

基于指数效用函数的企业年金最优投资策略

朱茂然, 郭磊, 苏涛永

(同济大学 经济与管理学院, 上海 200092)

摘要: 在两资产世界和指数效用函数假定下, 构建了反映员工自主决策的缴费确定型企业年金计划——退休前有固定投入、退休后有固定支出的连续时间随机动态规划模型, 求出了退休前和退休后最优投资策略. 发现最优风险资产投资比重直接取决于企业年金基金积累与连续时间无风险利率的速度. 如果基金积累超过连续时间无风险利率, 则该比重随着时间推移而降低, 反之则随时间推移而提高, 如果二者速度相当则保持稳定. 缴费投入越多则最优风险资产投资比重越低, 消费支出越大则最优风险资产投资比重越大. 大规模的 Monte Carlo 模拟证明了理论推导.

关键词: 指数效用函数; 企业年金; 投资策略

中图分类号: F 830; C 979

文献标识码: A

Optimal Investment Strategy for Occupational Pension Based on Exponential Utility Function

ZHU Maoran, GUO Lei, SU Taoyong

(College of Economics and Management, Tongji University, Shanghai 200092, China)

Abstract: In a two-asset world a continuous time stochastic dynamic programming model, which involves constant contributions before retirement and constant expense after retirement, is set up to find the optimal investment strategy for defined contributions occupational pension schemes in which the employees with exponential utility function make decisions by themselves. It's found that the optimal proportion invested in risky asset depends on the speed of pension assets and the risk-free rate. And the proportion decreases with time if the speed of pension assets is higher while the proportion increases if it is lower. In particular, the proportion will be stable if there is the same speed. Furthermore, the proportion decreases with the contribution and increases with the expense. The massive Monte Carlo simulations prove that.

Key words: occupational pension; exponential utility function; investment strategy

员工自主决策的缴费确定型(DC)企业年金计划, 其最优投资策略的主要影响因素之一是偏好结构. 在理论研究中, 不同的偏好结构设定将导致不同的结论: 在以特定投资收益目标为基础的偏好下, 无论是退休前还是退休后, 风险资产的投资比重都在逐步下降^[1-4]; 按对数效用函数, 退休前的投资结论相同^[5]; 按常相对风险规避系数(CRRA)效用函数, 退休前的投资结论相同, 但退休后最优风险资产投资比重将逐步提高^[6]; 按递归偏好, 员工甚至不愿投资而只愿消费^[7-8]. 而在实践中, 一种逐步降低风险资产投资比重的“生命风格”——lifestyle 投资策略广为应用^[9], 并在实证研究中取得良好的效果^[10]. 可以看出, 员工自主决策的缴费确定型企业年金计划, 其最优投资策略缺乏理论上的统一, 其实际操作缺乏足够的理论支持. 笔者将在前人研究的基础上, 进一步拓展偏好结构对企业年金最优投资决策的影响研究, 考察指数效用函数下企业年金的最优投资决策问题.

1 模型建立

市场由一种无风险证券和一种风险证券构成, 其价格 X_1 服从如下微分方程:

$$dX_1(t) = rX_1(t)dt \quad (1)$$

风险证券的价格 X_2 服从如下微分方程:

$$dX_2(t) = \alpha X_2(t)dt + \sigma X_2(t)d\omega(t) \quad (2)$$

式中: t 为时间; r 为无风险利率, α 为风险证券期望收益率, σ 为扩散系数, 均为常数, 且 $r < \alpha$; ω 是一个标准布朗运动.

参加企业年金计划的员工具有指数型效用函数

$$U(F) = -e^{-cF}/c, \quad c > 0 \quad (3)$$

式中, F 是某时刻的企业年金基金的积累额. 该函数的绝对风险规避系数是一个常数

$$-U''(F)/U'(F) = c$$

决策问题可以分成两个阶段.

第一个阶段是退休前: $t \in [0, N]$. N 表示事先给定的退休时间. 在这个阶段, 每年都有一个固定的缴费金额 P 投入企业年金基金, 企业年金基金在市场中投资, 企业年金基金积累 F 服从如下微分方程:

$$dF(t) = [F(t)(u(t)\alpha + (1-u(t))r) + P]dt + F(t)u(t)\sigma d\omega(t), \quad t \in [0, N] \quad (4)$$

$$F(0) = P \quad (5)$$

式中: $F(t)$ 为第 t 年企业年金基金积累的数额; $u(t)$ 为投资在风险证券上的比重; $1-u(t)$ 为投资在无风险证券上的比重.

第二个阶段是退休后: $t \in [N, N+T]$. $N+T$ 表示事先给定的停止自由投资的时间. 在这个阶段, 每年都有一个固定的消费支出 B , 剩余的基金在市场中投资, 企业年金基金积累 F 服从如下微分方程:

$$dF(t) = [F(t)(u(t)\alpha + (1-u(t))r) - B]dt + F(t)u(t)\sigma d\omega(t), \quad t \in [N, N+T] \quad (6)$$

式中, $F(N) \geq B(1-e^{-rT})/r$, 即以无风险利率作为连续时间利率的基础, T 年间的消费支出的现值不超过 $F(N)$.

2 退休前决策

退休前的决策是确定 $u(t)$ 的最优过程, 以最大化退休时的期望效用. 该决策可表示为

$$\max_u EU(F(N))$$

其约束条件为

$$dF(t) = [F(t)(u(t)\alpha + (1-u(t))r) + P]dt + F(t)u(t)\sigma d\omega(t), \quad F(0) = P, t \in [0, N] \quad (7)$$

其值函数为

$$W(t, F) = \max_u E[U(F(N)) | F(t) = F] \quad (8)$$

值函数对应的 HJB(Hamilton-Jacobi-Bellman) 方程为

$$0 = \max_u \Psi = \max_u \left[\frac{\partial W}{\partial t} + [(u(t)(\alpha - r) + r)F + P] \frac{\partial W}{\partial F} + \frac{1}{2} u^2(t) \sigma^2 F^2 \frac{\partial^2 W}{\partial F^2} \right] \quad (9)$$

可以得到两个方程和一个 2 阶条件

$$\Psi(u^*) = 0, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial u}(u^*) = 0, \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial u^2}(u^*) < 0 \quad (10)$$

由方程(10)可得

$$u^*(t) = - \frac{\partial W}{\partial F} \bigg/ F \left(\frac{\partial^2 W}{\partial F^2} \right) \frac{\alpha - r}{\sigma^2} \quad (11)$$

将式(11)代入式(10), 可得值函数的偏微分方程

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial W}{\partial F} (rF + P) - \frac{1}{2} \cdot \frac{(\alpha - r)^2}{\sigma^2} \cdot \left(\frac{\partial W}{\partial F} \right)^2 \bigg/ \frac{\partial^2 W}{\partial F^2} = 0 \quad (12)$$

边界条件为 $W(N, F) = U(F)$.

假设值函数有如下形式:

$$W(t, F) = -e^{-c[a(t)+b(t)(F-c(t))]} / c \quad (13)$$

边界条件为 $a(N) = 0, b(N) = 1, c(N) = 0$, 则可得以下导数:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = [a'(t) + b'(t)(F - c(t)) - b(t)c'(t)]e^{-c v(t, F)} \quad (14)$$

其中

$$v(t, F) = a(t) + b(t)(F - c(t))$$

$$\frac{\partial W}{\partial F} = b(t)e^{-c v(t, F)},$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial F^2} = -cb^2(t)e^{-c v(t, F)}$$

代入方程(12)可得

$$\begin{aligned} & (a'(t) + b'(t)(F - c(t)) - b(t)c'(t))e^{-c v(t, F)} + \\ & (rF + P)b(t)e^{-c v(t, F)} - [(\alpha - r)^2 / 2\sigma^2] \cdot \\ & [b^2(t)e^{-2c v(t, F)} / (-cb^2(t)e^{-c v(t, F)})] = 0 \end{aligned} \quad (15)$$

经整理, 方程(15)可写为

$$\begin{aligned} & a'(t) + b'(t)F - b(t)c'(t) - \\ & b'(t)c(t) + b(t)rF + Pb(t) + \\ & (\alpha - r)^2 / 2c\sigma^2 = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

可以将以上方程分解为三个方程

$$a'(t) + (\alpha - r)^2 / 2c\sigma^2 = 0 \quad (17)$$

$$b'(t)F + b(t)rF = 0 \quad (18)$$

$$b(t)c'(t) + b'(t)c(t) - Pb(t) = 0 \quad (19)$$

解这三个方程可得

$$a(t) = (\alpha - r)^2 (N - t) / 2c\sigma^2 \quad (20)$$

$$b(t) = e^{-r(t-N)} \quad (21)$$

$$-c(t) = p[(1 - e^{-r(N-t)}) / r] \quad (22)$$

可以得到值函数

$$\begin{aligned} W(t, F) = & -e^{-c\{[(\alpha - r)^2 / 2c\sigma^2](N-t) + e^{-r(t-N)}\{F + p[(1 - e^{-r(N-t)}) / r]\}\}} / c \end{aligned} \quad (23)$$

同时, $\frac{\partial^2 \Psi}{\partial u^2} = -F^2 \sigma^2 c e^{-2r(t-N)} e^{-c v(t, F)} < 0$, 满足 2

阶条件, 故可得

$$u^*(t) = [e^{r(t-N)}(\alpha - r)] / Fc\sigma^2 \quad (24)$$

显然, $u^*(t)$ 在 Merton 系数^[1]基础上增加了一个系数. $u^*(t)$ 的趋势取决于企业年金基金积累与连续时间无风险利率的速度, 如果前者超过后者, $u^*(t)$ 随着时间推移而降低, 与“lifestyle”投资策略一致; 如果前者低于后者, $u^*(t)$ 随时间推移而提高; 如果二者速度相当, $u^*(t)$ 保持稳定. 同时, 企业年金基金积累与固定的缴费投入是正相关的, 因此, 缴费越多, $u^*(t)$ 越低.

3 退休后决策

退休后的决策是确定 $u(t)$ 的最优过程, 以最大化 $t = N + T$ 时的期望效用. 决策可表示为

$$\max_u EU(F(N+T))$$

约束条件为

$$dF(t) = [F(t)(u(t)\alpha + (1-u(t))r) - B]dt + F(t)u(t)\sigma d\omega(t), \quad t \in [N, N+T] \quad (25)$$

可以看出, 式(25)与式(7)形式一致, 只是 P 变成了 $-B$, 时间区域由 $t \in [0, N]$ 变成了 $t \in [N, N+T]$. 所以, 只要通过相应的调整, 就可以直接套用前面的结果.

根据式(24)可得

$$u^*(t) = [e^{r[t-(N+T)]}(\alpha - r)] / Fc\sigma^2 \quad (26)$$

可以看出, 退休后的最优投资策略 $u^*(t)$ 与退休前相比, 除了时间, 没有其他改变, 依然取决于基金积累与连续时间无风险利率的速度, 趋势与退休前有相同的结论. 而企业年金基金积累与退休后的固定退休消费支出负相关, 因此, 消费支出越大, $u^*(t)$ 越大.

4 数值模拟

为了体现本研究的一般性, 资产收益分布参数没有选用实际市场参数估计值, 参数值满足 $r < \alpha$ 即可. 其中, 取无风险利率 $r = 0.05$, 风险证券期望收益率 $\alpha = 0.06$, 扩散系数 $\sigma = 0.04$, 给定退休时拥有基金值 15. 指数型效用函数的绝对风险规避系数 $c = 10$, 并取 $N = 40$, $T = 20$, 固定其他参数, 分别取缴费金额 $P = 1/8, 1/6, 1/4$, 固定消费支出 $B = 1/8, 1/6, 1/4$, 各进行 Monte Carlo 模拟 1 000 次, 再取其均值绘图. 数值模拟通过 Excel 实现.

图 1 给出了 P 取不同值时, 退休前 $u^*(t)$ 随 t 的分布. 由于企业年金基金积累超过了无风险利率, 所以 $u^*(t)$ 随着时间推移而降低, 与“lifestyle”投资

策略是一致的. 比较 P 取不同值时的情况, 随着 P 由 $1/8$ 提高至 $1/6, 1/4$, $u^*(t)$ 相应降低. 符合前文理论推导.

图 2 给出了 B 取不同值时, 退休后 $u^*(t)$ 随 t 的分布. 由于企业年金基金积累低于无风险利率, 所以 $u^*(t)$ 随着时间推移而提高. 比较 B 取不同值时的情况, 随着 B 由 $1/8$ 提高至 $1/6, 1/4$, $u^*(t)$ 相应提高. 符合前文理论推导.

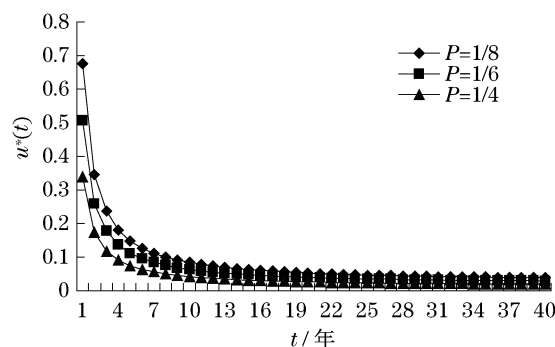


图 1 退休前最优风险证券投资比重分布

Fig.1 Optimal portfolio before retirement

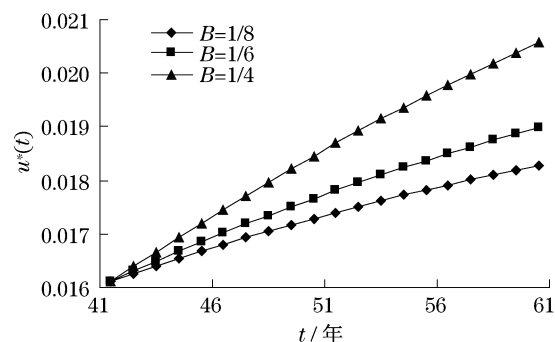


图 2 退休后最优风险证券投资比重分布

Fig.2 Optimal portfolio after retirement

分别改变 $r, \alpha, \sigma, \gamma, N, T$ 的值, 进行敏感性分析, 结果显示, 最优风险证券投资比重变化的趋势与前文理论推导一致, 不因这些变量的改变而改变(篇幅所限, 没有给出所有图形).

5 结语

研究发现, 引入指数效用函数后, 员工自主决策的缴费确定型企业年金最优投资策略和其他偏好结构下不尽相同: 无论在退休前还是退休后, 最优风险资产投资比重直接取决于企业年金基金积累与连续时间无风险利率的速度. 如果前者超过后者, 则最优风险资产投资比重随着时间推移而降低, 与 lifestyle 投资策略一致; 如果前者低于后者, 则最优风险资产

投资比重随时间推移而提高;如果二者速度相当,则最优风险资产投资比重保持稳定.同时,企业年金基金积累与退休前固定缴费投入正相关,与退休后固定退休消费支出负相关.因此,缴费投入越多,最优风险资产投资比重越低;消费支出越大,最优风险资产投资比重越大.

本研究证明,对于专业的企业年金基金投资管理机构而言,至少在指数效用函数下,lifestyle投资策略不是完全适用的,要动态评估基金积累和无风险利率并相应调整,才能最大化员工的利益.而在其他偏好结构下,lifestyle投资策略的效果也需要进一步研究.因此,学习模仿国外的企业年金投资策略,必须考虑适用性.更一般地,影响企业年金投资决策的因素很多,任何投资者偏好结构与约束条件的变动都可能导致不同结果,没有一种投资策略可以满足所有企业年金计划的受益人.企业年金基金投资管理机构应该针对各种偏好,设计不同的投资策略,以满足员工的多样化需求.

参考文献:

- [1] Vigna E, Haberman S. Optimal investment strategy for defined contribution pension schemes[J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2001, 28(2): 233.
- [2] Haberman S, Vigna E. Optimal investment strategies and risk measures in defined contribution pension schemes [J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2002, 31(1): 35.
- [3] 郭磊, 陈方正. 退休后企业年金基金最优投资决策[J]. 系统工程, 2006, 24(2): 78.

- GUO Lei, CHEN Fangzheng. Post-retirement optimal investment decision for occupational pension [J]. System Engineering, 2006, 24(2): 78.
- [4] 郭磊, 陈方正. 目标偏好与企业年金最优投资决策分析[J]. 同济大学学报: 自然科学版, 2007, 35(9): 1279.
- GUO Lei, CHEN Fangzheng. Target preference and optimal investment decision for occupational pension schemes [J]. Journal of Tongji University: Natural Science, 2007, 35(9): 1279.
- [5] GAO Jianwei. Stochastic optimal control of DC pension funds [J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2008, 42(3): 1159.
- [6] 郭磊, 陈方正. 基于 CRRA 效用函数的企业年金个体最优投资策略[J]. 同济大学学报: 自然科学版, 2008, 36(3): 424.
- GUO Lei, CHEN Fangzheng. Personal optimal investment strategy for occupational pension based on CRRA utility function [J]. Journal of Tongji University: Natural Science, 2008, 36(3): 424.
- [7] Brown J. Private pensions, mortality risk, and the decision to annuitize [J]. Journal of Public Economics, 2001, 82(1): 29.
- [8] 郭磊. 寿命不确定与企业年金退休后投资决策[J]. 同济大学学报: 自然科学版, 2009, 37(12): 1712.
- GUO Lei. Uncertain lifetime and post-retirement investment decision for occupational pension [J]. Journal of Tongji University: Natural Science, 2009, 37(12): 1712.
- [9] UK Occupational Pensions Regulatory Authority. Occupational pensions schemes regulatory survey 2003 [R]. London: OPRA Press, 2004.
- [10] Booth P M, Yakubov Y. Investment policy for defined-contribution pension scheme members close to retirement: an analysis of the "lifestyle" concept [J]. North American Actuarial Journal, 2000, 4(2): 1.
- [11] Merton R. Optimal consumption and portfolio rules in a continuous time model [J]. Journal of Economic Theory, 1971, 3(4): 373.

(上接第 1061 页)

参考文献:

- [1] 王俊颜, 杨全兵. 塑管混凝土力学性能的研究[J]. 建筑材料学报, 2007(2): 161.
- WANG Junyan, YANG Quanbing. Study of mechanical behavior of plastic tube filled with concrete [J]. Journal of Building Materials, 2007(2): 161.
- [2] Guidetti G P, Rigosi G L, Marzola R. The use of polypropylene in pipeline coatings [J]. Progress in Organic Coatings Proceedings of the 20th International Conference in Organic Coatings

Science and Technology, 1996, 27(1-4): 79.

- [3] Fredriksson D W, Decew J C, Tsukrov I. Development of structural modeling techniques for evaluating HDPE plastic net pens used in marine aquaculture [J]. Ocean Engineering, 2007, 34(16): 2124.
- [4] Wang J. Cohesive-bridging zone model of FRP-concrete interface debonding [J]. Engineering Fracture Mechanics, 2007, 74(17): 2643.
- [5] Martin G R. Method for determining the relative permeability of concrete using gas [J]. Magazine of Concrete Research, 1986, 38(135): 90.