第 38 卷第 9 期
2010 年 9 月

同 济 大 学 学 报(自 然 科 学 版)
JOURNAL OF TONGJI UNIVERSITY(NATURAL SCIENCE)

Vol. 38 No. 9
Sep. 2010

文章编号：0253-374X(2010)09-1392-05　　DOI:10.3969/j.issn.0253-374x.2010.09.027

欧式信用价差期权的定价

任学敏，边保军
(同济大学 数学系，上海 200092)

摘要：除了利率风险外，投资者购买企业债券后可能会因企业破产和经营不善而遭受损失.许多金融机构推出了类似保险的违约互换和信用价差期权为投资者因企业破产和经营不善而遭受的损失提供保护.利用首次通过模型，把信用价差期权看成是公司资产值和短期利率的带障碍的复合期权，用偏微分方程的方法给出显式定价公式并用数值方法分析了其金融意义.

关键词：企业债券；信用价差期权；首次通过模型
中图分类号：F 83　　**文献标识码**：A

Pricing European Style Credit Spread Option

REN Xuemin, *BIAN Baojun*
(Department of Mathematics, Tongji University, Shanghai 200092, China)

Abstract: Besides the risk of interest rate, investors may also suffer economic losses due to an enterprise's bankruptcy and ill-management, therefore, the credit default swap and credit spread option are put forward for the sake of the investers. Based on the first passage model and PDE, the closed-form solution is obtained with the credit spread option as the compound option of the firm value and the short interest rate with barrier. The financial meanings are analyzed by numerical results.

Key words: corporate bond; credit spread option; first passage time model

目前对企业债的定价主要有两种方法：结构化方法和约化方法.结构化方法把公司资产值作为衡量标准.如果资不抵债，公司资产将被拍卖以偿债.结构化方法最早是由 Merton 等人[1-2]提出的.但这个简单模型加了一些很强的假设，如利率是常数，公司在债券到期前不违约等.为克服这些缺陷，Black 和 Cox[3]提出首次通过模型.它假定公司资产在存续期内一旦达到违约边界 $Ke^{-\gamma(T-t)}$(K,γ 为常数，T 为债券到期日，t 为到期日前任一时刻)时即违约. Longstaff 和 Schwartz[4]引入随机利率，假定违约边界是常数，这时债券价格不存在显式解，Briys 和 de Varenne[5]对其作了改进，假定违约边界为 $KD(t,r,T)$，$D(t,r,T)$为具有同样到期日的国债零息票.约化方法由 Jarrow，Duffie 等[6-7]提出，直接对违约时间给出模型，把违约看成是完全不可预料的.

公司债券既有利率风险，也有信用风险.作为管理信用风险的工具，信用衍生物受到市场的欢迎.可分为两类，一是违约互换合约，购买者在公司债券违约时，其损失部分将由合约出售方偿付；二是信用价差期权，它不对违约进行保护，而对信用等级下降导致投资人的损失提供保护. Das[8]利用 Merton 模型对其进行定价，但模型过于简单. Longstaff 和 Schwartz[9]直接根据公司债券与国债的收益率价差建立模型，给出了该类欧式期权的定价公式，但模型中的参数不可直接观察.本文利用结构化方法中的首次通过模型，把该期权看成是公司资产值和短期利率的带障碍的复合期权，给出显式定价公式，其参数可从公司财务报表和公司股票价格中推出.

1　数学模型

1.1　基本假定(对发行债券的公司)

(1) 假定发行债券的公司的资产值 V 在风险中性测度下满足随机微分方程

$$dV = Vrdt + \sigma VdZ_1$$

式中：r 为短期利率；σ 为波动率，是常数；Z_1 是标准 Wiener 过程.

收稿日期：2009-06-08
基金项目：国家“九七三”重点基础研究发展计划资助项目(2007CB814903)；国家自然科学基金资助项目(10671103)
作者简介：任学敏(1962—)，男，副教授，硕士生导师，理学博士，主要研究方向为金融数学. E-mail:renxuemin@citiz.net
边保军(1962—)，男，教授，博士生导师.理学博士，主要研究方向为金融数学. E-mail:bianbj@tongji.edu.cn

(2) 短期利率 r 的模型为 Vasicek[10] 模型

$$dr_t = (\alpha - \beta r_t)dt + \eta dZ_2 \qquad (2)$$

式中：α，β，η 是常数；Z_2 是标准 Wiener 过程，$\mathrm{Cov}(dZ_1, dZ_2) = \rho dt(|\rho| < 1)$.

(3) 公司发行了总面值为 K 到期日为 T 的零息票企业债券，违约边界为 $KD(r,t;T)$.

(4) 公司一旦破产，由于拍卖，资产值将由 KD 变成 $(1-\omega)KD$，$0 \leqslant \omega \leqslant 1$. 常数 ω 称破产成本. 即每份债券在违约日可得 $(1-\omega)D$，或等价地在到期日得 $(1-\omega)$.

1.2 关于信用价差期权的假定

(1) 期权是欧式的，到期日 $T_1 < T$，T 为公司债券的到期日.

(2) 对企业债和国债设定一个收益率价差，记 $P(V,r,t;T)$ 为公司债券在 t 时刻的价值. 当 $P(V,r,T_1;T)$ 低于 $D(r,T_1;T)e^{-k(T-T_1)}$（常数 k 为敲定的收益率价差）时，期权购买人将获得它们之间差额部分的赔偿. 由于同样到期日和收益率的企业债券的价格一定低于国债的价格，从而 $k>0$；又信用价差期权不为违约提供保护，因此 $P(V,r,T_1;T)$ 一定大于违约时债券的价值，即 $P(V,r,T_1;T) > (1-\omega)D(r,T_1;T)$，也就是 $k < -\dfrac{\ln(1-\omega)}{T-T_1}$. 记 V^* 是使 $P(V^*,r,T_1;T) = D(r,T_1;T)e^{-k(T-T_1)}$ 成立的值，由于企业债券的价值关于其资产值是单调上升的，这样的 V^* 是唯一的. 如公司在 T_1 前破产，则期权自然中止，其价值自然为零；否则在 T_1 时刻，如把 $P(V,r,T_1;T)$ 表示成 $P(V,r,T_1;T) = D(r,T_1;T)e^{-d(T-T_1)}$，则 $d>k$ 时，即与国债的收益率价差超过敲定的收益率价差，这时期权买方可获得收益为

$$P(V^*,r,T_1;T) - P(V,r,T_1;T) \qquad (3)$$

$d \leqslant k$ 时为零. 由于不保护违约，T_1 时刻的期权的收益为

$$H(V_{T_1} - KD(r,T_1;T))(P(V^*,r,T_1,T) - P(V,r,T_1,T))^+ \qquad (4)$$

这里，$H(x)$ 是 Heviside 函数. 即该期权不对公司破产导致债券持有人的损失赔付. 由于采用与国债的价差，它基本上不对由于利率上升导致的公司债券价格的下降提供保护.

2 问题的求解

公司债券和信用价差期权显然都是公司资产 V 和短期利率 r 的衍生物，因此它们满足相同的偏微分方程，只是终值和边值的条件不同. 令 $X = V/K$，则在风险中性鞅测度下，$dX = rXdt + \sigma XdZ_1$. 而 X 可看成是公司的财务杠杆比.

2.1 公司债券价格的确定

设 $P(X,r,t;T)$ 为公司零息票债券的价格，$D(r,t;T)$ 为相应的零息国债，则在 Vasicek 模型下[10]，可得到

$$D(r,t;T) = e^{(A(T-t)-rB(T-t))} \qquad (5)$$

这里

$$B(t) = \frac{1-e^{-\beta t}}{\beta},$$

$$A(t) = \frac{(B(t)-T+t)(\alpha\beta - \eta^2/2)}{\beta^2} - \frac{\eta^2 B^2(t)}{4\beta^2} \qquad (6)$$

而 $P(X,r,t;T)$ 满足

$$\begin{cases} LP = 0, \quad X > D(r,t;T), r \in R, 0 \leqslant t \leqslant T \\ P(D(r,t;T),r,t;T) = (1-\omega)D(r,t;T), \\ \quad 0 \leqslant t \leqslant T, r \in R \\ P(X,r,T;T) = 1, \quad X > 1, r \in R \end{cases} \qquad (7)$$

$$LP = \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2}X^2\frac{\partial^2 P}{\partial X^2} + \rho\sigma\eta X\frac{\partial^2 P}{\partial X\partial r} + \frac{\eta^2}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + rX\frac{\partial P}{\partial X} + (\alpha - \beta r)\frac{\partial P}{\partial r} - rP$$

用零息国债 $D(r,t;T)$ 作为计价单位，令 $\hat{P}_t = P_t/D_t$，$Z_t = X_t/D_t$，问题(7)化为一维问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \hat{P}}{\partial t} + \dfrac{1}{2}\hat{\sigma}^2(t)Z^2\dfrac{\partial^2 \hat{P}}{\partial Z^2} = 0, \quad Z > 1, 0 \leqslant t \leqslant T \\ \hat{P}(Z_T,T;T) = 1, \quad Z > 1 \\ \hat{P}(1,t;T) = 1-\omega, \quad 0 \leqslant t \leqslant T \end{cases} \qquad (8)$$

这里 $\hat{\sigma}^2(t) = \dfrac{1}{D^2}\left(\dfrac{\partial D}{\partial r}\right)^2\eta^2 + \sigma^2 - 2\rho\eta\sigma\dfrac{1}{D}\dfrac{\partial D}{\partial r} = B^2(T-t)\eta^2 + \sigma^2 + 2\rho\eta\sigma B(T-t)$.

注意到 $\hat{\sigma}^2(t)$ 与 r 无关，由极值原理，$\hat{P}(Z,t;T)$ 只在区域 $\widetilde{\Sigma}$ 边界上取最大最小值，即在区域内部有 $1-\omega < \hat{P}(Z,t;T) < 1$. 敲定收益率差 k 满足 $1-\omega < e^{-k(T-T_1)} < 1$. 由连续性，一定有 Z 使 $\hat{P}(Z,T_1;T) = e^{-k(T-T_1)}$，且这样的 Z 是唯一的，因为 $\hat{P}(Z,t;T)$ 关于 Z 单调上升，这同样可由极值原理得到.

令 $\tau=\int_0^t\hat{\sigma}^2(\xi)\mathrm{d}\xi, T^*=\int_0^T\hat{\sigma}^2(\xi)\mathrm{d}\xi, x=\ln Z, \xi=T^*-\tau$ 并取 $\hat{W}=\mathrm{e}^{-\left(\frac{x}{2}-\frac{\xi}{8}\right)}[\hat{P}-(1-\omega)]$,问题(8)化为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\hat{W}}{\partial\xi}-\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2\hat{W}}{\partial x^2}=0, & x>0, 0\leqslant\xi\leqslant T^* \\ \hat{W}(x,0)=\mathrm{e}^{-x/2}\omega, & 0<x<\infty \\ \hat{W}(0,\xi)=0, & 0\leqslant\xi\leqslant T^*\end{cases}\tag{9}$$

由镜像法[11-12],先在区域$\{-\infty<x<+\infty, 0\leqslant\xi\leqslant T^*\}$上解柯西问题,然后把解限制在区域$\{x>0, 0\leqslant\xi\leqslant T^*\}$上,即可得到问题(9)的解

$$\hat{W}(x,\xi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\xi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{(x-s)^2}{2\xi}}W(s,0)\mathrm{d}s=$$
$$\omega\left[\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}+\frac{\xi}{8}}N\left(x-\frac{\xi}{2}\right)-\mathrm{e}^{\frac{x}{2}+\frac{\xi}{8}}N\left(-x-\frac{\xi}{2}\right)\right]$$

式中:$N()$为标准正态分布函数.代回原变量,得

$$P_t=D_t\hat{P}=D_t(1-\omega)+$$
$$D_t\omega\left[\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}+\frac{T^*-\tau}{8}}N\left(x-\frac{T^*-\tau}{2}\right)-\right.$$
$$\left.\mathrm{e}^{\frac{x}{2}+\frac{T^*-\tau}{8}}N\left(-x-\frac{T^*-\tau}{2}\right)\right]$$

式中:$x=\ln\dfrac{V}{KD}$;$\tau=\int_0^t\hat{\sigma}^2(\zeta)\mathrm{d}\zeta$;$T^*=\int_0^T\hat{\sigma}^2(\zeta)\mathrm{d}\zeta$.

2.2 信用价差期权的定价

记期权的价值为 $W(V,r,t;T_1)$,则其满足

$$\begin{cases}LW=0, & X>D(r,t,T), 0\leqslant t\leqslant T_1, r\in\mathbf{R} \\ W(D,r,t;T_1)=0, & 0\leqslant t\leqslant T_1, r\in\mathbf{R} \\ W(X_{T_1},r,T_1;T_1)=H(X_{T_1}-D_{T_1})\cdot \\ \quad (P(X_{T_1}^*,r,T_1;T)-P(X_{T_1},r,T_1;T))^+\end{cases}$$

这里,$X_{T_1}^*$满足 $P(X_{T_1}^*,r,T_1;T)=D(r,T_1;T)\cdot\mathrm{e}^{-k(T-T_1)}$,令 $\hat{W}=\dfrac{W}{D_t}$,$\hat{P}_t=\dfrac{P_t}{D_t}$,$Z_t=\dfrac{X_t}{D_t}$,再令 $x=\ln Z$,$\tau=\int_0^t\hat{\sigma}^2(s)\mathrm{d}s$,$T_1^*=\int_0^{T_1}\hat{\sigma}^2(s)\mathrm{d}s$,$T^*=\int_0^T\hat{\sigma}^2(s)\mathrm{d}s$,$\xi=T_1^*-\tau$,$\widetilde{W}=\mathrm{e}^{-\left(\frac{x}{2}-\frac{\xi}{8}\right)}\hat{W}$,并注意到 $H(\mathrm{e}^x-1)=H(x)$,则可化为一维问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\widetilde{W}}{\partial\xi}-\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2\widetilde{W}}{\partial x^2}=0 \\ \widetilde{W}(0,\xi)=0 \\ \widetilde{W}(x,0)=\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}H(x)(\mathrm{e}^{-k(T-T_1)}-\hat{P}(x,T_1;T))^+\end{cases}\tag{11}$$

由前面证明过程,$\hat{P}(x,T_1;T)$关于 x 单调上升,记 x^* 为使 $\hat{P}(x^*,T_1;T)=\mathrm{e}^{-k(T-T_1)}$成立的值,注意到在 T_1 时刻有 $\hat{P}(x,T_1;T)=(1-\omega)+\omega\left(N\left(\dfrac{x-\frac{\mu}{2}}{\mu}\right)-\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\cdot N\left(\dfrac{-x-\frac{\mu}{2}}{\mu}\right)\right)$,因此

$$\mathrm{e}^{-k(T-T_1)}=(1-\omega)+\omega\left(N\left(\frac{x-\frac{\mu}{2}}{\mu}\right)-\right.$$
$$\left.\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}N\left(\frac{-x-\frac{\mu}{2}}{\mu}\right)\right)\tag{12}$$

这里$\mu=T^*-T_1^*=\int_{T_1}^T\hat{\sigma}^2(s)\mathrm{d}s$,于是可知 $\widetilde{W}(x,0)$ 在区间$[0,x^*]$外为零.

类似地,对方程(11)先作奇延拓化为柯西问题,求解后再把解限制在 $x\geqslant0$ 可得

$$\widetilde{W}(x,\xi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\xi}}\int_0^\infty(\mathrm{e}^{-\frac{(x-s)^2}{2\xi}}-\mathrm{e}^{-\frac{(x+s)^2}{2\xi}})\widetilde{W}(s,0)\mathrm{d}s=$$
$$a_1\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}+\frac{\xi}{8}}[N(d_1)-N(d_2)]-a_1\mathrm{e}^{\frac{x}{2}+\frac{\xi}{8}}[N(d_3)-$$
$$N(d_4)]-\omega\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}+\frac{\xi}{8}}[N(d_1,d_{11})-N(d_2,d_{11})]+$$
$$\omega\mathrm{e}^{\frac{x}{2}+\frac{\xi}{8}}[N(d_3,d_{12})-N(d_4,d_{12})]+$$
$$\omega\mathrm{e}^{\frac{x}{2}+\frac{\xi}{8}}[N(d_5,d_{21})-N(-d_4,d_{21})]-$$
$$\omega\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}+\frac{\xi}{8}}[N(d_6,d_{22})-N(-d_2,d_2)]$$

式中:$a_1=\mathrm{e}^{-k(T-T_1)}-(1-\omega)$;$d_1=\dfrac{x^*-x+\frac{\xi}{2}}{\sqrt{\xi}}$;$d_2=\dfrac{-x+\frac{\xi}{2}}{\sqrt{\xi}}$;$d_3=\dfrac{x^*+x+\frac{\xi}{2}}{\sqrt{\xi}}$;$d_4=\dfrac{x+\frac{\xi}{2}}{\sqrt{\xi}}$;$d_5=\dfrac{x^*-x-\frac{\xi}{2}}{\sqrt{\xi}}$;$d_6=\dfrac{x^*+x-\frac{\xi}{2}}{\sqrt{\xi}}$;$d_{11}=\dfrac{s\sqrt{\xi}+x-\frac{\xi}{2}-\frac{\xi_T}{2}}{\sqrt{\xi_T}}$;$d_{12}=\dfrac{s\sqrt{\xi}-x-\frac{\xi}{2}-\frac{\xi_T}{2}}{\sqrt{\xi_T}}$;$d_{21}=\dfrac{-s\sqrt{\xi}-x-\frac{\xi}{2}-\frac{\xi_T}{2}}{\sqrt{\xi_T}}$;$d_{22}=\dfrac{-s\sqrt{\xi}+x-\frac{\xi}{2}-\frac{\xi_T}{2}}{\sqrt{\xi_T}}$;$\xi_T=T^*-T_1^*$.回到原变量可得

$$W\left(\frac{V}{K},r,t\right)=$$

$$D_t\sqrt{\frac{V}{DK}}\,\mathrm{e}^{-\frac{\int_t^{T_1}\hat{\sigma}^2(s)\mathrm{d}s}{8}}\,\widetilde{W}\left(\ln\frac{V}{DK},\int_t^{T_1}\hat{\sigma}^2(s)\mathrm{d}s\right)$$

3　数值结果和分析

由期权和公司债券的特性可知，当期权的到期日与债券的到期日非常接近时，期权价值几乎为零，原因是债券是否违约的不确定性大为降低且在两个到期日相同时期权价值为零，而期权价值关于其到期日是连续的．为了清楚地看出某个因素对期权价值的影响，取参数值为 $\sigma=0.2,\eta=0.1,\frac{V}{K}=2,k,\omega=0.4,\rho=0.4,\alpha=0.379,r_0=0.05,T=10$ 不变，除非单独考虑该参数的影响．从图 1 可知，要求的敲定收益率价差越大则期权价值越低，其金融意义是明显的，因为只有超过敲定收益率价差部分才能得到赔偿．图 2 显示出财务杠杆比对期权价值的影响，比率 $\frac{V}{K}$ 越大表示公司债务在总资产中的比率越低，公司违约和信用等级下降的可能也越低，从而期权的价值也越低．图 3 显示了债券发行时的短期利率对期权价值的影响，短期利率越高，则由于信用风险导致的国债与企业债券的价差越小，从而期权价值越低．图 4 表明公司资产的波动率越大，则期权的价值越大，因为这时企业信用等级下降的可能增大了．特别需要指出的是，图 1—4 的图形都呈驼峰状，这与理论和实证中发现的公司最可能在债券存续期的中间发生违约是一致的，由于在连续模型下，公司财务状况的变化是一个渐进的过程，而第二类欧式信用价差期权不保护违约情况，因此其价值的峰值出现的更早，且违约可能越大，出现的也越早．

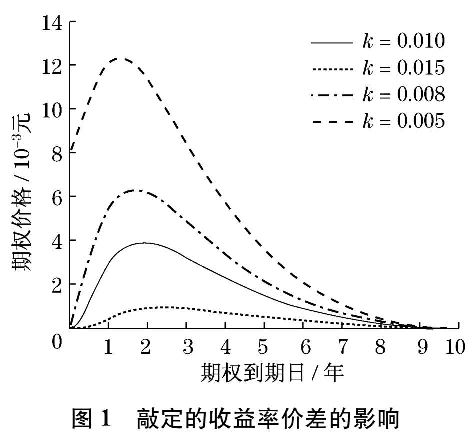

图 1　敲定的收益率价差的影响

Fig.1　Impact of the strike spread of the return rate

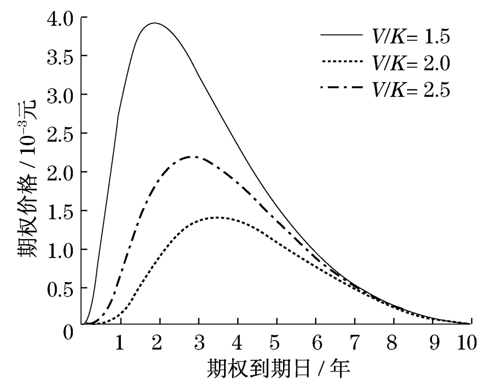

图 2　财务杠杆比的影响

Fig.2　Impact of the finance leverage ratio

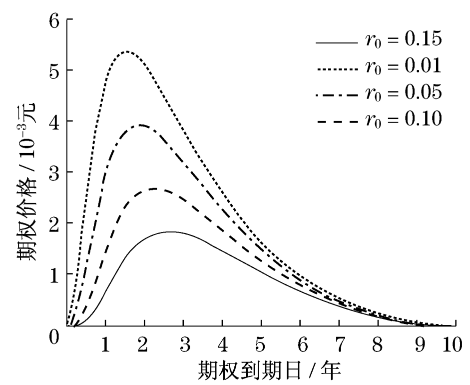

图 3　初始利率的影响

Fig.3　Impact of the initial interest rate

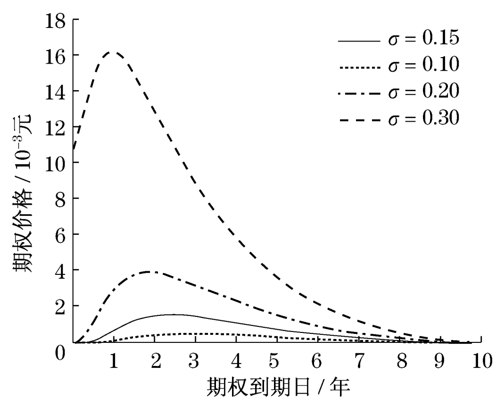

图 4　公司资产波动率的影响

Fig.4　Impact of the volatility of firm asset

4　结论

第二类欧式信用价差期权作为保护公司债券投资人免受在债券到期日前由于公司经营恶化（但公司未破产）引起的债券价格下跌影响的工具，其价值可由处理公司债券定价的首次通过模型来确定，影响其价值的主要因素有公司资产波动率、初始利率、

财务杠杆比和敲定的收益率价差等.购买者可根据自身的风险承受力决定受保护的强度,即敲定的收益率价差的大小.

参考文献:

[1] Black F, Scholes M. The pricing of options and corporate liabilities[J]. Journal of Political Economy, 1973, 81: 637.

[2] Merton R. On the pricing of corporate debt: the risk structure of interest rates[J]. Journal of Finance, 1974, 29: 449.

[3] Black F, Cox J C. Valuing corporate securities: some effects of bond indenture provisions [J]. Journal of Finance, 1976, 31: 351.

[4] Longstaff F, Schwartz E. A simple approach to valuing risky fixed and floating rate debt [J]. Journal of Finance, 1995, 50: 789.

[5] Briys E, de Varenne F. Valuing risky fixed rate debt: an extension[J]. Journal of Financial and Quantitative Analysis, 1997, 32(2): 239.

[6] Jarrow R, Turnbull S. Pricing derivatives on financial securities subject to credit risk[J]. Journal of Finance, 1995, 50: 53.

[7] Duffie D, Singleton K J. Modeling term structure of defaultable bonds[J]. Review of Financial Studies, 1999, 12: 687.

[8] Das S R. Credit Risk Derivatives [J]. Journal of derivatives, 1995, 2(3): 7.

[9] Longstaff F, Schwartz E. Valuing credit derivatives[J]. Journal of Fixed Income, 1995, 5(1): 6.

[10] Vasicek O. An equilibrium characterization of the term structure [J]. The Journal of Financial Economics, 1977, 5: 177.

[11] 姜礼尚.期权定价的数学模型和方法[M].北京:高等教育出版社,2003.
JIANG Lishang. The mathematical models and methods in option pricing[M]. Beijing: Higher Education Press, 2003.

[12] 姜礼尚,孙和生,陈志浩,等.偏微分方程选讲[M].北京:高等教育出版社,1997.
JIANG Lishang, SUN Hesheng, CHEN Zhihao, et al. Some topics on partial differential equation[M]. Beijing: Higher Education Press, 1997.

(上接第1366页)

(2) 通过制动试验与仿真计算对照,得到了制动过程列车车轮的瞬态温度场的实际分布状况、热量在制动车轮的传递过程、温度随时间的变化规律以及最高温度出现位置和变化范围.可进一步分析判断车轮踏面制动热容量极限和变化规律.

(3) 通过选择不同的物理、技术参数,进行车轮瞬态温度场模型仿真计算,得到各要素对踏面制动过程的影响,可进一步从热容量的角度提出基础制动的基本指标和结构要求.

(4) 为国内发展快速重载货物列车的制动方式、制动技术参数确定提供比较可信的理论分析,为确定车轮踏面制动极限和作用方式、列车制动距离等技术规范提供计算依据.

参考文献:

[1] 马大炜.铁道车辆制动热负荷的计算及应用[J].中国铁道科学,2000,21(4):35.
MA Dawei. Calculation and application of braking heat load on railway car[J]. China Railway Science, 2000, 21(4): 35.

[2] 梁雄,卢立丽,伍晓宇.车轮踏面制动的热-机耦合数值模拟[J].中国制造业信息化,2007,36(5):83.
LIANG Xiong, LU Lili, WU Xiaoyu. The numerical simulation of thermal-mechanics coupling for wheel tread brake [J]. Manufacture Information Engineering of China, 2007, 36(5): 83.

[3] 虞丽娟.机车车轮瞬态温度场的有限元研究[J].铁道学报,1993,15(3):11.
YU Lijuan. A study of the transient temperature field of locomotive wheels by finite element method[J]. Journal of the China Railway Society, 1993, 15(3): 11.

[4] 孔祥安,王琪.摩擦接触热传导有限元研究[J].高分子材料科学与工程,1996,11(6):16.
KONG Xiang'an, WANG Qi. Fem heat transfer approach for thermal contact with friction[J]. Polymeric Materials Science and Engineering, 1996, 11(6): 16.

[5] VEN J M.轴重22.5 t UIC踏面制动车轮与盘形制动车轮相比较的数值模拟[C]//第十一届国际轮轴会议论文集.北京:中国铁道学会,1997:222-225.
VEN J M. The numerical simulation on axle-load 22.5t UIC wheel tread braking compared to disc braking[C]// Eleventh International Conference Essays on Wheel-Axle. Beijing: China Railway Society, 1997: 222-225.

[6] 张天孙.传热学[M].第2版.北京:中国电力出版社,2006.
ZHANG Tiansun. Heat transfer [M]. 2nd ed. Beijing: China Electric Power Press, 2006.

[7] Fuoco R, Ferreira M M, Azevedo C R F. Failure analysis of a cast steel railway wheel[J]. Engineering Failure Analysis, 2004(11): 817.