第 38 卷第 12 期
2010 年 12 月

同 济 大 学 学 报(自 然 科 学 版)
JOURNAL OF TONGJI UNIVERSITY(NATURAL SCIENCE)

Vol. 38 No. 12
Dec. 2010

文章编号：0253-374X(2010)12-1857-04　　DOI:10.3969/j.issn.0253-374x.2010.12.028

Ricci 流在任意度量时刻的 Immortal 解

赵成兵

（1. 安徽建筑工业学院 数学系，安徽 合肥 230022；2. 合肥工业大学 管理学院，安徽 合肥 230009）

摘要：通过解 Poincaré-Lelong 方程，完备非紧的 n 维的有着非负有界全纯双截曲率的 Kähler 流形上的 Ricci 流方程被研究，如果它满足如下的条件：$\int_0^r sk_t(x,s)\mathrm{d}s \leqslant qC\log(2+r)$. 那么 Ricci 流在任意度量时刻 t 存在 Immortal 解的充分必要条件被得到，它是对文献[1]在度量 $t=0$ 时刻得到 Ricci 流存在 Immortal 解条件的推广.

关键词：Poincaré-Lelong 方程；Ricci 流；Immortal 解；有界曲率

中图分类号：O 186.1　　**文献标识码**：A

Immortal Solution of Ricci Flow at Any Metric Time

ZHAO Chengbing

(1. Department of Mathematics, Anhui University of Architecture, Hefei 230022, China; 2. College of Management, Hefei University of Technology, Hefei 230009, China)

Abstract: The Ricci flow equation on n dimensional complete noncompact Kähler manifolds is studied by solving the Poincaré-Lelong equation, if the following condition is satisfied: $\int_0^r sk_t(x,s)\mathrm{d}s \leqslant qC\log(2+r)$, then a necessary and sufficient condition for the existence of the immortal solution to the Ricci flow at any meric t time is obtained. It extends the result of Reference[1] that they get a necessary and sufficient condition for the existence of the immortal solution to the Ricci flow at metric $t=0$ time.

Key words: Poincaré-Lelong equation; Ricci flow; Immortal solution; bounded curvature

1 引言

设 M 是完备非紧的复 n 维的 Kähler 流形，它的全纯双截曲率非负且有界，Ricci 流

$$\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{g}_{\alpha\bar{\beta}} = -\boldsymbol{R}_{\alpha\bar{\beta}},\quad \boldsymbol{g}_{\alpha\bar{\beta}}(x,0) = \boldsymbol{g}_{\alpha\bar{\beta}}(x) \tag{1}$$

是通过 Ricci 张量 $\boldsymbol{R}_{\alpha\bar{\beta}}$ 来发展 M 上的 Kähler 度量 $\boldsymbol{g}_{\alpha\bar{\beta}}$，它最先由 Hamilton[2] 介绍而来，后来他研究 Ricci 流的奇异模，他把奇异模分为三类[2]，前面的两类分别叫 Eternal 解和 Ancient 解，最后的叫 Immortal 解，就是说 Ricci 流有光滑解在 $M\times[0,+\infty)$ 上，且 $0\leqslant R(x,t)\leqslant\frac{C}{1+t}$，这里 $R(x,t)$ 表示在时刻 t 的数量曲率，C 是正的常数. Chen 和 Zhu[3] 证明 Immortal 解存在，如果 M 是复 n 维完备非紧的 Kähler 流形有有界的正的曲率算子，它的测地球有欧式体积增长，他们利用这个结果去研究由 Yau 提出的单值化问题[4-6]，在 $n=2$ 时他们得到这个猜测是对的，即对任意完备非紧的 Kähler 曲面有正的有界的全纯双截曲率，如果它的测地球有欧式体积增长，那么它是双全纯于 C^2，这是到目前为止最好的结果. Shi 也证明 Immortal 解的存在假设开始曲率有二次退化[4]，最近 Ni 和 Tam[5] 通过 Poincaré-Lelong 方程去研究 Ricci 流，他们简化 Shi 的讨论并且得到一些好的结果.

定理 1　设 M 是 n 维完备非紧的 Kähler 流形，有有界非负的全纯双截曲率，如果存在常数 C，使得 $CR(x,t)\geqslant R(x,0)$，那么 Ricci 流(见式(1))有 Immortal 解当且仅当

$$\int_0^r sk_t(x,s)\mathrm{d}s \leqslant C\log(2+r) \tag{2}$$

对某个常数 $C>0$，对所有的 $x\in M$，$r\geqslant 0$，这里

$$k_t(x,s) = \frac{1}{\mathrm{Vol}_t(B_t(x,s))}\int_{B_t(x,s)} R(x,t)\mathrm{d}V_t$$

式中：$\mathrm{Vol}_t(B_t(x,s))$ 是测地球 $B_t(x,s)$ 中心在 x

收稿日期：2009-07-02
基金项目：国家自然科学基金资助项目(70731003)；安徽省高等学校自然科学基金资助项目(KJ2008A030)；安徽建筑工业学院博士基金资助项目(2007-6-3)
作者简介：赵成兵(1970—)，男，副教授，理学博士，主要研究方向为几何分析. E-mail: chengbingzhao@163.com

$\in M$ 半径 s 的体积,$R(x,t)$是 M 的数量曲率.

2 Immortal 解存在的必要条件

引理 1[2] 设 M 是 n 维完备非紧的 Kähler 流形,有有界非负的全纯双截曲率,如果存在常数 C,使得对 $\forall\, x,y\in M$,

$$\frac{C^{-1}d(x,y)^2}{\mathrm{Vol}(B(x,d(x,y)))}\leqslant G(x,y)\leqslant \frac{Cd(x,y)^2}{\mathrm{Vol}(B(x,d(x,y)))} \tag{3}$$

$$|\nabla G(x,y)|\leqslant \frac{Cd(x,y)}{\mathrm{Vol}(B(x,d(x,y)))} \tag{4}$$

这里 $d(x,y)$表示 x 和 y 在 $\boldsymbol{g}_{\alpha\bar\beta}(x)$度量下的测地距离,$\nabla$是表示 $\boldsymbol{g}_{\alpha\bar\beta}(x)$的梯度,$G(x,y)$是 M 在开始度量 $\boldsymbol{g}_{\alpha\bar\beta}(x)$下的正的 Green 函数.

引理 2[5] 设 M 是 n 维完备非紧的 Kähler 流形,有有界非负的全纯双截曲率,假设式(1)有长时间的解,使得对任意的 $T>0$,满足下面的情况

(i) 对 $0\leqslant t<T$,$(M,\boldsymbol{g}_{\alpha\bar\beta}(x,t))$是 Kähler 度量有非负有界的双截曲率

(ii) 这里存在常数 $C>0$,使得

$$C^{-1}\boldsymbol{g}_{\alpha\bar\beta}(x,0)\leqslant \boldsymbol{g}_{\alpha\bar\beta}(x,t)\leqslant \boldsymbol{g}_{\alpha\bar\beta}(x,0)$$

且 $0<R(x,t)\leqslant C$,对所有的$(x,t)\in M\times[0,T)$,假设$\int_0^r sk(x,s)\mathrm{d}s\leqslant C_1\log(2+r)$,对某个常数 $C_1>0$,对所有的 x 和 r,那么

$$\int_0^r sk_t(x,s)\mathrm{d}s\leqslant C_1\log(2+r)$$

引理 3 和引理 2 相同的假设,$CR(x,t)\geqslant R(x,0)$,假设$\int_0^r sk_t(x,s)\mathrm{d}s\leqslant C_2\log(2+r)$,对某个常数 $C_2>0$,对所有的 x 和 r,那么

$$\int_0^r sk(x,s)\mathrm{d}s\leqslant C_3\log(2+r)$$

证明 从文献[2]知

$$B_0(x,r)\subset B_t(x,r)\subset B_0(x,r+C_1t)$$

那么

$$V_t(B_t(x,r)\leqslant V_t(B_0(x,r+C_1t)=\int_{B_0(x,r+C_1t)}\mathrm{d}V_t=\int_{B_0(x,r+C_1t)}\mathrm{e}^F\mathrm{d}V_0\leqslant V_0(B_0(x,r+C_1t)$$

$$k_t(x,r)=\frac{1}{V_t(B_t(x,r))}\int_{B_t(x,r)}R(x,t)\mathrm{d}V_t\geqslant \frac{1}{V_0(B_0(x,r+C_1t))}\int_{B_0(x,r)}R(x,t)\mathrm{d}V_t=$$

$$\frac{V_0(B_0(x,r))}{V_0(B_0(x,r+C_1t))}\frac{1}{V_0(B_0(x,r))}\cdot\int_{B_0(x,r)}R(x,t)\mathrm{d}V_t=\frac{C}{V_0(B_0(x,r))}\int_{B_0(x,r)}R(x,t)\mathrm{d}V_t=\frac{C}{V_0(B_0(x,r))}\int_{B_0(x,r)}R(x,t)\mathrm{e}^{F(x,t)}\mathrm{d}V_0$$

让 $F_{\min}t=\inf_{x\in M}F(x,t)$

$$\geqslant\frac{C_4}{V_0(B_0(x,r))}\int_{B_0(x,r)}R(x,t)\mathrm{d}V_0=\frac{C_5}{V_0(B_0(x,r))}\int_{B_0(x,r)}R(x,0)\mathrm{d}V_0=C_5k(x,r)$$

因为 $R(x,t)$是有界的,所以存在 C_6,使得 $C_6R(x,t)>R(x,0)$,所以

$$\int_0^r sk(x,s)\mathrm{d}s\leqslant C_7\int_0^r sk_t(x,s)\mathrm{d}s\leqslant C_8\log(2+r)$$

引理 4[1] 设 M 是 n 维完备非紧的 Kähler 流形,有有界非负的全纯双截曲率,定理 1 的条件成立,那么存在常数 $C>0$ 使得对 $\forall\, x\in M$,$r>0$,有

$$\int_{B(x,r)}\frac{R(y)d(x,y)^2}{\mathrm{Vol}(B(x,d(x,y)))}\mathrm{d}y\leqslant C\log(2+r)$$

引理 5[5] 设 M 是 n 维完备非紧的 Kähler 流形,有有界非负的全纯双截曲率,那么 Poincaré-Lelong 方程 $\sqrt{-1}\partial\bar\partial u=\mathrm{Ric}$ 有一个解且 $\sup\limits_{x\in B(x_0,r)}|u(x)|\leqslant C\log(2+r)$对常数 $C>0$ 和所有的 $r>0$,当且仅当

$$\int_0^r sk_t(x,s)\mathrm{d}s\leqslant C'\log(2+r)$$

对常数 $C'>0$.

下面证明定理 1 的必要条件

证明 从引理 5 知道只要证明 Poincaré-Lelong 方程 $\sqrt{-1}\partial\bar\partial u=\mathrm{Ric}$ 有一个解且 $\sup\limits_{x\in B(x_0,r)}|u(x)|\leqslant C\log(2+r)$,那么得到定理 1 的必要条件

为解 Poincaré-Lelong 方程,首先构造一组近似解 u_r 如下.

对一个固定的 $x_0\in M$ 和 $\forall\; r>0$,定义 $u_r(x)$在 $B(x_0,r)$上由

$$u_r(x)=\int_{B(x_0,r)}(G(x_0,y)-G(x,y))R(y)\mathrm{d}y$$

它是清楚的 $u_r(x_0)=0$,且 $\Delta u_r(x)=R(x)$在 $B(x_0,r)$.上,对 $x\in B\left(x_0,\frac{r}{4}\right)$,写

$$u_r(x)=\left(\int_{B(x_0,r)\backslash B(x_0,4d(x_0,x))}+\int_{B(x_0,4d(x_0,x))}\right)(G(x_0,y)-G(x,y))R(y)\mathrm{d}y=I_1+I_2$$

从引理 4 中，知道在 $B\left(x_0,\frac{r}{4}\right)$上

$$|I_2|\leqslant C\log(2+d(x,x_0)) \tag{5}$$

由式(4)，有对 $y\in B(x_0,r)\backslash 4d(x_0,x)$，

$$|G(x_0,y)-G(x,y)|\leqslant d(x,x_0)\sup_{z\in B(x_0,d(x,x_0))}|\nabla_z G(z,y)|\leqslant Cd(x,x_0)\sup_{z\in B(x_0,d(x,x_0))}\frac{d(z,y)}{\mathrm{Vol}(B(z,d(z,y)))}\leqslant C\frac{d(x,x_0)d(x_0,y)}{\mathrm{Vol}(B(x_0,d(x_0,y)))}$$

结合引理 4,有

$$|I_1|\leqslant Cd(x,x_0)\int_{B(x_0,r)\backslash 4d(x_0,x)}\cdot\frac{R(y)d(x_0,y)}{\mathrm{Vol}(B(x_0,d(x_0,y)))}\mathrm{d}y \tag{6}$$

$$\leqslant Cd(x_0,x)\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{2^k d(x,x_0)}\cdot\int_{B(x_0,2^{k+1}d(x,x_0))\backslash B(x_0,2^k d(x,x_0))}\cdot\frac{R(y)d(x_0,y)^2}{\mathrm{Vol}(B(x_0,d(x_0,y)))}\mathrm{d}y$$

$$\leqslant C\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{2^k}\log(2+2^{k+1}d(x,x_0))\leqslant C\log(2+d(x,x_0))$$

由式(5),(6)得到

$$|u_r(x)|\leqslant C\log(2+d(x,x_0)),\quad r\geqslant 4d(x_0,x)$$

因此由 Schauder 关于椭圆方程的定理 存在系列 $r_j\to+\infty$使得 $u_{r_j}(x)$一致收敛到 M 上紧子集上的光滑函数 u 满足

$$\begin{cases}u(x_0)=0,\quad \Delta u=R\\ |u(x)|\leqslant C\log(2+d(x,x_0)),\quad x\in M\end{cases}$$

现在证明 Poincaré-Lelong 方程有解.

$$|\nabla u_r(x)|\leqslant C\int_M|\nabla_x G(x,y)|R(y)\mathrm{d}y\leqslant C\int_{B(x,1)}|\nabla_x G(x,y)|R(y)\mathrm{d}y+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^{k-1}}\int_{B(x,2^k)\backslash B(x,2^{k-1})}|\nabla_x G(x,y)|R(y)\mathrm{d}y\leqslant$$

$$C\sup R(y)\sum_{k=1}^{\infty}\int_{B(x,2^{-k+1})\backslash B(x,2^{-k})}|\nabla_x G(x,y)|\mathrm{d}y+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^{k-1}}C\log(2+2^k)\leqslant C\sup R(y)\cdot$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_{B(x,2^{-k+1})\backslash B(x,2^{-k})}\frac{d(x,y)}{\mathrm{Vol}(B(x,d(x,y)))}\mathrm{d}y+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^{k-1}}C\log(2+2^k)\leqslant C\sup R(y)\cdot$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_{B(x,2^{-k+1})\backslash B(x,2^{-k})}\frac{2^{-k+1}}{\mathrm{Vol}(B(x,2^{-k}))}\mathrm{d}y+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^{k-1}}C\log(2+2^k)\leqslant C_1$$

由 Bochner 恒等式和 $\Delta u=R$

$$\frac{1}{2}\Delta|\nabla u|^2=|\nabla^2 u|^2+\langle\nabla u,\nabla R\rangle+\mathrm{Ric}(\nabla u,\nabla u)\geqslant|\nabla^2 u|^2+\langle\nabla u,\nabla R\rangle$$

乘以截断函数并分布积分

$$\begin{cases}\exp\left(-c\left(1+\frac{d(x_0,x)}{r}\right)\right)\leqslant\varphi_r(x)\leqslant\exp\left(-\left(1+\frac{d(x_0,x)}{r}\right)\right)\\ |\nabla\varphi_r(x)|\leqslant\frac{c}{r}\varphi_r(x)\\ |\Delta\varphi_r(x)|\leqslant\frac{c}{r^2}\varphi_r(x)\end{cases}$$

$$\int_M|\nabla^2 u|^2\varphi\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{2}\int_M|\nabla u|^2|\nabla\varphi|\mathrm{d}x+\int_M|\nabla u|R|\nabla\varphi|\mathrm{d}x+\int_M|\nabla^2 u|R\varphi\mathrm{d}x\leqslant$$

$$\frac{C}{r^2}\int_M\varphi\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_M|\nabla^2 u|^2|\varphi\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_M R^2\varphi\mathrm{d}x+C\sup R\frac{1}{r}\int_M\varphi\mathrm{d}x\leqslant\frac{C}{r^2}+C\sup_M R\left.\frac{1}{r}\right)\int_M\varphi\mathrm{d}x+$$

$$C\int_M R^2\varphi\mathrm{d}x\int_M R^2\varphi\mathrm{d}x\leqslant\sup R\int_M R\varphi\mathrm{d}x\leqslant\sup R\int_{B(x,r)}R\mathrm{d}x+\sum_{k=0}^{\infty}\mathrm{e}^{2^{-k+1}}\int_{B(x,2^{k-1}r)\backslash B(x,2^k r)}R\mathrm{d}x\leqslant$$

$$Cr^{-2}\mathrm{Vol}(B(x,r))\log(2+r)\int_M\varphi\mathrm{d}x\leqslant\int_{B(x,r)}\mathrm{d}x+\sum_{k=0}^{\infty}\mathrm{e}^{2^{-k+1}}\int_{B(x,2^{k-1}r)\backslash B(x,2^k r)}\mathrm{d}x\leqslant C\,\mathrm{Vol}(B(x,r))\cdot$$

$$\frac{1}{\mathrm{Vol}(B(x,r))}\int_{B(x,r)}|\nabla^2 u|^2\mathrm{d}x\leqslant C\left(\frac{1}{r^2}+\frac{1}{r}+\frac{\log(2+r)}{r^2}\right)$$

因为$\left|\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}u-\mathrm{Ric}\right|^2(x_0)$是次调和

$$\left|\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}u-\mathrm{Ric}\right|^2(x_0)\leqslant$$
$$\frac{C}{\mathrm{Vol}(B(x,r))}\int_{B(x,r)}\left|\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}u-\mathrm{Ric}\right|^2(x)\mathrm{d}x\leqslant$$
$$\frac{C}{\mathrm{Vol}(B(x,r))}\int_{B(x,r)}(|\nabla^2 u|^2+R^2)\mathrm{d}x\leqslant$$
$$C\left(\frac{1}{r^2}+\frac{1}{r}+\frac{\log(2+r)}{r^2}\right)=0$$

当 $r\to\infty$,知道 $\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}u=\mathrm{Ric}$ 在 M 上，此外由引理3,那么证明定理1的必要条件.

对于 Immortal 解的充分条件可以参考文献[1].

致谢:衷心感谢同济大学数学系陈志华教授对本文的指导和帮助.

参考文献:

[1] RUAN Qihua,CHEN Zhihua. Immortal solution of the Ricci flow [J]. Science in China,Series A Math,2005(S1):217.

[2] Hamilton R S. Formation of singularities in the Ricci flow[C]// Surveys in Differential Geometry. [S. l.]: International Press, 1995:7-136.

[3] CHEN Binglong, ZHU Xiping. A uniformization theorem of complete noncompact Kähler surface with positive bisection curvature[J]. Journal Diff Geom,2004,67(3):519.

[4] SHI Wangxiong. Ricci flow and the uniformization on complete noncompact Kähler manifolds[J]. Journal Diff Geom, 1997, 45 (1):94.

[5] NI Lei,Tam Luenfai. Kähler Ricci flow and the Poincaré-Lelong equation[J]. Comm Anal Geom,2004,12(1):111.

[6] ZHAO Chengbing. Uniformization theorem on complete Kähler manifolds[J]. Journal of Tongji University: Natural Science, 2007,35(8):1108.

(上接第1821页)

当故障位于线路近端时干扰较多,高频信号难于分辨,因此仿真数据在前5 km的误差比较大,需要做一定的修正.在5 km之后的仿真结果就达到了较高的精度.纵向比较表1和表2,可知有无机车负载对暂态算法的精度基本上没有影响.横向比较,对于同一故障点,过渡电阻对算法的精度可以说几乎没有影响.

6 结论

在牵引网发生故障的瞬间,由于信号突变、对地电容与故障点之间的充放电,以及线路参数的影响,会产生高频暂态分量.利用Morlet复小波提取暂态电压信号的频谱后,用牵引网暂态谐振频率法进行故障测距,可消除过渡电阻、机车位置、机车取流对牵引网故障点定位的影响,具有较高精度和可靠性.

参考文献:

[1] Andrea Mariscotti,Paolo Pozzobon. Synthesis of line impedance expressions for railway traction systems[J]. IEEE Trans on Vehicular Technology,2003,52(2):420.

[2] Pathirana V, Dirks E, McLaren P G. Using impedance measurement to improve the reliability of traveling-wave distance protection [C] // IEEE Power Engineering Society General Meeting. Toronto:IEEE,2003:1874-1879.

[3] 马文骐,郎燕生,马昭彦.分布参数输电线路故障模拟及测距[J].电力系统及其自动化学报,1996,8(3):7.
MA Wenqi, LANG Yansheng, MA Zhaoyan. Algorithm of fault simulation and fault location for distributed parameter line model[J]. Proceedings of the EPSA,1996,8(3):7.

[4] Robertson D C, Camps O I, Mayer J S, et al. Wavelet and electromagnetic power system transients [J]. IEEE Trans Power Delivery,1996,11:1050.

[5] Zhang D J, Wu Q H, Bo Z Q, et al. Transient positional protection of transmission lines using complex wavelets analysis [J]. IEEE Trans Power Delivery,2003,18(3):705.

[6] 何正友,钱清泉.电力系统暂态信号的小波分析方法及其应用(一):小波变换在电力系统暂态信号分析中的应用综述[J].电力系统及其自动化学报,2002,14(4):1.
HE Zhengyou, QIAN Qingquan. The electric power system transient signal wavelet analysis method and its application(1): the application of wavelet transform in electric power system transient signal analysis summarizing[J]. Proceedings of the EPSA,2002,14(4):1.

[7] 赵娟,李建华,黄永宁.基于Matlab/Simulink的SS3B电力机车数字仿真模型[J].机车电传动,2002(6):25.
ZHAO Juan,LI Jianhua,HUANG Yongning. Simulation model of SS3B electric locomotive based on Matlab/Simulink[J]. Electric Drive for Locomotives,2002(6):25.