r 的圆形夹杂的正方形板,材料常数分别为:对于基体材料有 $E_0 = 4.0 \text{ GPa}$, $\nu_0 = 0.33$, $\lambda_0 = 1.0 \times 10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$;对于夹杂项有 $E_1 = 400 \text{ GPa}$, $\nu_1 = 0.2$, $\lambda_1 = 2.0 \times 10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$. 方板的边长为 $a = 1 \text{ m}$,而所含夹杂体积比为 $c = 4\pi r^2$ (夹杂半径 $r < 0.25 \text{ m}$). 图9给出了复合材料有效线膨胀系数随夹杂体积比 c 的变化曲线,并将其与细观力学分析方法 Mori-Tanaka 法^[12]进行了比较. 在图示的边界条件下,复合材料的有效线膨胀系数定义为 $\lambda_{\text{eff}} = u_{\text{equ}}$, u_{equ} 为 $x = a$ 处边界上各点水平位移 u_x 的平均值.

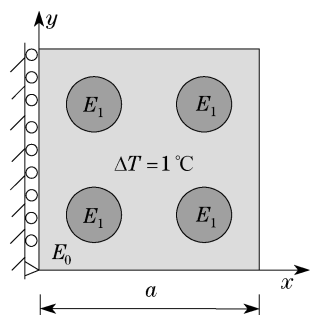


图8 含4个圆形夹杂的正方形板

Fig.8 A square plate with 4 circular inclusions

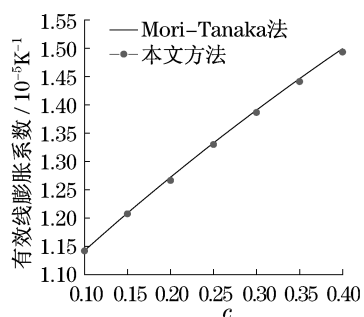


图9 有效线膨胀系数随夹杂体积比的变化曲线

Fig.9 Effective coefficient of heat expansion with different ceramic volume fraction

4 结论

(1) 依据多域组合虚边界元法思想,给出了多域组合热传导问题的求解格式.将原多域组合非耦合热弹性力学问题分解为可分别采用虚边界元法思想求解的热传导问题和与之对应的弹性力学问题,而原问题的解则视为上述二者解的叠加.相对传统边界元法,本方法不涉及由温度项所引起的域内积分.

(2) 由于本文方法积分方程的建立借鉴虚边界元法思想,故无需处理奇异积分.相对于边界元法,本文的数值计算精度、计算效率更高.

(3) 本文思想的应用性较广,可解含随机分布多夹杂、多裂纹的复合材料及各向异性材料的热弹性问题.

参考文献:

- [1] Sladek V, Sladek J. Boundary integral equation method in two-dimensional thermoelasticity[J]. Engng Anal, 1984, 1(3):135.
- [2] Ghosh N, Rajiyah H, Ghosh S. A new boundary element method formulation for linear elasticity[J]. J Appl Mech, 1986, 53(1):69.
- [3] Luo J F, Liu Y J, Berger E J. Analysis of two-dimensional thin structures (from micro- to nano-scales) using the boundary element method[J]. Computational Mechanics, 1998, 22(5):404.
- [4] 周焕林, 牛忠荣, 王秀喜. 二维热弹性力学边界元法中几乎奇异积分的正则化[J]. 固体力学学报, 2004, 25(2):144. ZHOU Huanlin, NIU Zhongrong, WANG Xiuxi. The regularization of nearly singular integrals in the bem of two-dimensional thermoelasticity[J]. Acta Mechanica Solida Sinica, 2004, 25(2):144.
- [5] 王元淳. 平面非定常热弹性问题的边界元分析[J]. 上海交通大学学报, 1988, 22(2):48. WANG Yuanchun. Boundary element analysis of plane unsteady thermoelastic problems[J]. Chinese Quarterly of Mechanics, 2004, 25(2):144.
- [6] 许强, 孙焕纯. 厚壳三维分析的虚边界元最小二乘法[J]. 大连理工大学学报, 1996, 36(4):413. XU Qiang, SUN Huanchun. Virtual boundary element least square method for solving three dimensional problems of thick shell[J]. Journal of Dalian University of Technology, 1996, 36(4):413.
- [7] 许强, 孙焕纯. 虚边界元最小二乘配点法[J]. 计算力学学报, 1997, 14(2):166. XU Qiang, SUN Huanchun. Virtual boundary element-least square collocation method[J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 1997, 14(2):166.
- [8] 孙焕纯, 张立洲, 许强, 等. 无奇异边界元法[M]. 大连: 大连理工大学出版社, 1999. SUN Huanchun, ZHANG Lizhou, XU Qiang. Nonsingularity boundary element methods[M]. Dalian: Dalian University of Technology Press, 1999.
- [9] 许强, 鲁鑫, 王海亮. 多域组合问题虚边界元法的求解[J]. 哈尔滨工程大学学报, 2006, 27(3):339. XU Qiang, LU Xin, WANG Hailiang. Virtual boundary element method for solving the problems of multi-domain composite structures[J]. Journal of Harbin Engineering University, 2006, 27(3):339.
- [10] 王洪刚. 热弹性力学概论[M]. 北京: 清华大学出版社, 1988. WANG Honggang. An introduction to thermoelasticity[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 1988.
- [11] Timoshenko S P, Goodier J N. Theory of elasticity[M]. 3rd ed. New York: McGraw-Hill Book Company, 1970.
- [12] 沈观林, 胡更开. 复合材料力学[M]. 北京: 清华大学出版社, 2006. SHEN Guanlin, HU Gengkai. Mechanics of complex materials[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2006.