

# 铁道车辆弹性车体垂向运行平稳性最优控制

宫 岛, 周劲松, 孙文静, 谢维达

(同济大学 铁道与城市轨道交通研究院, 上海 201804)

**摘要:** 采用基于轨道不平顺谱的最优控制及包括轮轴间时延的预瞄控制算法, 设计了整车的主动悬挂控制规律, 对铁道车辆弹性车体垂向动力学模型进行仿真分析. 结果表明, 基于轨道谱的预瞄控制算法在控制输出力及抑制车体的振动效果方面要略优于单纯基于轨道谱的最优控制算法; 基于轨道谱的最优控制可以改善轨道至弹性车体中部的加速度传递率, 在控制车体刚体振动的同时, 也能抑制车体的整体弹性振动; 最优控制算法对车体系统的低频振动及车体弹性一阶垂向弯曲振动控制作用明显, 而对车体高频振动基本无抑制作用, 据此可以帮助选择助动器的响应频率范围.

**关键词:** 铁道车辆; 弹性车体; 主动悬挂; 最优控制; 运行平稳性

**中图分类号:** U 270.1<sup>+</sup>1

**文献标识码:** A

## Vertical Ride Quality of Flexible Car Body Railway Vehicles with Optimal Control

GONG Dao, ZHOU Jinsong, SUN Wenjing, XIE Weida

(Institute of Railway & Urban Mass Transit Research, Tongji University, Shanghai 201804, China)

**Abstract:** A vertical dynamic model of railway passenger vehicle is built, which covers effects of car body flexibility and all vertical rigid modes. The model is simulated and researched by the control laws of railway vehicle secondary active suspension which are designed according to optimal control theory, based on track irregularity spectrum and time delay between axles. The results show that optimal control of preview based on track spectrum and time delay between axles is more effective than optimal control only based on track spectrum in the aspects of actuator output force and effects of car body vibration control; the acceleration transmissibility from track to flexible car body center can be reduced by optimal control, rigid and flexible vibration also can be controlled; low frequency vibration and the first order bending

vibration of car body can be controlled effectively by optimal control simultaneously, but almost no effects on high frequency vibration, the response frequency range of actuator can be selected accordingly.

**Key words:** railway vehicle; flexible car body; active suspension; optimal control; ride quality

随着铁路车辆运行速度不断提高, 客运速度 300 km · h<sup>-1</sup> 以上不再是难以企及的目标, 而在这样的高速运行状态下, 车体结构弹性振动对客车系统运行平稳性的影响也更加突出. 国内外专家近来将研究的重点放在对弹性车体的分析上, 曾京<sup>[1]</sup>建立了铁道客车垂向刚柔耦合模型, 在二系悬挂采用半主动减振器, 对车辆系统及弹性车体振动进行分析. 陆正刚<sup>[2]</sup>在车体中部设置动力吸振器, 运用独立模态空间控制方法来改善刚柔耦合车体的垂向运行平稳性. Schandl 将压电式作动器直接安装在车体上<sup>[3]</sup>, 运用最优控制理论设计控制器来抑制弹性车体振动. 本文运用刚柔耦合动力学模型以及基于轨道谱及轴间预瞄技术的最优控制算法对刚柔耦合模型车辆的垂向运行平稳性进行控制仿真研究.

## 1 系统模型

采用的动力学模型如图 1 所示. 模型中包含了车体、构架和轮对. 假设构架及轮对为刚性, 车体及构架的质心在其纵向中间位置处. 图中:  $z(x, t)$  为弹性车体的垂向振动位移;  $x$  为位置坐标;  $t$  为时间变量;  $m_b$  为车体质量;  $I_b$  为车体点头惯量;  $\theta_b$  为车体点头位移;  $m_t$  为构架质量;  $I_t$  为构架点头惯量,  $z_{t1}$ ,  $z_{t2}$  和  $\theta_{t1}$ ,  $\theta_{t2}$  分别为转向架 1 和转向架 2 的垂向位移及点头位

收稿日期: 2009-11-15

基金项目: “十一五”国家科技支撑计划项目(2009BAG11B02)

第一作者: 宫 岛(1985—), 男, 博士生, 主要研究方向为载运工具运用工程. E-mail: gongdao.brian@gmail.com

通讯作者: 周劲松(1969—), 男, 副教授, 工学博士, 主要研究方向为载运工具运用工程. E-mail: jinsong.zhou@tongji.edu.cn

移;  $k_p, c_p$  分别为垂向一系刚度与阻尼系数;  $k_s, c_s$  分别为垂向二系刚度与阻尼系数;  $u_i$  为前作动器输出力合力;  $u_r$  为后作动器输出力合力;  $l_b$  为车辆定距之半;  $l_w$  为轴距之半. 假设轮对紧贴钢轨, 因此其位移为轨道不平顺输入,  $z_{w1} \sim z_{w4}$  为第 1 至第 4 轮对的轨道不平顺垂向激励. 各部件均为线性.

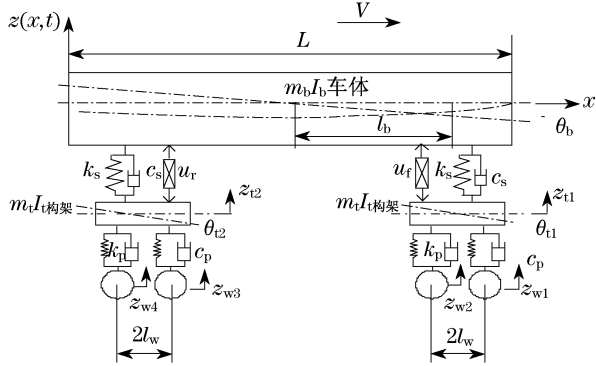


图1 考虑弹性车体的单车垂向主动控制的力学模型图  
Fig.1 Flexible railway vehicle vertical active suspension model

将车体视为均质等截面欧拉梁时, 采用分离变量法, 当  $z(x, t)$  包括刚体振动时, 取车体的第 1 阶振型为刚体浮沉, 振型函数  $Y_1(x) = 1$ , 车体的第 2 阶振型为刚体点头振动, 按照图 1 定义的坐标方向其振型函数  $Y_2(x) = L/2 - x$ , 取前  $n$  阶模态表示车体的振动<sup>[4]</sup>

$$z(x, t) = z_b(t) + \left(\frac{L}{2} - x\right)\theta_b(t) + \sum_{i=3}^n Y_i(x)q_i(t) \quad (1)$$

式中:  $z_b(t)$  和  $\theta_b(t)$  为刚体的浮沉和点头振型的模态坐标;  $Y_i(x)$  和  $q_i(t)$  分别为车体弹性振动的振型函数和模态坐标. 振型函数的形式参见文献[4]. 运用拉格朗日方程推导梁的垂向振动方程, 并考虑振型函数的正交性, 即可获得图 1 所示的车辆系统的动力学方程, 如

$$\ddot{q}_i(t) + 2\xi_i\omega_i\dot{q}_i(t) + \omega_i^2q_i(t) = \frac{Y_i(l_1)}{m_b}P_1 + \frac{Y_i(l_2)}{m_b}P_2, \quad i = 3, 4, \dots, n \quad (2)$$

式中:  $P_1$  和  $P_2$  分别为第 1 台转向架(右手边  $l_1$  位

置)和第 2 台转向架(左手边  $l_2$  位置)二系悬挂及控制器输出作用在弹性车体上的合力;  $\xi_i$  和  $\omega_i$  分别为第  $i$  阶车体弹性振型的阻尼比和自振频率. 将整个车辆系统列为状态方程如

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B}\mathbf{U} + \mathbf{B}_2\mathbf{Z}_w \quad (3)$$

式中:  $\mathbf{X}$  为状态向量;  $\mathbf{U}$  为控制向量;  $\mathbf{Z}_w$  为轨道不平顺激励向量;  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{B}_2$  矩阵分别为它们的系数矩阵. 所有的矩阵均为常数阵并具有相应的维数.

对于铁道车辆而言, 由于车身较长, 各点的加速度不均匀, 平稳性的评价指标主要依据车体刚性振动加速度及弹性振动加速度综合做出. 车体低阶的弹性振动模态包括菱形变形和垂向一阶弯曲模态, 考虑到对垂向平稳性影响的主要因素是垂向弯曲模态, 因此模型及分析中主要针对垂向模态. 选取所关心对象的垂向振动加速度作为输出, 定义:  $\mathbf{Y} =$

$$\begin{bmatrix} \dot{z}'_b & \dot{\theta}'_b & \dot{q}'_3 & \dot{q}'_4 & \dot{z}'_{t1} & \dot{z}'_{t2} \end{bmatrix}^T, \text{ 则} \\ \mathbf{Y}(t) = \mathbf{C}_y\mathbf{X}(t) + \mathbf{D}_y\mathbf{U}(t) \quad (4)$$

式中:  $\mathbf{C}_y$  和  $\mathbf{D}_y$  分别为相应的系数矩阵. 此时, 所采用的性能评价指标形式  $J_1$  为

$$J_1 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \mathbf{E} \left\{ \int_0^{\infty} (\mathbf{Y}^T(t)\mathbf{Q}_1\mathbf{Y}(t) + \mathbf{U}^T(t)\mathbf{R}_1\mathbf{U}(t)) dt \right\} \quad (5)$$

式中:  $\mathbf{Q}_1, \mathbf{R}_1$  为对称阵,  $\mathbf{Q}_1$  为非负定矩阵,  $\mathbf{R}_1$  为正定矩阵, 分别为状态变量及控制输入的权矩阵. 控制规律为  $\mathbf{U}(t) = -\mathbf{K}\mathbf{X}(t)$ , 增益矩阵  $\mathbf{K}$  为常量<sup>[5]</sup>.

## 2 基于轨道谱的最优控制算法

当轨道垂向不平顺由白噪声经两阶成型滤波器滤波形成时, 滤波器的一般形式为

$$G(s) = \frac{\Omega_c \sqrt{A_v V^3}}{s^2 + (\Omega_r + \Omega_c)Vs + \Omega_r\Omega_c V} \quad (6)$$

式中:  $\Omega_r, \Omega_c$  为截断波数;  $A_v$  为表征不平顺程度的参数;  $V$  为车辆运行速度.

对四轴车辆而言, 当不考虑轮对时延, 假设四个轮对均由白噪声信号经成型滤波器滤波产生时, 有

$$\dot{\mathbf{Z}}_w = \mathbf{F}_{w1}\mathbf{Z}_w + \mathbf{I}_f\mathbf{W} \quad (7)$$

$$\mathbf{F}_{w1} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_s & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_s & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_s & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_s \end{bmatrix}, \mathbf{I}_f = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_s & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}_s & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{B}_s & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{B}_s \end{bmatrix},$$

其中:  $\mathbf{Z}_w = [z_{w1} \quad \dot{z}_{w1} \quad z_{w2} \quad \dot{z}_{w2} \quad z_{w3} \quad \dot{z}_{w3} \quad z_{w4} \quad \dot{z}_{w4}]^T, \mathbf{F}_{w1} =$

$$\mathbf{A}_s = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\Omega_r \Omega_c V^2 & -(\Omega_r + \Omega_c) V \end{bmatrix}, \mathbf{B}_s = \begin{bmatrix} 0 \\ \Omega_c \sqrt{A_v V^3} \end{bmatrix}, \mathbf{W} = [w_1 \quad w_2 \quad w_3 \quad w_4]^T.$$

依据上述假设,  $w_1 = w_2 = w_3 = w_4 = w$ , 综合式(3)与式(7)有

$$\text{其中: } \mathbf{X}_a = \begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{Z}_w \end{bmatrix}, \mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B}_2 \\ \mathbf{0}_{8 \times n} & \mathbf{F}_{w1} \end{bmatrix}, \mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{0}_{8 \times 2} \end{bmatrix}, \mathbf{B}_w = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n \times 1} \\ \mathbf{I}'_f \end{bmatrix}, \mathbf{I}'_f = [0 \quad a_f \quad 0 \quad a_f \quad 0 \quad a_f \quad 0 \quad a_f]^T, a_f = \Omega_c \sqrt{A_v V^3}. n \text{ 为状态变量的维数. 式(8)为基于轨道谱的最优控制系统模型.}$$

### 3 轴间预瞄控制算法

轮对之间的输入是互相关联的而不是相互独立的, 其后各轮对的输入是第一轮对输入的简单时延. 因此前轮对感受的轨道信息可作为后轮对输入的预瞄信息, 实现轴间预瞄控制. 对于轮轴时延, 可采用 Pade 近似描述,  $N$  阶 Pade 近似的传递函数为<sup>[6]</sup>

$$\frac{w_2(s)}{w_1(s)} = e^{-\tau s} = \frac{a_0 - a_1 s + a_2 s^2 - a_3 s^3 + \dots + a_N s^N}{a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + a_3 s^3 + \dots + a_N s^N} \quad (9)$$

$$\text{式中: } \boldsymbol{\eta}(t) = \begin{bmatrix} \eta_1(t) \\ \eta_2(t) \\ \eta_3(t) \end{bmatrix}, \mathbf{A}_\eta = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{\eta 1} & \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{0}_{2 \times 2} \\ \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{A}_{\eta 2} & \mathbf{0}_{2 \times 2} \\ \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{A}_{\eta 3} \end{bmatrix}, \mathbf{B}_\eta = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{\eta 1} \\ \mathbf{B}_{\eta 2} \\ \mathbf{B}_{\eta 3} \end{bmatrix}, \mathbf{C}_\eta = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{1 \times 2} & \mathbf{0}_{1 \times 2} & \mathbf{0}_{1 \times 2} \\ \mathbf{C}_{\eta 1} & \mathbf{0}_{1 \times 2} & \mathbf{0}_{1 \times 2} \\ \mathbf{0}_{1 \times 2} & \mathbf{C}_{\eta 2} & \mathbf{0}_{2 \times 1} \\ \mathbf{0}_{1 \times 2} & \mathbf{0}_{1 \times 2} & \mathbf{C}_{\eta 3} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}_v = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 1]^T.$$

将式(11)代入式(7), 并与式(10)合并, 得

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{Z}}_w(t) \\ \dot{\boldsymbol{\eta}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{w1} & \mathbf{I}_f \mathbf{C}_\eta \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_\eta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_w(t) \\ \boldsymbol{\eta}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{I}_f \mathbf{B}_v \\ \mathbf{B}_\eta \end{bmatrix} w(t) \quad (12)$$

$$\text{其中: } \mathbf{X}_f = \begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{Z}_w \\ \boldsymbol{\eta}(t) \end{bmatrix}, \mathbf{B}_f = \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{0}_{8 \times 2} \\ \mathbf{0}_{6 \times 2} \end{bmatrix}, \mathbf{B}_b = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n \times 1} \\ \mathbf{I}_f \mathbf{B}_v \\ \mathbf{B}_\eta \end{bmatrix}, \mathbf{A}_f = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B}_2 & \mathbf{0}_{n \times 6} \\ \mathbf{0}_{8 \times n} & \mathbf{F}_{w1} & \mathbf{I}_f \mathbf{C}_\eta \\ \mathbf{0}_{6 \times n} & \mathbf{0}_{6 \times 8} & \mathbf{B}_\eta \end{bmatrix}, n \text{ 为动力学系统状态变量的维数.}$$

式(13)为考虑轮轨输入时延的最优控制系统模型.

### 4 仿真结果与分析

采用典型高速客车参数, 轨道不平顺采用高速高激励谱<sup>[7]</sup>, 刚柔耦合模型中仅考虑车体的前 2 阶弹性振动模态, 运用基于轨道谱的最优控制算法 (OCTS 控制算法, Optimal control based on track spectrum) 及轴间预瞄控制算法 (OCPV 控制算法, Preview optimal control) 对所建立的刚柔耦合模型进行仿真分析, 分析结果见图 2~7.

式中,  $\tau$  为延迟时间. 采用两阶近似时:  $a_0 = 12/\tau^2$ ,  $a_1 = 6/\tau$ ,  $a_2 = 1$ . 对于四轴铁道车辆而言, 其余各轮对均可视为第一轮对时延的白噪声信号经成型滤波器滤波构成, 此时有:  $w_1(t) = w(t)$ ,  $w_2(t) = w_1(t - \tau_1)$ ,  $w_3 = w_1(t - \tau_2)$ ,  $w_4 = w_1(t - \tau_3)$ .

假设  $\eta_i(t)$  为表征轮对时延而设置的中间变量, 将上述四轴铁道车辆轮轴时延传递函数用状态方程表达,  $\mathbf{A}_{\eta i}$ ,  $\mathbf{B}_{\eta i}$ ,  $\mathbf{C}_{\eta i}$  为相应的系数矩阵, 则

$$\dot{\boldsymbol{\eta}}(t) = \mathbf{A}_\eta \boldsymbol{\eta}(t) + \mathbf{B}_\eta w(t) \quad (10)$$

$$\mathbf{W} = \mathbf{C}_\eta \boldsymbol{\eta}(t) + \mathbf{B}_v w(t) \quad (11)$$

式(12)即为轨道谱输入且包含时延的轨道不平顺模型, 将矩阵增广, 综合式(3)和式(12), 可得

$$\dot{\mathbf{X}}_f(t) = \mathbf{A}_f \mathbf{X}_f(t) + \mathbf{B}_f \mathbf{U}(t) + \mathbf{B}_b w(t) \quad (13)$$

图 2 是车辆系统的垂向振动位移响应, 从图 2a 和图 2b 可以看到, OCTS 控制算法和 OCPV 控制算法可以显著降低车体和转向架的浮沉位移响应. 在对车体的浮沉响应控制中, OCTS 算法要优于 OCPV 算法; 而对构架的浮沉控制而言, 两种控制算法效果相当. 从图 2c 可以看到, OCPV 算法由于基于第一轮对感受到的不平顺进行控制规律设计, 因此对车体点头振动控制更为有效. 图 2d 是车体中部弹性一阶垂向振动位移响应均方根值在各工况下随速度变化的情况. 可以看到, 最优控制算法对于车辆的弹性振

动也有明显的抑制效果.

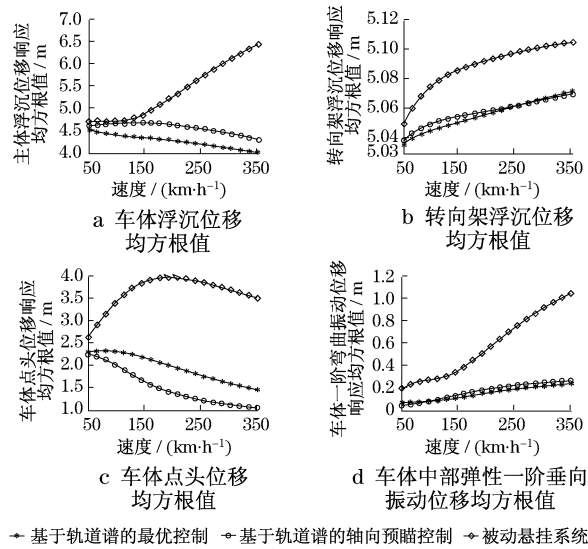


图2 车辆系统垂向振动位移响应

Fig.2 Displacement of vehicle system vertical vibration

图3是转向架上方车体垂向振动加速度结果.结果显示,最优控制可以有效地降低转向架上方车体的垂向振动加速度,基于轴间预瞄的OCPV控制算法要略优于单纯基于轨道谱的OCTS算法.图4是控制算法下的作动器输出力均方根值随速度变化情况,可以看到在车速 $300 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ 以下时,两种算法的输出力均方根值都在 $5000 \text{ N}$ 以下,OCPV算法相对于OCTS算法力的输出更小一些.虽然从控制效果和控制力需求看,OCPV算法都要略优于OCTS算法,但由于速度越高,OCPV算法对于OCTS算法的收益越低<sup>[8]</sup>,所以在以下分析中仅采用OCTS控制.

图5是当车速为 $200 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ ,采用基于轨道谱的最优控制算法时,轨道至弹性车体中部的加速度传递率及车体中部的加速度响应功率谱.图5a显

示,采用控制算法后,轨道至弹性车体中部加速度响应传递率在车体弯曲频率 $8.5 \text{ Hz}$ 处明显降低.车体在低频处的刚性振动和弹性一阶弯曲振动明显衰减.图5b结果表明,最优控制对车体 $4 \text{ Hz}$ 以下的低频振动、车体 $8.5 \text{ Hz}$ 处的弹性一阶弯曲振动控制作用明显,而对车体的高频振动基本没有抑制作用.由于 $8.5 \text{ Hz}$ 在垂向平稳性敏感区范围内<sup>[9]</sup>,因此控制作用对平稳性改善显著.

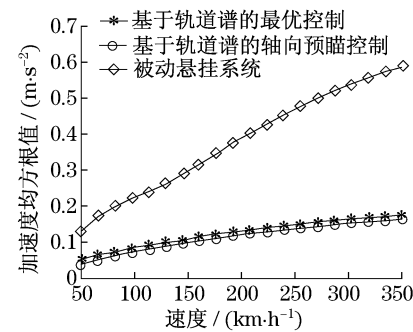


图3 转向架上方车体垂向振动加速度

Fig.3 RMS values of car body acceleration above bogie center

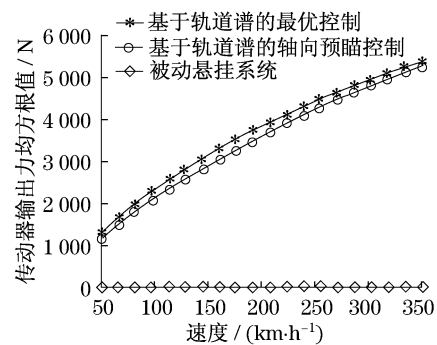


图4 各算法作动器输出力均方根

Fig.4 Actuator output force of each algorithm

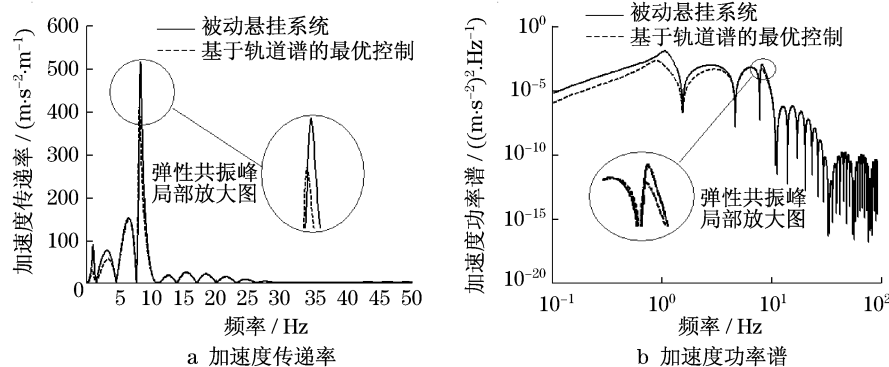


图5 车体中部加速度传递率和功率谱

Fig.5 Acc. transmissibility and acc. PSDs at car body center

图6是车辆垂向运行平稳性与速度的关系.可以看出,OCTS算法可以有效地改善弹性车体中部和转向架上方车体的运行平稳性,相对而言,转向架上方处的运行平稳性改善效果更佳.图7是运行速度 $200\text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$ 时,车辆垂向运行平稳性与车体弹性一阶频率的关系.结果显示,即使当车体弹性一阶频率低于 $10\text{ Hz}$ 时,OCTS算法亦可以有效地降低车体的弹性振动.由于车体的弹性频率和结构的阻尼比在建造完毕后,很难改善,此时可以考虑引入主动控制提高车辆运行的平稳性.

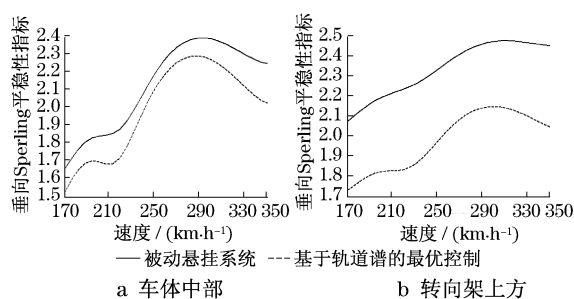


图6 运行平稳性与速度的关系

Fig.6 Association between velocity and ride quality

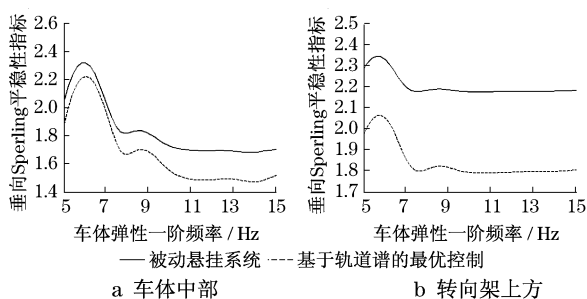


图7 运行平稳性与车体弹性的关系

Fig.7 Association between car body flexibility and ride quality

## 5 结论

(1) 当采用刚柔耦合垂向铁道车辆模型时,从控制输出力及抑制车体的振动效果看,基于轨道谱的预瞄控制算法要略优于单纯基于轨道不平顺谱的最优控制算法;

(2) 虽然二系主动悬挂中的作动器设置在车体弹性弯曲振动的节点附近,但是由于基于轨道谱的最优控制可以改善轨道至弹性车体中部的加速度传

递率,因此该算法在控制车体刚体振动的同时,也能抑制车体的整体弹性振动;

(3) 采用最优控制算法时的车体加速度功率谱响应结果表明,最优控制算法对车体系统的低频振动及车体弹性一阶垂向弯曲振动控制作用明显,而对车体高频振动基本无抑制作用,据此可以帮助选择作动器的响应频率范围.

## 参考文献:

- [1] 曾京,罗仁.考虑车体弹性效应的铁道客车系统振动分析[J].铁道学报,2007,29(6):19.  
ZENG Jing, LUO Ren. Vibration analysis of railway passenger car systems by considering flexible car body effect[J]. Journal of the China Railway Society, 2007, 29(6): 19.
- [2] 陆正刚,郭慧明.柔性车体振动和运行平稳性控制研究[J].中国机械工程,2006,17(10):1026.  
LU Zhenggang, GUO Huiming. Flexible vehicle vibration active control and ride quality improvement [J]. China Mechanical Engineering, 2006, 17(10): 1026.
- [3] Schandl G, Lungner P, Benatzky C, et al. Comfort enhancement by an active vibration reduction system for a flexible railway car body[J]. Vehicle System Dynamics, 2007, 45(9): 835.
- [4] 周劲松,宫岛,孙文静等.铁道客车车体垂向弹性对运行平稳性的影响[J].铁道学报,2009,31(2):32.  
ZHOU Jinsong, GONG Dao, SUN Wenjing, et al. Influence of vertical elasticity of car body of railway passenger vehicles on ride quality[J]. Journal of the China Railway Society, 2009, 31(2): 32.
- [5] Hac A. Suspension optimization of a 2-D of vehicle model using a stochastic optimal technique[J]. Journal of Sound and Vibration, 1985, 100(3): 343.
- [6] Abdel Hard, Crolla D A. Active suspension control algorithms for a four-wheel vehicle model[J]. Int J of Vehicle Design, 1992, 13(2): 144.
- [7] 王福天,周劲松,任利惠.用于高速车辆动态仿真的轨道谱分析[J].铁道学报,2002,24(5):21.  
WANG Futian, ZHOU Jinsong, REN Lihui. Analysis on track spectrum density for dynamic simulations of high speed vehicles [J]. Journal of the China Railway Society, 2002, 24(5): 21.
- [8] 周劲松,张洪,沈钢,等.基于轨道谱的铁道车辆主动悬挂轴间预瞄控制[J].同济大学学报:自然科学版,2006,34(2):239.  
ZHOU Jinsong, ZHANG Hong, SHEN Gang, et al. Preview control law of railway vehicle active suspension based on track irregularity spectrum and time delay between axles[J]. Journal of Tongji University: Natural Science, 2006, 34(2): 239.
- [9] Garg V K, Rao V Dukkipati. Dynamics of railway vehicle systems [M]. New York: Academic Press, 1984.