文章编号:0253-374X(2011)03-0327-06
DOI:10.3969/j.issn.0253-374x.2011.03.004

# 过滤高阶失稳振型满足显式算法的稳定性

楼梦麟[1],李常青[1,2]

(1.同济大学 土木工程防灾国家重点实验室,上海 200092;2.中南大学 土木建筑学院建筑工程系,湖南 长沙 410075)

**摘要**:以中心差分显式算法为例,证明了算法传递矩阵的特征向量与结构自振向量的一致性,以及显式算法步长过大时的失稳,是传递矩阵的特征值和特征向量两个因素共同作用的结果.在证明的基础上得到了过滤高阶失稳振型来满足算法稳定性的方法,也就是在每步按通常的显式算法得到计算结果后,增加了从结果位移向量中过滤振型参与系数很小的高阶失稳振型的计算步骤,使得计算步长即使取在稳定域外也能使算法不会失稳.这种方法,既大大提高了通常采用的显式方法的计算效率,同时对求解的精度也影响不大.算例证明了这种方法的有效性.为求解刚性常微分方程组提供一个思路.

**关键词**:中心差分法;高阶振型;失稳;振型过滤;时间步长

**中图分类号**:O 321　　**文献标识码**:A

## Filtration of High-ordered Vibration Mode to Satisfy Explicit Method's Stability

*LOU Menglin*[1], *LI Changqing*[1,2]

(1. State Key Laboratory for Disaster Reduction in Civil Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, China; 2. School of Civil Engineering and Architecure, Central South University, Changsha 410075, China)

**Abstract**: The consistency between transferring matrix's characteristic vector and structure's natural vibration shape was proved by taking central differential method as an example. The explicit method's destabilization was caused by a combination of the transferring matrix's characteristic value and the corresponding characteristic vector. A new method was proposed by filtrating the high destabilization vibration mode from result displacement vectors at different time, as a result, the wide time step size beyond the stability field will not lead to a calculation destabilization. With the proposed method, the calculation efficiency is improved with the same precision. Numerical model validates the method, which develops a new way to solve the stiff differential equations.

**Key words**: central differential method; high vibration mode; destabilization; filtration of vibration mode; time step size

结构动力计算采用的逐步积分方法,有显式算法和隐式算法之分.隐式算法需要求解耦联方程组,当结构自由度数目很大,求解这一方程组的工作量非常大.而显式算法不需要求解方程组,通常情况下需要考虑体系非线性时,采用条件稳定的显式格式求解动力反应是非常有利的.因此,显式积分方法在许多工程领域内不断受到人们的关注[1-8].但在有些情况下,结构最高阶振型属于局部振型,其对应的频率非常大,远超出其被激活的振型对应的最高频率,尽管这些局部振型参与系数很小,忽略这些振型对计算结果影响很小,但是由于显式算法的稳定性要求,时间步长的选择却必须按照结构的最高频率来选择.如何选择较大的时间步长,使得即使时间步长在稳定域外也能使计算不失稳,成为一个有意义的课题.

## 1　中心差分显式算法的失稳机理

显式算法的条件稳定性,使其求解对步长的要求很严格.对于中心差分显式算法(阻尼阵为零或对角矩阵时),其稳定条件为

$$\omega_{最大} h_{最大} \leqslant 2 \tag{1}$$

式中:$\omega_{最大}$为结构的最高自振频率;$h_{最大}$为满足稳定条件能采取的最大时间步长.

按照式(1)确定时间步长有以下两方面的不足:首先,当结构的整体振型最高自振频率并不大,式(1)

收稿日期:2009-12-08
基金项目:上海市科委基础研究重点基金项目(07JC14051)
第一作者:楼梦麟(1947—),教授,博士生导师,工学博士,主要研究方向为结构抗震与震动控制、土-结构动力相互作用和复杂结构动力计算理论.E-mail:lml@tongji.edu.cn
通讯作者:李常青(1978—),男,工学博士,主要研究方向为复杂结构的地震反应分析和动力方程求解算法.E-mail:lcq_stu@126.com

要求并不需要取非常小的时间步长,但是如果结构中存在局部高刚度构件,则会产生远远高于整体自振频率的局部振型自振频率.由于这样的自振频率对应的结构局部高阶振型的振型参与系数和动力放大系数都很小,使得即使全部忽略它的作用,对计算结果的精度都不会产生影响,显然如仍按照最高局部振型的频率来选择 $\omega_{最大}$ 来满足式(1),则必须将时间步长 $h_{最大}$ 取得很小,很大程度上降低了计算效率.

其次,理论推导将表明,显式算法的失稳,不仅与导出式(1)的传递矩阵的谱半径有关,而且也与此谱半径对应的传递矩阵的特征向量相关,两者不可分割.因此,仅仅根据一个因素来确定计算步长是不完全合理,如何综合考虑两个影响因素,合理确定时间步长需要进一步研究.下面以中心差分法为例,论述这一问题.中心差分法的算式为

$$\left(\frac{1}{\Delta t^2}[\boldsymbol{M}]+\frac{1}{2\Delta t}[\boldsymbol{C}]\right)\{\boldsymbol{v}_{t+\Delta t}\}=\{\boldsymbol{F}_t\}-\left([\boldsymbol{K}]-\frac{2}{\Delta t^2}\{\boldsymbol{M}\}\right)\{\boldsymbol{v}_t\}-\left(\frac{1}{\Delta t^2}[\boldsymbol{M}]-\frac{1}{2\Delta t}[\boldsymbol{C}]\right)\{\boldsymbol{v}_{t-\Delta t}\} \tag{2}$$

式中:$[\boldsymbol{M}]$,$[\boldsymbol{C}]$和$[\boldsymbol{K}]$分别为结构的质量、阻尼和刚度矩阵;$\{\boldsymbol{v}_{t+\Delta t}\}$,$\{\boldsymbol{v}_t\}$,$\{\boldsymbol{v}_{t-\Delta t}\}$分别为时刻 $t+\Delta t$、$t$、$t-\Delta t$ 的位移向量;$\{\boldsymbol{F}_t\}$为 $t$ 时刻的荷载向量;$\Delta t$ 为时间步长.

为考察中心差分法的稳定性,令$[\boldsymbol{C}]=0$,$\{\boldsymbol{F}_t\}=0$,可得到如下传递格式

$$\begin{Bmatrix}\boldsymbol{v}_{t+\Delta t}\\ \boldsymbol{v}_t\end{Bmatrix}=[\boldsymbol{A}]\begin{Bmatrix}\boldsymbol{v}_t\\ \boldsymbol{v}_{t-\Delta t}\end{Bmatrix} \tag{3}$$

式中:$[\boldsymbol{A}]$为传递矩阵.

$$[\boldsymbol{A}]=\begin{bmatrix}-(\Delta t^2[\boldsymbol{M}]^{-1}[\boldsymbol{K}]-2I) & -I\\ I & 0\end{bmatrix}$$

假定传递矩阵$[\boldsymbol{A}]$的谱半径为 $\lambda$,其对应的特征向量为 $\hat{\boldsymbol{v}}$,有

$$[\boldsymbol{A}]\hat{\boldsymbol{v}}=\lambda\hat{\boldsymbol{v}} \tag{4}$$

设初始位移向量$\begin{Bmatrix}\boldsymbol{v}_t\\ \boldsymbol{v}_{t-\Delta t}\end{Bmatrix}$中有初始误差向量$\{\boldsymbol{v}\}_{初始误差}$,则可表示为

$$\{\boldsymbol{v}\}_{初始误差}=\sum_{i=1}^{N}\varepsilon_i\{\hat{\boldsymbol{v}}_i\} \tag{5}$$

式中,$\varepsilon_i$ 为小量.联系式(3)~(5),有

$$\{\boldsymbol{v}\}_{第n步误差}=[\boldsymbol{A}]^n\left(\sum_{i=1}^{N}\varepsilon_i\{\hat{\boldsymbol{v}}_i\}\right)=\sum_{i=1}^{N}\varepsilon_i\lambda_i^n\{\hat{\boldsymbol{v}}_i\} \tag{6}$$

分成两部分,即$|\lambda_i|\leqslant1$,$|\lambda_i|>1$,式(6)可写成

$$\{\boldsymbol{v}\}_{第n步误差}=\sum_{i=1}^{\bar{n}}\varepsilon_i\lambda_i^n\{\hat{\boldsymbol{v}}\}\quad|\lambda_i|\leqslant1+\sum_{j=\bar{n}+1}^{\bar{n}+\bar{\bar{n}}}\varepsilon_j\lambda_j^n\{\hat{\boldsymbol{v}}_j\}\quad|\lambda_i|>1 \tag{7}$$

忽略$|\lambda_i|\leqslant1$时的项,可得

$$\{\boldsymbol{v}\}_{第n步误差}=\sum_{j=\bar{n}+1}^{\bar{\bar{n}}}\varepsilon_j\lambda_j^n\{\hat{\boldsymbol{v}}_j\}\quad|\lambda_i|>1 \tag{8}$$

由式(8)可知,当 $n\to\infty$时,$\varepsilon_j\lambda_j^n\{\hat{\boldsymbol{v}}_j\}\to\infty$,也就是$\{\boldsymbol{v}\}_{第n步误差}\to\infty$,这就是显式算法失稳的机理.谱半径$|\lambda|>1$是导致算法失稳的一个因素,同时也表明,最终误差向量也与 $\lambda$ 对应的传递矩阵的特征向量参与其中有关,表明影响最终误差有两个因素.换句话说,如果$|\lambda|>1$,若式(8)中 $\varepsilon_j=0$,则计算也不会失稳.

因此可以考虑在每步计算结果中将 $\lambda_j$ 对应的高阶振型 $\hat{\boldsymbol{v}}_j$ 过滤掉,这样,在采用大于比式(1)中的 $h_{最大}$ 更大的时间步长 $h_{过滤最大}$时,计算也能得到满意的结果.要过滤掉这些极高阶特征向量,需计算传递矩阵的特征向量.下面将以中心差分法证明,传递矩阵的特征向量与结构的自振振型具有一致性.即传递矩阵的特征向量可以用结构自振振型的形式来表达.

## 2 中心差分法传递矩阵特征向量和结构自振振型的一致性

求解 $2n$ 维($n$ 为结构的自由度数)传递矩阵$[\boldsymbol{A}]$的特征值和特征向量.设特征值 $\lambda$ 对应的特征向量为 $\hat{\boldsymbol{v}}$,将 $\hat{\boldsymbol{v}}$ 写为两个分向量 $\hat{v}_1$、$\hat{v}_2$ 组合的形式,为

$$\hat{\boldsymbol{v}}=\begin{Bmatrix}\hat{v}_1\\ \hat{v}_2\end{Bmatrix} \tag{9}$$

式中:$\hat{v}_1$、$\hat{v}_2$ 都为 $n$ 维向量,有

$$\begin{bmatrix}-(\Delta t^2[\boldsymbol{M}]^{-1}[\boldsymbol{K}]-2I) & -I\\ I & 0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\hat{v}_1\\ \hat{v}_2\end{Bmatrix}=\lambda\begin{Bmatrix}\hat{v}_1\\ \hat{v}_2\end{Bmatrix} \tag{10}$$

根据特征值问题的表述式(10)展开第二式,得到

$$\hat{v}_1=\lambda\hat{v}_2 \tag{11}$$

因此可将 $\hat{\boldsymbol{v}}$ 重新写为

$$\hat{\boldsymbol{v}} = \begin{Bmatrix} \lambda \hat{v}_2 \\ \hat{v}_2 \end{Bmatrix} \tag{12}$$

展开式(10)的第一式，得到

$$-(\Delta t^2 [\boldsymbol{M}]^{-1}[\boldsymbol{K}] - 2I)\hat{v}_1 - \hat{v}_2 = \lambda \hat{v}_1 \tag{13}$$

将式(11)代入式(13)，并通过简化、移项可得

$$[\boldsymbol{M}]^{-1}[\boldsymbol{K}]\{\hat{v}_2\} = \frac{1}{\Delta t^2}\left(2 - \frac{1}{\lambda} - \lambda\right)\{\hat{v}_2\} \tag{14}$$

式(14)是传递矩阵的特征向量 $\hat{\boldsymbol{v}}$ 的分量$\{\hat{v}_2\}$必须满足的条件.

已经知道，传递矩阵的特征值 $\lambda$ 和结构自振特性的值$\omega$，有如下的关系[9]

$$\lambda_{1,2} = \frac{2 - \Omega^2 \pm \sqrt{\Omega^4 - 4\Omega^2}}{2} \tag{15}$$

式中：参数 $\Omega = \omega h$，因为 $\omega > 0$，$h > 0$，所以 $\Omega > 0$.

本文考虑的是失稳域外的振动状况，因此，讨论对象为 $\Omega > 2$ 的情况. 当 $\Omega \geqslant 2$，由式(15)可知，$\lambda_{1,2}$ 为负实数，此时一个结构的自振频率 $\omega$，对应传递矩阵的两个负的实特征值 $\lambda_1$、$\lambda_2$. 设与这两个特征值对应的特征向量分别为$\begin{Bmatrix} \lambda_1 \ \hat{v}_2^1 \\ \hat{v}_2^1 \end{Bmatrix}$、$\begin{Bmatrix} \lambda_2 \ \hat{v}_2^2 \\ \hat{v}_2^2 \end{Bmatrix}$.

将式(15)代入式(14)，可得

$$[\boldsymbol{M}]^{-1}[\boldsymbol{K}]\{\hat{v}_2^1\} = \frac{1}{\Delta t^2}\left(2 - \frac{2}{2 - \Omega^2 + \sqrt{\Omega^4 - 4\Omega^2}} - \frac{2 - \Omega^2 + \sqrt{\Omega^4 - 4\Omega^2}}{2}\right)\{\hat{v}_2^1\} \tag{16}$$

$$[\boldsymbol{M}]^{-1}[\boldsymbol{K}]\{\hat{v}_2^2\} = \frac{1}{\Delta t^2}\left(2 - \frac{2}{2 - \Omega^2 - \sqrt{\Omega^4 - 4\Omega^2}} - \frac{2 - \Omega^2 - \sqrt{\Omega^4 - 4\Omega^2}}{2}\right)\{\hat{v}_2^2\} \tag{17}$$

化简式(16)和式(17)可得

$$[\boldsymbol{M}]^{-1}[\boldsymbol{K}]\{\hat{v}_2^1\} = \omega^2\{\hat{v}_2^1\} \tag{18}$$

$$[\boldsymbol{M}]^{-1}[\boldsymbol{K}]\{\hat{v}_2^2\} = \omega^2\{\hat{v}_2^2\} \tag{19}$$

结构本身的特征值问题可表达为

$$[\boldsymbol{M}]^{-1}[\boldsymbol{K}]\{\phi\} = \omega^2\{\phi\} \tag{20}$$

式中，$\{\phi\}$为结构的自振频率 $\omega$ 对应的振型.

参照式(18)～(20)，有

$$\{\hat{v}_2^1\} = \alpha_1\{\hat{v}_2^2\} = \alpha_2\{\phi\} \tag{21}$$

式中，$\alpha_1$ 和 $\alpha_2$ 为比例系数.

结构的自振频率对应传递矩阵的两个特征值，见式(15)，式(21)表明了此一个自振频率对应的振型和传递矩阵的两个特征向量之间有一致性，这就说明如果将位移向量中的自振高阶振型过滤掉，也就将传递矩阵对应的失稳的高阶振型过滤掉了. 这正是本文提出的振型过滤的理论基础.

## 3　过滤高阶失稳振型与计算效率分析

### 3.1　过滤高阶失稳振型

过滤失稳高阶振型的中心差分方法，不再根据式(1)来选择时间步长 $h$，而是根据式(22)来选择时间步长

$$\omega_{激活最大} h_{过滤最大} \leqslant 2 \tag{22}$$

式中：$\omega_{激活最大}$为整个时程过程中实际被激活了的最高振型对应的频率；$h_{过滤最大}$为采用此方法能采用的最大时间步长. 振型过滤，主要用到振型的完备性和正交性.

设 $N$ 自由度线弹性系统的动力计算，时间步长取为 $h$，其被激活的振型为$\{\bar{\boldsymbol{v}}_i\}$($i = 1, \cdots, \bar{n}$)，这些激活的振型中的最高阶振型为$\{\bar{\boldsymbol{v}}_{\bar{n}}\}$，对应的频率为$\omega_{激活最大}$，满足稳定条件(1). 没有被激活的结构的极高阶振型有 $\bar{\bar{n}}$ 个，这些振型分别为$\{\bar{\bar{\boldsymbol{v}}}_i\}$($i = 1, \cdots, \bar{\bar{n}}$)，这些极高阶振型对应的频率不满足条件(1). 假定计算第 $i$ 步得到的位移为$\{\boldsymbol{v}_{t+i\Delta t}\}_{计算}$，根据振型的完备性，可以写成：

$$\{\boldsymbol{v}_{t+i\Delta t}\}_{计算} = \sum_{i=1}^{\bar{n}} l_i\{\bar{\boldsymbol{v}}_i\} + \sum_{i=1}^{\bar{\bar{n}}} \gamma_i\{\bar{\bar{\boldsymbol{v}}}_i\} \tag{23}$$

式中：$l_i$ 为被激活的振型的参与系数；$\gamma_i$ 为未被激活的振型的参与系数. 为了消去这些极高阶振型分量，将式(23)重写为

$$\{\boldsymbol{v}_{t+i\Delta t}\}_{过滤后} = \{\boldsymbol{v}_{t+i\Delta t}\}_{计算} - \sum_{i=1}^{\bar{\bar{n}}} \gamma_i\{\bar{\bar{\boldsymbol{v}}}_i\} \tag{24}$$

式中：$\{\boldsymbol{v}_{t+i\Delta t}\}_{过滤后}$表示过滤了未被激活极高阶振型的位移向量；$\gamma_i$ 为待求未知量. 为求解 $\gamma_i$，利用振型对质量矩阵的正交性，对式(23)两边右乘$[\boldsymbol{M}]\{\bar{\bar{\boldsymbol{v}}}_j\}$，得

$$\{\boldsymbol{v}_{t+i\Delta t}\}_{计算}[\boldsymbol{M}]\{\bar{\bar{\boldsymbol{v}}}_j\} = \sum_{i=1}^{\bar{n}} l_i\{\bar{\boldsymbol{v}}_i\}[\boldsymbol{M}]\{\bar{\bar{\boldsymbol{v}}}_j\} + \sum_{i=1}^{\bar{\bar{n}}} \gamma_i\{\bar{\bar{\boldsymbol{v}}}_i\}[\boldsymbol{M}]\{\bar{\bar{\boldsymbol{v}}}_j\} \tag{25}$$

根据振型对质量阵的正交性，式(25)可写为

$$\{\boldsymbol{v}_{t+i\Delta t}\}_{计算}[\boldsymbol{M}]\{\bar{\bar{\boldsymbol{v}}}_j\} = \gamma_j\{\bar{\bar{\boldsymbol{v}}}_j\}[M]\{\bar{\bar{\boldsymbol{v}}}_j\}(j = 1, \cdots \bar{\bar{n}}) \tag{26}$$

式(26)可以写成

$$\gamma_j = \frac{\{\boldsymbol{v}_{t+i\Delta t}\}[\boldsymbol{M}]\{\bar{\bar{\boldsymbol{v}}}_j\}}{\{\bar{\bar{\boldsymbol{v}}}_j\}[\boldsymbol{M}]\{\bar{\bar{\boldsymbol{v}}}_j\}} (j = 1, \cdots \bar{\bar{n}}) \quad (27)$$

将式(27)代入式(24),就得到了过滤后的位移向量,即

$$\{\boldsymbol{v}_{t+i\Delta t}\}_{过滤后} = \{\boldsymbol{v}_{t+i\Delta t}\}_{计算} - \sum_{i=1}^{\bar{\bar{n}}} \left( \frac{\{\boldsymbol{v}_{t+i\Delta t}\}_{计算}\boldsymbol{M}\{\bar{\bar{\boldsymbol{v}}}_i\}}{\{\bar{\bar{\boldsymbol{v}}}_i\}[\boldsymbol{M}]\{\bar{\bar{\boldsymbol{v}}}_i\}} \right) \{\bar{\bar{\boldsymbol{v}}}_i\} \quad (28)$$

式(2)和式(28)就组成了过滤未被激活极高阶振型的中心差分法.

### 3.2 过滤高阶失稳振型计算效率分析

因为每个时间步的计算结果会产生误差向量,使得即使前面步骤中过滤了这些高阶失稳振型,但是在新的时间步中,会因为计算机步长误差而重新引入这些高阶失稳振型,因此,每步显式算法得到$\{\boldsymbol{v}_{t+i\Delta t}\}_{计算}$后,都需要用式(28)计算得到$\{\boldsymbol{v}_{t+i\Delta t}\}_{过滤后}$,再用$\{\boldsymbol{v}_{t+i\Delta t}\}_{过滤后}$参与下一步的时程过程运算.

对$N$自由度系统,式(2)计算一步需要计算$(3N^2+4N)$次乘法,$[5N+3(N-1)^2]$次加减法.式(28)需要计算$(5\bar{\bar{n}}N^2)$次乘法,$[5\bar{\bar{n}}(N-1)^2+N]$次加减法.计算一个时间步,本文方法总共需要$(3N^2+4N)+(5\bar{\bar{n}}N^2)$次乘法,$[5N+3(N-1)^2]+[5\bar{\bar{n}}(N-1)^2+N]$次加减法,比中心差分方法的计算量要大.而且,本文方法在计算式(28)之前,还需要先进行模态分析,求出需要过滤的几阶最高失稳振型.但是,因为求解对象为局部刚度很大的结构,最高失稳阵型数目很少,并且那几阶最高失稳阵型只需一次求解即可,不需要在每个时间步中反复进行求解,而逐步积分方法的主要工作量来源于需要计算很多个时间步,所以,本文在具体工作量的估算中,忽略了进行模态分析得到需要过滤的最高失稳阵型的计算量.

设整个时程需要计算的时间长度为$T$,常规的中心差分方法需要的计算时间点数$N_{未过滤}$为

$$N_{未过滤} = \frac{T}{h_{\max}} \quad (29)$$

而过滤了未被激活极高阶振型的中心差分方法,需要的计算时间点数$N_{过滤}$为

$$N_{过滤} = \frac{T}{h_{过滤最大}} \quad (30)$$

按式(2),常规的中心差分方法的整个计算量为

$$\begin{cases} 乘法计算量_{未过滤} = \dfrac{T}{h_{\max}}(3N^2+4N) \\ 加法计算量_{未过滤} = \dfrac{T}{h_{\max}}[5N+3(N-1)^2] \end{cases} \quad (31)$$

本文采取的过滤极高阶未被激活振型的中心差分法的整个计算量为

$$\begin{cases} 乘法计算量_{过滤} = \dfrac{T}{h_{过滤最大}}[(3N^2+4N)+(5\bar{\bar{n}}N^2)] \\ 加法计算量_{过滤} = \dfrac{T}{h_{过滤最大}}[5N+3(N-1)^2]+ \\ \qquad [5\bar{\bar{n}}(N-1)^2+N] \end{cases} \quad (32)$$

因为$h_{过滤最大} \gg h_{\max}$,而且$\bar{\bar{n}}$是个很小的数,比较式(31)和式(32)可以看出,采用本文方法,比常规的中心差分方法能节省更多计算时间.

## 4 算例

用中心差分方法求解一个多自由度系统:如图(1)所示,10个质量$m=2$ kg的小车用刚度分别为$k_1, k_2, \cdots, k_{10}$的弹簧相互连接.不考虑摩擦.在最右边加上一个可变荷载$f=100\sin(2\pi t)N$. $k_2=\cdots=k_{10}=100\ \mathrm{N\cdot m^{-1}}$, $k_1$为局部超强刚度,$k_1=10\ 000\ \mathrm{N\cdot m^{-1}}$.各点的初始位移和初始速度为零:$v_1=v_2=\cdots=v_{10}=0$; $\dot{v}_1=\dot{v}_2=\cdots=\dot{v}_{10}=0$.要求各点的水平位移$v_1, \cdots v_{10}$.整个计算时间长度为10 s.

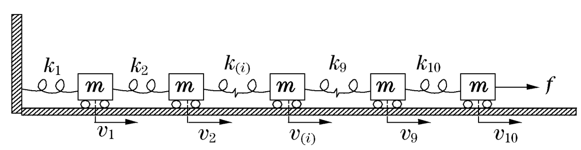



**图1 计算示意图**

**Fig.1 Calculation model**

需要求解的方程为

$$\begin{bmatrix} m & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & m & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{v}_1 \\ \ddot{v}_2 \\ \cdots \\ \ddot{v}_{10} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 & \cdots & 0 \\ -k_2 & k_2+k_3 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & k_{10} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \cdots \\ v_{10} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdots \\ f \end{Bmatrix} \quad (33)$$

求得结构的最高频率为71.1 Hz,其对应的振型为

$$\{\bar{\bar{\boldsymbol{v}}}\}_{\max} = \{0.999\ 95 \quad -0.010\ 1 \quad 10^{-4} \quad -10^{-6} \quad 10^{-8} \quad -10^{-10} \quad 10^{-12} \quad -10^{-14} \quad 10^{-16} \quad -10^{-18}\}^{\mathrm{T}} \quad (34)$$

最高阶的振型参与系数为[10]

$$\frac{\{\bar{\bar{\boldsymbol{v}}}\}^{\mathrm{T}}_{\max}[\boldsymbol{M}]\{0,0,\cdots,0,1\}^{\mathrm{T}}}{\{\bar{\bar{\boldsymbol{v}}}\}^{\mathrm{T}}_{\max}[\boldsymbol{M}]\{\bar{\bar{\boldsymbol{v}}}\}^{\mathrm{T}}_{\max}} = -5.36\times10^{-19} \tag{35}$$

第二最高频率为 13.9 Hz.

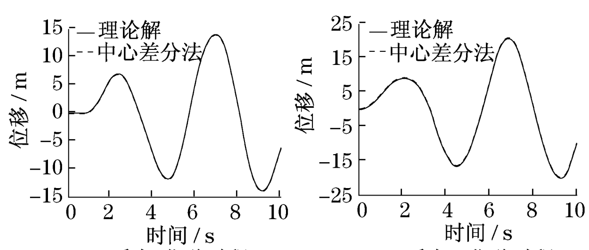
选择时间步长,这里有两种方法,方法一就是常规的方法,即按照式(1)来选择时间按步长,此时需要采取步长为

$$h_{最大} \leqslant 0.028 \tag{36}$$

整个计算时间为 10 s,计算步长 0.028 s,需要计算 357 个时间点上的值.图 2a 和图 2b 分别为 5 号质点和 10 号质点位移的计算结果与精确值的比较.图 2 显示计算结果与理论精确解很接近,其中 5 号点的峰值误差为 1.9%,10 号点的峰值误差为 1.3%.

第二种方法,因为最高频率对应的振型的振型参与系数很小,因此可以采用过滤局部高阶振型方法,按式(22)来选择时间步长.第二最高频率的值为 13.9 Hz,需要采取步长为

$$h_{过滤最大} \leqslant 0.143 \tag{37}$$

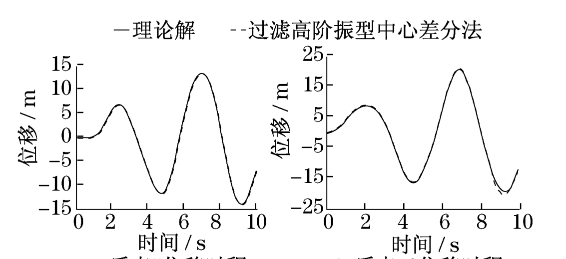


a 质点5位移时程　　b 质点10位移时程

**图 2　中心差分法的计算结果($\boldsymbol{h}$ = 0.028 s)**

**Fig.2　Calculation results of the central differential method ($\boldsymbol{h}$ = 0.028 s)**

整个计算时间为 10 s,计算步长 0.14 s,需要计算 71 个时间点上的值.图 3a 和图 3b 分别为 5 号质点和 10 号质点位移的计算结果与精确值的比较.图 3 显示计算结果与理论精确解很接近,其中 5 号点的峰值误差为 2.4%,10 号点的峰值误差为 1.6%.



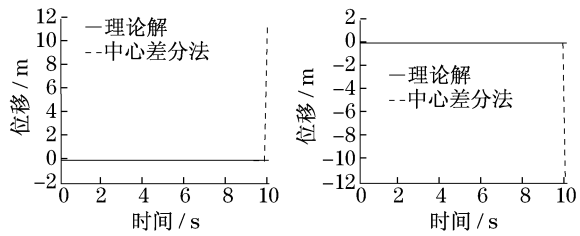
a 质点5位移时程　　b 质点10位移时程

**图 3　过滤极高阶振型中心差分法计算结果**

**Fig.3　Calculation results of the proposed method**

如果采用步长 0.14 s,但是不过滤极高阶振型的话,会使计算结果严重失稳,图 4a 和图 4b 显示了这种情况下的计算结果.

如上所述,本文方法的计算精度比方法 1 略有降低,5 号点的峰值误差从 1.9%增大为 2.4%,10 号点的峰值误差从 1.3%增大为 1.6%,但是精度仍然很高,满足工程精度.关键是在处理这种局部超强刚度产生的算法稳定性问题时,本文方法的计算效率相比常规方法要高得多.



a 质点5位移时程　　b 质点10位移时程

**图 4　中心差分法的计算结果($\boldsymbol{h}$ = 0.14 s)**

**Fig.4　Calculation results of the central differential method ($\boldsymbol{h}$ = 0.14 s)**

具体比较两种方法的运算量,将式(36)和式(37),以及 $T = 10$, $N = 10$, $\bar{n} = 1$ 代入式(31)和式(32),得到两种方法的计算效率比,为

$$\begin{cases}\dfrac{乘法计算量_{未过滤}}{乘法计算量_{过滤}} = 2 \\ \dfrac{加法计算量_{未过滤}}{加法计算量_{过滤}} = 2\end{cases} \tag{38}$$

即常规方法与本文方法的乘法计算量之比为 2,加法计算量之比为 2.可见,采用本文方法,在求解这种局部超刚度产生的算法稳定性问题时,计算效率的提高是明显的.

当局部刚度因素 $k_1$ 更大的时候,数值试验结果表明,计算效率的提高将更加显著.譬如当 $k_1$ = 10 000 000 N·m$^{-1}$ 的时候,结构的最高频率为 2 236.1,对应的振型参与系数为零.采用的时间步长满足式(1),即

$$h_{最大} \leqslant 0.000\ 89 \tag{39}$$

次最高频率为 13.95 Hz,采用时间步长满足式(22),有

$$h_{过滤最大} \leqslant 0.14 \tag{40}$$

计算 10 s,方法 1 需要计算 11 236 个时间点,而本文方法仅需计算 71 个时间点.方法 1 计算结果与理论解非常接近,最大峰值误差 0.038%;方法 2 的最大峰值误差为 2.49%,满足工程精度.但是两种方法的计算量之比为

$$\left\{\begin{aligned}&\frac{\text{乘法计算量}_{\text{未过滤}}}{\text{乘法计算量}_{\text{过滤}}}\approx 63\\&\frac{\text{加法计算量}_{\text{未过滤}}}{\text{加法计算量}_{\text{过滤}}}\approx 86\end{aligned}\right.\tag{41}$$

可见,用显式算法来计算具有未被激活的极高振型的结构,本文方法相比常规方法可以很大提高计算效率.

## 5 结语

以中心差分显式方法为例,证明了传递矩阵的特征向量与结构自振向量的一致性,然后基于显式算法步长过大时的失稳机理,得到了一种不以未被激活的最高振型频率为选择时间步长的判断依据,而是以结构被激活的有效最高阶振型对应的频率来选择时间步长,以达到扩大稳定性控制的时间步长,提高计算效率的目的.这种方法,在每步按通常的显式算法得到计算结果后,增加了从结果位移向量种过滤未被激活高阶振型的计算步骤.这种方法,既大大提高了通常采用的显式方法的计算效率,同时对求解的精度也影响不大.本文方法的适用范围为:结构只有少数几个极高阶振型,而且这些极高阶振型未被激活,即使过滤掉也不会影响计算精度.因此,在由于局部高刚度而导致显式算法的条件稳定性对时间步长提出过于苛刻要求而降低计算效率时,本文方法可作为一种封闭体系振动求解的改进的显式求解方法.

**参考文献:**

[1] 周正华,李山有,侯兴民.阻尼振动方程的一种显式直接积分方法[J].世界地震工程,1999,15(1):41.
ZHOU Zhenghua, LI Shanyou, HOU Xingmin. An explicit method for direct integration of the damped vibration equation [J]. World Information on Earthquake Engineering, 1999, 15(1):41.

[2] 李小军,刘爱文.动力方程求解的显式积分格式及其稳定性与适用性[J].世界地震工程,2000,16(2):8.
LI Xiaojun, LIU Aiwen. Explicit step-by-step integration formulas for dynamic differential equation and their stability and applicability [J]. World Information of Earthquake Engineering, 2000, 16(2):8.

[3] 杜修力,王进廷.阻尼弹性结构动力计算的显式差分法[J].工程力学,2000,17(5):37.
DU Xiuli, WANG Jinting. An explicit difference formulation of dynamic response calculation of elastic structure with damping [J]. Engineering Mechanics, 2000, 17(5):37.

[4] 周正华,周扣华.有阻尼振动方程常用显式积分格式稳定性分析[J].地震工程与工程振动,2001,21(3):22.
ZHOU Zhenghua, ZHOU Kouhua. Stability analysis of explicit integral methods for damped vibration equation[J]. Earthquake Engineering and Engineering Vibration, 2001, 21(3):22.

[5] 王进廷,杜修力.有阻尼体系动力分析的一种显式差分法[J].工程力学,2002,19(3):109.
WANG Jinting, DU Xiuli. An explicit difference method for dynamic analysis of a structure system with damping [J]. Engineering Mechanics, 2002(3):109.

[6] 张晓志,程岩,谢礼立.结构动力反应分析的三阶显式方法[J].地震工程与工程振动,2002,22(3):1.
ZHANG Xiaozhi, CHENG Yan, XIE Lili. A new explicit solution of dynamic response analysis[J]. Earthquake Engineering and Engineering Vibration, 2002(3):1.

[7] 王进廷,张楚汉,金峰.有阻尼动力方程显式积分方法的精度研究[J].工程力学,2006,23(3):1.
WANG Jinting, ZHANG Chuhan, JIN Feng. On the accuracy of several explicit integration schemes for dynamic equation with damping[J]. Engineering Mechanics, 2006, 23(3):1.

[8] 李小军,唐晖.结构体系动力方程求解的显式积分格式的能耗特性[J].工程力学,2007,24(2):28.
LI Xiaojun, TANG Hui. Numerical dissipation property of an explicit integration scheme for dynamic equation of structural system[J]. Engineering Mechanics, 2007, 24(2):28.

[9] 林家浩,曲乃泗,孙焕纯.计算结构动力学[M].北京:高等教育出版社,1989.
LIN Jiahao, QU Naisi, SUN Huanchun. Computational structural dynamics[M]. Beijing: Higher Education Press, 1989.

[10] 克拉夫,彭津.结构动力学[M].北京:高等教育出版社,2006.
Ray Clough, Joseph Penzien. Structural dynamics[M]. Beijing: Higher Education Press, 2006.