

土体热力学模型的改进及三轴试验有限元分析

李学丰¹, 孔 亮², 花丽坤²

(1. 同济大学 地下建筑与工程系, 上海 200092; 2. 青岛理工大学 理学院, 山东 青岛 266033)

摘要: 基于土体本构模拟的热力学方法, 分析了 Collins 土体热力学本构模型, 针对其硬化定律的不足, 引入统一硬化参量进行改进, 将其扩展为能反映砂土和黏土变形特性的统一热力学模型. 运用建立三维临界状态模型的方法将改进模型三维化, 并针对常规三轴实验试样的轴对称变形特点, 编制了改进前、后的土体热力学模型的有限元程序. 对上海粉细砂常规三轴实验的有限元模拟分析表明模拟与试验变形一致, 初步验证了模型的合理性和有效性.

关键词: 本构模型; 热力学; 统一硬化参数; 有限元

中图分类号: TU 441

文献标识码: A

Improvement of Thermomechanical Model for Soil and Its FEM Analysis of Triaxial Test

LI Xuefeng¹, KONG Liang², HUA Likun²

(1. Department of Geotechnical Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, China; 2. School of Sciences, Qingdao Technological University, Qingdao 266033, China)

Abstract: Based on the thermomechanical approach to establish elastic-plastic constitutive model for geomaterials and analysis of thermomechanical model proposed by Collins, its shortage of hardening law is improved by incorporating unified hardening parameters, then the unified model which is suitable for both clay and sand is presented. After the three-dimension being generalized, the finite element method (FEM) computer program of thermomechanical model and the improved model which consider the deformation characters of traditional triaxial test are worked out. Then the improved program is used to simulate traditional triaxial compression tests of Shanghai silt sand, the rationality and validity of the improved model can be seen from the comparison of the calculated results.

Key words: constitutive model; thermomechanics; unified hardening parameter; finite element method (FEM)

用热力学方法建立岩土材料的本构关系抛弃了传统弹塑性建模的一些不合理做法^[1], 有较好的数学和物理基础, 已成为国内外研究的热点之一^[2-10]. Collins 将该方法系统化后提出了一个土体的热力学模型. 该模型通过参数的不同取值, 可得到包括修正剑桥模型和类似于 Lade 屈服面在内不同的屈服面形式, 具有较大的适应性. 然而该模型以塑性体积应变为硬化参量, 采用与修正剑桥模型相同的硬化定律, 导致该模型具有修正剑桥模型的一些缺点, 如不能反映剪胀, 不能较好反映超固结土与中密砂的变形特性等. 姚仰平等推导并建立了一个适用于砂土和黏土的统一且与应力路径无关的硬化参数, 并发展了统一硬化模型^[11-13]. 鉴于土体热力学模型坚实的数学与物理基础以及统一硬化参数的基本特性, 本文基于土体热力学建模的基本思路, 针对 Collins 土体热力学模型的硬化定理的不足, 引入统一硬化参数进行改进, 将其扩展为既适用于黏土也适用与砂土的统一热力学模型. 然后将统一模型三维化, 针对上海吹填粉细砂的常规三轴排水试验的变形特点, 编制相应的模型有限元程序. 计算和试验结果初步验证了改进模型的合理性.

1 土体热力学模型的建立

1.1 土体热力学建模的基本思路

基于热力学基本定律, 结合岩土材料的变形特点, 推导适合土体热力学定理的表达式. 用自由能函数确定与弹性和塑性相关的变形, 用耗散函数确定与塑性应变增量相关的变形, 然后用 Ziegler 正交假定有效定义了非常广泛的本构方程的类型, 再用 Legendre 变换, 就可以导出弹塑性理论必须的基本要素^[2]. 该方法又称超塑性理论, 一旦自由能函数与

收稿日期: 2009-08-28

基金项目: 国家自然科学基金(50979037); 山东省自然科学基金(JQ201017)

第一作者: 李学丰(1976—), 男, 博士生, 主要研究方向为岩土本构理论及数值计算. E-mail: lixuefeng1928@163.com

耗散增量函数确定,即可导出屈服函数与流动法则,进而得出增量形式的本构方程.较为详细的推导过程可参考文献[2-9].

1.2 Collins 热力学各向同性模型

Collins 提出各向同性模型簇(isotropic model)耗散增量函数的通用表达式为^[5,7,9]

$$\delta\Phi = \sqrt{(A d\epsilon_v^p)^2 + (B d\epsilon_s^p)^2} \quad (1)$$

式中: $d\epsilon_v^p$ 和 $d\epsilon_s^p$ 为塑性体积应变增量与塑性剪切应变增量; A, B 是有效应力变量(如 p, p_c)的一阶齐次函数,具有应力的量纲,其表达式为

$$\begin{cases} A = (1 - \gamma)p + \frac{1}{2}\gamma p_c \\ B = (1 - \alpha)Mp + \frac{1}{2}\alpha\gamma Mp_c \end{cases} \quad (2)$$

式中: p 为静水压力; p_c 为固结压力; α, γ 为模型系数; M 为临界状态线的斜率.

由耗散应力的定义^[5]得耗散压力和耗散剪应力为

$$p_D = \frac{A^2 d\epsilon_v^p}{\delta\Phi}, \quad q_D = \frac{B^2 d\epsilon_s^p}{\delta\Phi} \quad (3)$$

用式(1)消去应变增量得耗散应力空间的屈服条件

$$\frac{p_D^2}{A^2} + \frac{q_D^2}{B^2} = 1 \quad (4)$$

显然是一簇同心椭圆.由式(3)可得耗散应力空间的流动法则为

$$\tan \psi = -\frac{d\epsilon_v^p}{d\epsilon_s^p} = -\frac{p_D}{q_D} \frac{B^2}{A^2} \quad (5)$$

式中: ψ 为剪胀角.

在耗散应力空间中塑性应变增量正交于椭圆屈服面.在临界状态线(CSL)上 $p_D = 0$,由迁移应力的定义有

$$p_s = p_{CSL} \quad (6)$$

式中: p_{CSL} 为 CSL 与屈服面交点处的压力.由等向固结压缩试验的特征可以得出 $p_s = \gamma p_c/2$,即 $p_D = p - \gamma p_c/2$,且 $q_D = q$ (q 为广义剪应力),代入式(5)可得真实应力空间的屈服条件

$$\frac{(p - \gamma p_c/2)^2}{A^2} + \frac{q^2}{B^2} = 1 \quad (7)$$

真实应力空间中塑性应变增量可表示为

$$\tan \psi = -\frac{d\epsilon_v^p}{d\epsilon_s^p} = -\frac{p - \gamma p_c/2}{q} \frac{B^2}{A^2} \quad (8)$$

由式(5)与(8)可看出,塑性应变增量正交于耗散应力空间的椭圆屈服轨迹,但是否正交于真实应力空间的屈服轨迹则取决于耗散函数是否依赖于真

实应力,也即式(2)中各系数的取值.该式中的系数都有明确的物理意义, α 称泪珠参数,取值范围为 $[0, 1]$.随 α 值的减少,屈服面由椭圆向泪珠形状变化. γ 为延长参数,随 γ 值的减少,屈服面逐渐变得细长,取值范围为 $[0, 1]$.图 1 为 α 和 γ 不同取值时的屈服曲线.例如,对于修正剑桥模型, $\alpha = \gamma = 1.0$,耗散函数中无真实应力项,在真实应力空间中仍为关联流动法则;当 $\alpha \neq 1.0, \gamma \neq 1.0$,则耗散函数中包含真实应力项,则真实应力空间中的流动法则必为非关联的.对于前者,屈服轨迹从耗散应力空间转换到真实应力空间只作简单的平移;对于后者,屈服轨迹不但移动,还改变其形状,不再遵循关联流动法则.当 $\alpha = \gamma = 0$,为不可压缩的 Coulomb 摩擦模型.

为简便计算,假设固结压力 p_c 只依赖于塑性体积应变,Collins 热力学模型采用的硬化定律为

$$dp_c = \frac{1}{\lambda - \kappa} p_c d\epsilon_v^p \quad (9)$$

式中: λ 和 κ 分别为压缩指数和回弹指数.

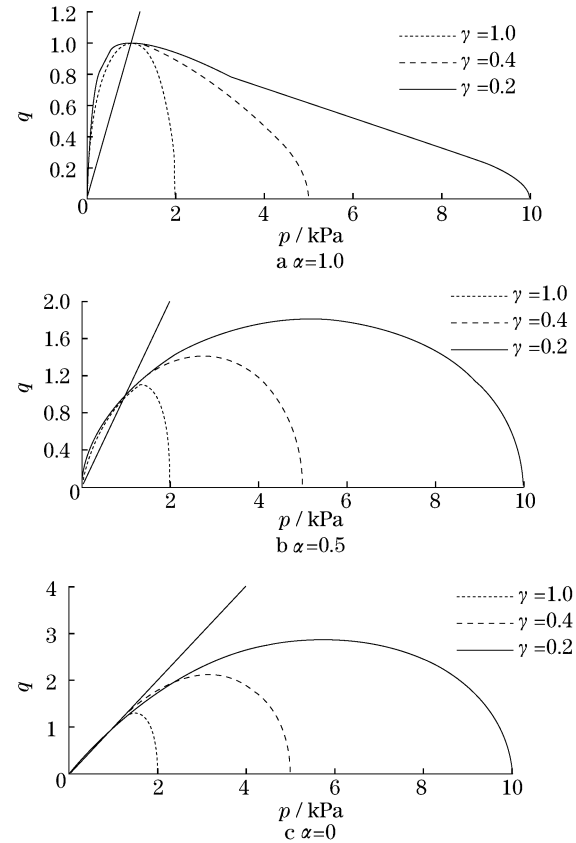


图 1 α 和 γ 不同取值时的屈服轨迹

Fig.1 Yield loci at different values of α and γ

1.3 Collins 热力学各向同性模型的改进

Collins 提出的土体热力学模型具有较好的数学

力学基础,通过模型参数的不同取值,可以得到包括修正剑桥模型在内的不同屈服面的形式,具有较大的适应性.但该模型仍属于单屈服面模型的范畴,选用不同的硬化参量得到不同形式的加载面,不能保证给定边值问题的惟一性,因而合理选用硬化参量及相应的硬化定律十分重要.从式(9)可看出,该模型采用塑性体积应变作为硬化参量,忽略了塑性剪切应变对硬化的影响,不能全面反映岩土材料的硬化程度,也不能反映土(特别是砂土与超固结土)的剪胀性.因此有必要对土体热力学模型的硬化定律进行改进.

塑性应变的产生是土体硬化的根本原因.因此,许多研究者分别将塑性体积应变、塑性剪应变及塑性应变的某种组合 $f(\epsilon_v^p, \epsilon_s^p)$ 等作为硬化参量.姚仰平等^[11-13]在对土的应力-应变关系长期研究的基础上,从最基本的砂土和黏土试验结果、基本的机理出发去解释、推理硬化参量的合理性,揭示了基本硬化内参量(塑性体积应变、塑性剪应变)变化的应力路径相关性,但作为弹塑性模型关键的硬化参量必须是与应力路径无关的.姚仰平等推导并建立了一个适用于砂土和黏土的统一的、与应力路径无关的等向硬化参量,表达式为

$$H = \int dH = \int \frac{d\epsilon_v^p}{R(\eta)} \quad (10)$$

式中: $R(\eta)$ 为一个与应力路径相关的因子,去除掉塑性体积应变增量 $d\epsilon_v^p$ 中和应力路径相关的成分,使得 $d\epsilon_v^p/R(\eta)$ 和应力路径无关,最后再沿着应力路径进行积分即得与应力路径无关的硬化参数. $R(\eta)$ 表达式为

$$R(\eta) = \frac{M_t^4(M^4 - \eta^4)}{M^4(M_t^4 - \eta^4)} \quad (11)$$

式中: M_t 为峰值应力比 $(q/p)_t$; M 为正常固结土的临界状态应力比 $(q/p)_s$; η 为应力比 q/p .

为了克服 Collins 热力学模型直接选用塑性体积应变为硬化参量而导致的缺点,将统一硬化参数的思想引入到该模型中,用式(11)对热力学模型的硬化定律进行改进.改进后的硬化定律为

$$dp_c \frac{p_c}{\lambda - \kappa} \frac{d\epsilon_v^p}{R(\eta)} \quad (12)$$

黏土与砂土的应力-应变曲线不同,受应力路径影响的程度也不同.通常情况下,剪切使密砂或中密砂先剪缩后剪胀;而对于正常固结黏土或松砂,剪切只引起其体缩.对于这类压缩性土,相变应力比 M 与峰值应力比 M_t 相等, $R(\eta) = 1$, 式(12)与式(9)相

同,改进的热力学模型退化为 Collins 热力学模型.对于中密砂等剪胀材料,由式(12)有:

(1) $\eta = 0$ (等向压缩条件), $d\epsilon_v^p = [(\lambda - \kappa)/p_c] \cdot dp_c$, 表现为等向压缩变形.

(2) $0 \leq \eta \leq M$ (剪缩硬化阶段), $d\epsilon_v^p > 0$, 表现为剪缩变形.

(3) $\eta = M$ (相变特征状态), $d\epsilon_v^p = 0$, 此时为由剪缩变形变为剪胀变形的分界线.

(4) $M < \eta < M_t$ (剪胀硬化阶段), $d\epsilon_v^p < 0$, 表现为剪胀变形.

可见改进的热力学模型能够反映中密砂等剪胀材料在不同应力状态下的不同特性,能够描述其剪胀性.

2 模型的三维化及弹塑性矩阵的推导

大多数土体的本构模型是建立在三轴压缩实验基础上的,得到以平均正应力 p 和广义剪应力 q 为变量的屈服方程.然后用 $p = \sigma_{ij}/3$ 和 $q = [3(\sigma_{ij} - p\delta_{ij})(\sigma_{ij} - p\delta_{ij})\sigma_{ij}/2]^{1/2}$ (σ_{ij} 为应力张量, δ_{ij} 为 Kronecker 符号)将这些模型推广到三维应力条件下,这样得到的预测结果与实验结果有较大的出入,主要原因之一是用这种方法推广的三维模型,其屈服面在 π 平面上是个圆.但大量的实验结果证明,土体屈服面在 π 平面上的性状接近莫尔-库仑准则或 SMP(空间滑移面)破坏准则^[1].为了得到更符合实际的结果,许多学者投入到土体本构模型的三维化研究中,特别是 Nakai 和 Mihara^[14], Salgado 和 Byrne^[15] 以及 Matsuoka^[16] 等工作,他们应用空间滑移面的概念发展了三维临界状态模型.但正如文献[4]指出的一样,初始剑桥模型与 Matsuoka^[17] 等扩展的模型,允许塑性体积改变而无任何的能量耗散,这违背了热力学第二定律.考虑到以上问题, Collins^[4] 从热力学的原理出发建立三维临界状态模型的基本步骤,这是最一般的模型三维化方法.详细的推导过程可见文献[4].当 $d\epsilon_s^p = \|\text{dev}(d\epsilon^p)\|$ 时 (ϵ_s^p 为非负的恰当选择的某一平面的塑性应变),得到的极限状态屈服面是 Drucker-Prager 圆锥,当模型参数 $\alpha = \gamma = 1.0$ 时,模型为传统三维化的修正剑桥模型.总之这种方法可以克服一些模型三维化的不足,通过 A, B 的函数形式的变化、不同自由能函数和不同的塑性剪应变,就可以建立不同的二维或三维本构模型.

在弹塑性矩阵的推导过程中,由于土体热力学

模型硬化规律和流动法则的特点,势函数在推导过程利用流动法则代换,因此避免了确定势函数,而且模型中包含了关联流动法则和非关联流动法则,这是热力学模型的两个特点.

弹塑性矩阵利用传统方法进行推导,即

$$D_{ijkl}^{ep} = D_{ijkl}^e - \frac{D_{ijmn}^e \frac{\partial g}{\partial \sigma_{mn}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{st}} D_{stkl}^e}{H + \frac{\partial f}{\partial \sigma_{st}} D_{pquv}^e \frac{\partial g}{\partial \sigma_{mn}}} \quad (13)$$

式中: D_{ijkl}^{ep} 和 D_{ijkl}^e 分别为弹性和弹塑性刚度张量; g 为塑性势函数; f 为屈服函数; H 为硬化参数.

塑性增量可以表达为: $d\epsilon_{ij}^p = d\chi (\partial g / \partial \sigma_{ij})$, 其中 $d\chi$ 是非负的比例系数,可以写成 $d\chi = (1/H) \cdot (\partial f / \partial \sigma_{ij}) d\sigma_{ij}$, 在三轴的情况下可以写成

$$d\chi = \frac{1}{H} \left(\frac{\partial f}{\partial p} dp + \frac{\partial f}{\partial q} dq \right) \quad (14)$$

屈服面的一致性方程是

$$df = \frac{\partial f}{\partial p} dp + \frac{\partial f}{\partial q} dq + \frac{\partial f}{\partial p_c} dp_c = 0 \quad (15)$$

将式(14)带入式(15)即得硬化参数为

$$H = \frac{p_c}{(\kappa - \lambda) R(\eta)} \frac{\partial f}{\partial p_c} \frac{\partial g}{\partial p} \quad (16)$$

由式(7),(8),(12),(13),(15)和(16)可以完全推导出改进热力学模型的三维空间的弹塑性矩阵,然后可以简化到二维空间.由得到的弹塑性矩阵即可得到改进热力学模型的应力应变关系

$$d\sigma_{ij} = D_{ijkl}^{ep} d\epsilon_{kl} \quad (17)$$

3 模型的有限元分析

为了对模型进行初步验证,编制了 Collins 热力学模型和改进模型的有限元程序.针对上海吹填粉细砂常规三轴排水试验的变形特点进行模拟分析.

3.1 模型的有限元程序设计

本程序是土体弹塑性模型有限元程序.程序用 FORTRAN77 语言编写,采用模块化的子程序.单元包括四节点等参元、三角形单元、四节点接触面单元等,程序的输入和输出数据都采用文件形式,方便了前后处理.应用基本增量法或中点增量法可以对挡土墙、边坡、土石坝等岩土工程进行非线性或线性平面应变问题有限元计算.

Collins 热力学模型簇本身可以模拟较广的土体特性,如修正剑桥模型等.改进模型通过参数的变化既可以模拟砂土的变形特性,又可以模拟黏土的变

形特性,因此该程序可以模拟更广泛的土体特性.

3.2 常规三轴的有限元模拟分析

模拟土样先加 200 kPa 等向围压,然后再加 500 kPa 轴向压力,压力均分为 4 步逐步加载,剪切加载速率为 $0.2 \text{ mm} \cdot \text{min}^{-1}$.为方便程序的前、后处理,模拟试样直径设为 40 mm,高度为 80 mm(实际试样直径为 38 mm,高为 76 mm),砂样级配范围为 0.025~0.100 mm,不均匀系数为 0.15,相对密度为 2.65,最大、最小干密度分别为 $1.57 \text{ g} \cdot \text{m}^{-3}$ 和 $1.25 \text{ g} \cdot \text{m}^{-3}$,模型参数见表 1.考虑试样是轴对称的圆柱体,因此利用轴对称模型进行分析.其模型的网格划分和边界条件见图 2,共 200 个单元,单元采用四节点等参元.

表 1 模拟计算中采用的模型参数

Tab.1 Model parameters used in calculation

硬化参数				土体的试验参数			
κ	λ	M	M_t	μ	E/kPa	c/kPa	$\varphi/(\circ)$
0.002 15	0.010 04	1.4	1.55	0.3	19 800	0.13	30

注: μ 为泊松比; E 为弹性模量; c 为黏聚力; φ 为内摩擦角.

采用 4 种计算方案进行比较分析.方案 1: $\alpha = \gamma = 1.0$ 时的 Collins 热力学模型(实为修正剑桥模型);方案 2: $\alpha = \gamma = 1.0$ 时的本文改进热力学模型;方案 3: $\alpha = 0.5, \gamma = 0.2$ 时的本文改进热力学模型;方案 4: $\alpha = 0, \gamma = 0.2$ 时的本文改进热力学模型.模型的屈服轨迹见图 1.

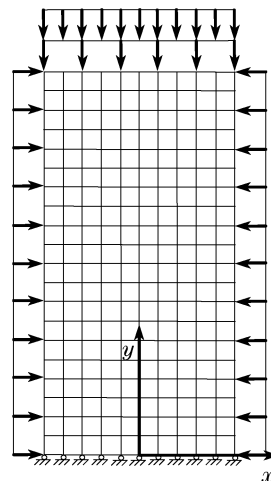


图 2 算例的单元划分及边界条件示意图

Fig.2 FEM mesh and boundary conditions

3.3 模拟结果与分析

方案 1 为修正剑桥模型,适用于正常固结黏土,不适用于中密砂等剪胀土.图 3 和图 4 显示应力 σ_x ,

剪应力 τ_{xy} 在试样的中部出现应力集中,呈 X 型对称分布,这与土体三轴试验呈现剪切带的形式一致;图 5 显示应力 σ_y 在下部中间出现应力集中;图 6 显示试样 x 方向(侧向变形)的三轴排水试验变形特点,试样在受到 200 kPa 等向压缩时,节点坐标向内移动,然后受到轴向 500 kPa 压力时,试样中部开始向外移动,出现外凸,方案 1 外凸在试样的中部,方案 2,3,4 的外凸在中部偏下一点,这与常规黏土和砂土三轴试验破坏时出现外鼓现象一致.从图 7 可看出,方案 2 计算的 y 方向(轴向)位移比改进前(方案 1)的位移小 8%~16%,而且应力大的地方变化明显.这是由于改进模型能够考虑砂土的剪胀性,应力水平高的地方剪胀性越明显.方案 2,3,4 为统一硬化参量改进的模型,能够反映土体的剪胀性.

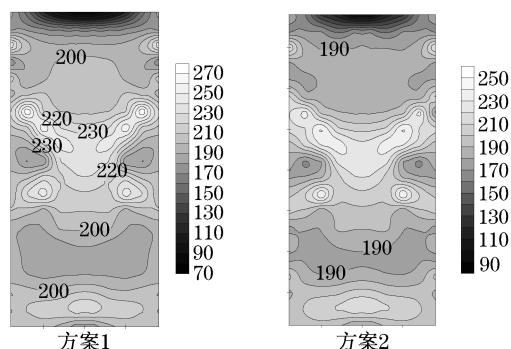


图3 方案1,2计算的应力 σ_x 等值线图(单位:kPa)

Fig.3 Isoline of stress σ_x under Scheme 1,2

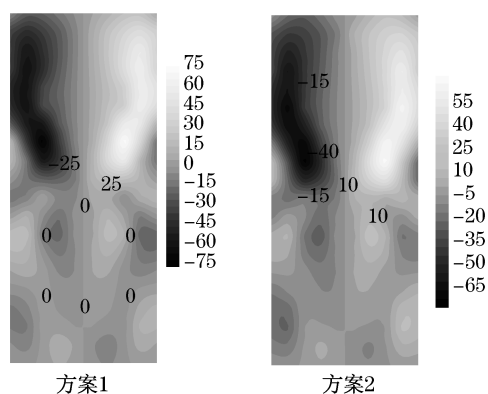


图4 方案1,2计算的剪应力 τ_{xy} 等值线图(单位:kPa)

Fig.4 Isoline of shear stress τ_{xy} under Scheme 1,2

方案 3,4 的屈服面类似于 Lade 的泪珠形屈服面,较适用于砂土.应力、位移分布和方案 1,2 相似,从图 8,9 可以看出应变出现明显的局部化,而且呈 X 型对称分布,侧向应变外凸的位置和剪切带位置比前两种方案有所下移.综合可以看出,采用黏土和砂土模型都能够较好模拟三轴试验的变形趋势.由

于计算方案中包含得到广泛认可的修正剑桥模型(方案 1),这样改进的模型的合理性与有效性得到间接的验证.同时,改进的土体热力学模型反映了土体的剪胀性,体现了统一硬化参量的特性,达到了改进的目的.

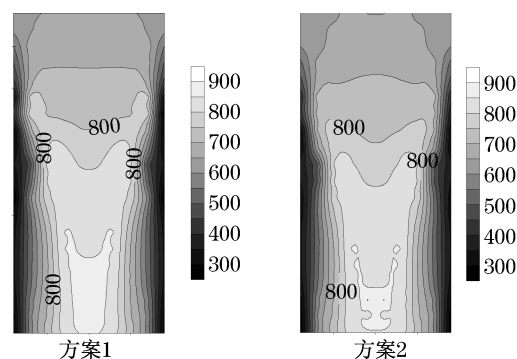


图5 方案1,2计算的应力 σ_y 等值线图(单位:kPa)

Fig.5 Isoline of stress σ_y under Scheme 1,2

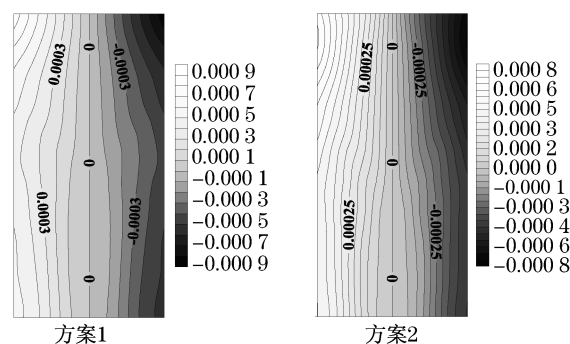


图6 方案1,2计算的 x 方向位移等值线图(单位:m)

Fig.6 Isoline of displacement in x direction under Scheme 1,2

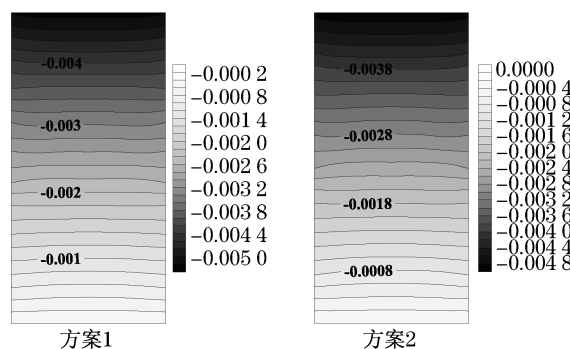
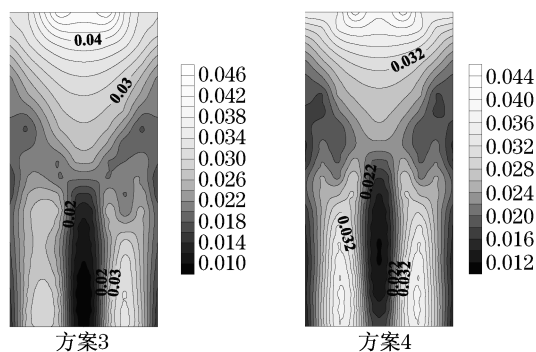
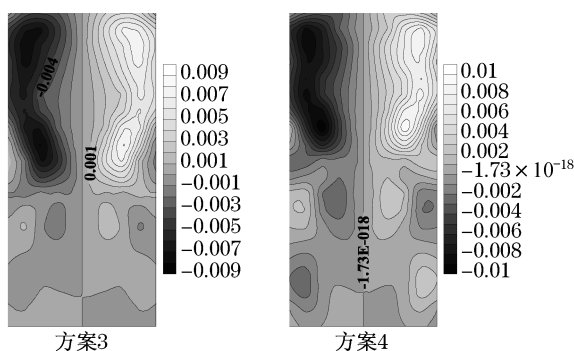


图7 方案1,2计算的 y 方向位移等值线图(单位:m)

Fig.7 Isoline of displacement in y direction under Scheme 1,2

4 结语

基于热力学原理建立的土体本构模型与经典的临界状态理论的形式相似,结构简单,通过参数的不

图 8 方案 3,4 计算的 x 方向应变 ε_x 等值线图Fig. 8 Isoline of strain in x direction under Scheme 3, 4图 9 方案 3,4 计算的剪应变 γ_{xy} 等值线图Fig. 9 Isoline of shear strain γ_{xy} under Scheme 3, 4

同取值,可得到不同的屈服面形式,具有较大的适应性.用热力学方法建立土体本构模型从两个热力学势函数(自由能函数与耗散增量函数)出发,即可导出弹塑性理论必须的屈服条件、流动法则、硬化定律和弹性定律,不仅具有紧凑的数学结构,而且不需要传统方法中的许多人为的任意假设,并自动满足热力学第二定律.但仍采用塑性体积应变为硬化参量,导致不能全面反映岩土材料的硬化程度,也不能反映土(特别是砂土与超固结土)的剪胀性.引入统一硬化参量改进后的统一热力学模型克服了这一缺点,既适用于正常固结黏土等压缩型土,也能适用于中密砂等压缩剪胀型土,且模型只增加一个参数,丰富和发展了土体的热力学模型.针对上海吹填粉细砂的常规三轴排水试验的变形特点,通过模型的三维化及有限元程序化,以及对常规三轴实验的有限元模拟分析,初步验证了模型的适应性和有效性.

参考文献:

- [1] 郑颖人,孔亮.岩土塑性力学[M].北京:中国建筑工业出版社,2010.
- ZHENG Yingren, KONG Liang. Geotechnical plastic mechanics[M]. Beijing: China Architecture and Building Press, 2010.

- [2] Collins I F, Housby G T. Application of thermomechanical principles to the modelling of geotechnical materials, Ser A [J]. Proceeding of Royal Society of London, 1997, 453: 1975.
- [3] Housby G T, Puzin A M. A thermomechanical framework for constitutive models for rate-independent dissipative materials [J]. International Journal of Plasticity, 2000, 16: 1017.
- [4] Collins I F, Kelly P A. A thermomechanical analysis of a family of soil models [J]. Geotechnique, 2002, 52(7): 507.
- [5] Collins I F, Hilder T. A theoretical framework for constructing elastic-plastic constitutive models of triaxial tests [J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 2002, 26(11): 1313.
- [6] Collins I F. A systematic procedure for constructing critical state models in three dimensions [J]. International Journal of Solids and Structures, 2003, 40(8): 4379.
- [7] Collins I F. Elastic-plastic models for soils and sands [J]. International Journal of Mechanical Science, 2005, 47: 493.
- [8] Collins I F. The concept of stored plastic work or frozen elastic energy in soil mechanics [J]. Geotechnique, 2005, 55(5): 373.
- [9] Collins I F, Muhunthan B, Tala T T. The concept of a "Reynolds-Taylor state" and the mechanics of sands [J]. Geotechnique, 2007, 57(5): 437.
- [10] 孔亮, Collins I F. 模拟土体本构特性的热力学方法 [J]. 岩土力学, 2008, 29(7): 1732.
- KONG Liang, Collins I F. Thermomechanical approach to modeling constitutive behaviors of geomaterials [J]. Rock and Soil Mechanics, 2008, 29(7): 1732.
- [11] 姚仰平, 罗汀, 孙德安, 等. 黏土和砂土简单的三维本构模型 [J]. 岩土工程学报, 2002, 24(2): 240.
- YAO Yangping, LUO Ting, SUN Dean, et al. A simple 3-D constitutive model for both clay and sand [J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2002, 24(2): 240.
- [12] Yao Y P, Sun D A, Luo T. A critical state model for sands dependent on stress and density [J]. International Journal for Numerical Analysis Methods in Geomechanics, 2004(28): 323.
- [13] 罗汀, 姚仰平. 岩土材料应力路径无关硬化参量的构成方法 [J]. 岩土力学, 2007, 28(1): 69.
- LUO Ting, YAO Yangping. Method for developing hardening parameter independent of stress path for geomaterials [J]. Rock and Soil Mechanics, 2007, 28(1): 69.
- [14] Ulm F J, Coussy O. Mechanics and durability of solids, Vol 1 [M]. Upper Saddle River: Prentice Hall, 2003.
- [15] Nakai, Mihara Y. A new mechanical quantity for soil and its application to elasto-plastic constitutive models [J]. Soil and Foundation, 1984, 24(2): 82.
- [16] Salgado F M, Byrne P M. A three-dimensional constitutive elasto-plastic model for sands following the spatially mobilized plane concept [C] // Advance in Geomechanics. Rotterdam: Balkema, 1991: 675 - 682.
- [17] Matsuoka H A, Yao Y P. The Cam-clay model revised by the SMP criterion [J]. Soils and Foundation, 1999, 24(2): 81.