文章编号：0253-374X(2011)06-0924-02 DOI:10.3969/j.issn.0253-374x.2011.06.025

完备非紧流形上的热方程

赵成兵[1,2]

(1.合肥工业大学 管理学院,安徽 合肥 230009;2.安徽建筑工业学院 数学系,安徽 合肥 230022)

摘要：研究了完备非紧有非负全纯双截曲率的 Kähler 流形上的热方程,在一个较弱的条件下得到了它的正解的梯度估计和复 Hessian 估计.

关键词：热方程；梯度估计；Hessian 估计；正解

中图分类号：O 186.1 **文献标识码**：A

Heat Equation on Complete Noncompact Manifolds

ZHAO Chengbing[1,2]

(1. Postdoctoral Research Station of Management College, Hefei University of Technology, Hefei 230009, China; 2. Department of Mathematics, Anhui University of Architecture, Hefei 230022, China)

Abstract: The heat equation on Kähler manifolds with nonnegative and bounded bisectional curvature was studied. The gradient estimate of positive solutions and the complex Hessian estimate on it were obtained under a less condition.

Key words: heat equation; gradient estimate; Hessian estimate; positive solutions.

在 1975 年,Cheng 和 Yau 在文献[1]中得到 $n(n>2)$维完备流形上正的全纯函数的梯度估计,在 1986 年,Li 和 Yau 在文献[2]中得到热方程任意正解的梯度估计,在 1993 年,Hamilton[3]得到紧的流形上的热方程光滑正解的梯度估计,三种梯度估计在研究热方程和 Laplace 方程起着根本的作用,在 2006 年,Souplet 和 Zhang[4]得到非紧流形上的任意正解的梯度估计,他们提高了 Hamilton 的结果,现在利用他们的结果求解非紧流形上热方程任意正解的梯度估计和复 Hessian 估计.本文是在比文献[5]较弱的条件下得到的结果.

1 两个引理

引理 1[5] 设 M 完备非紧的有着非负的 Ricci 曲率的黎曼流形,令 u_0是 M 上的光滑函数,使得

$$\exp(a(r^2(\boldsymbol{x})+1))\leqslant u_0(\boldsymbol{x})\leqslant \exp(b(r^2(\boldsymbol{x})+1)) \tag{1}$$

对常数 $b>a>0$,这里 $r(\boldsymbol{x})$ 是 x 到固定点 $0\in M$ 的距离,那么 $T>0$ 仅依赖于 b 使得 Cauchy 问题

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-\Delta\right)u=0,\quad u(x,0)=u_0(\boldsymbol{x}), \tag{2}$$

有一个解 u 在$M\times[0,T]$,且存在常数 $C_1,C_2>0$ 使得在 $M\times[0,T]$

$$C_1\exp\left(\frac{a}{4}r^2(\boldsymbol{x})\right)\leqslant u(x,t)\leqslant C_2\exp(3br^2(\boldsymbol{x}))$$

引理 2[4] 设 M 是维数 $n\geqslant 2$ 的黎曼流形,Ricci 曲率非负且 u 是热方程在$M\times(0,\infty)$的正解,那么存在和维数有关的常数 c_1,c_2使得对所有的 $x\in M$ 和$t>0$,有：

$$\frac{|\nabla u(x,t)|}{u(x,t)}\leqslant c_1\frac{1}{t^{\frac{1}{2}}}\left(c_2+\ln\frac{u(x,2t)}{u(x,t)}\right)$$

2 两个定理

定理 1 设 M 是维数$n\geqslant 2$有非负 Ricci 曲率的黎曼流形,u 是热方程在$M\times(\delta,T]$, $\delta>0$ 的正解,且满足引理 2 的式(1)和式(2),那么存在常数 C_3使得

$$|\nabla u(x,t)|\leqslant C_3\exp(3b(r^2(\boldsymbol{x}))$$

定理 2 设 M 是完备非紧的 Kähler 流形有非负的全纯双截曲率,$u(x,t)$ 是热方程的解,那么存在 $T>0$,Cauchy 问题(2)有一个解 $u(x,t)$ 在 $M\times$

收稿日期：2010-03-03
基金项目：国家自然科学基金资助项目(70731003)；安徽省高等学校自然科学基金资助项目(KJ2011A061)；安徽省自然科学基金资助项目(1104606M01)

第一作者：赵成兵(1970—),男,副教授,理学博士,主要研究方向为几何分析.E-mail:chengbingzhao@163.com

$(\delta,T]$，$\delta>0$，使得对某个常数 $C_4>0$，对所有的 (x,t)，

$$\| u_{\alpha\bar{\beta}} \|(x,t) \leqslant \exp(C_4(r^2(\boldsymbol{x})+1))$$

这里 $u_{\alpha\bar{\beta}}$ 是 u 的复的 Hessian.

3 证明定理

首先证明定理 1，从引理 2，可以知道

$$\frac{|\nabla u(x,t)|}{u(x,t)} \leqslant c_1 \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}}\left(c_2 + \ln \frac{u(x,2t)}{u(x,t)}\right)$$

$$u(x,2t) = \int_M H(x,y,2t)u_0(y)\mathrm{d}y$$

从引理 1

$$u(x,2t) \leqslant C_5 \exp(3br^2(\boldsymbol{x}))$$

$$\ln \frac{u(x,2t)}{u(x,t)} \leqslant \ln \frac{C_5\exp(3br^2(\boldsymbol{x}))}{C_1\exp\left(\frac{a}{4}r^2(\boldsymbol{x})\right)} \leqslant C_6$$

所以

$$|\nabla u(x,t)| \leqslant C_7 u(x,t) \leqslant C_3\exp(3b(r^2(\boldsymbol{x}))$$

在证明定理 2 之前，有下面的两个引理.

引理 3[5] 设 M 是完备非紧的 Kähler 流形有非负的全纯双截曲率，$u(x,t)$ 是热方程的一个解，那么存在 $T>0$，Cauchy 问题(2)有一个解 $u(x,t)$ 在 $M\times(0,T]$，那么

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-\Delta\right)|\nabla u|^2 \leqslant -\| u_{\alpha\bar{\beta}} \|^2 - \| u_{\alpha\beta} \|^2 \quad (3)$$

这里

$$\| u_{\alpha\bar{\beta}} \|^2(x,t) = g^{\alpha\bar{\beta}}(x,t)g^{\gamma\bar{\delta}}(x,t)\cdot u_{\alpha\bar{\delta}}(x,t)u_{\gamma\bar{\beta}}(x,t)$$

$$\| u_{\alpha\beta} \|^2(x,t) = g^{\alpha\bar{\beta}}(x,t)g^{\gamma\bar{\delta}}(x,t)u_{\alpha\gamma}(x,t)\cdot u_{\bar{\beta}\bar{\delta}}(x,t)$$

引理 4[5] 设 M 是完备非紧的 Kähler 流形有非负全纯双截曲率，$u(x,t)$ 是热方程的解，那么

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-\Delta\right)\| u_{\alpha\bar{\beta}} \|^2 \leqslant -\| \nabla_\gamma u_{\alpha\bar{\beta}} \|^2 - \| \nabla_{\bar{\gamma}} u_{\alpha\bar{\beta}} \|^2$$

现在证明定理 2.

证明 在方程 (3) 的两边乘以 $\varphi^2(\boldsymbol{x})$ 并且分部积分，这里 $\varphi(\boldsymbol{x})$ 是一个光滑函数使得 $0\leqslant\varphi\leqslant 1$ 在 $B_o(R)$，$\varphi=0$ 在 $B_o(2R)$ 外，且对某个常数 C 依赖于 R 有 $|\nabla\varphi|\leqslant\frac{C}{R}$，则有

$$-\int_0^T\int_M\left(\frac{\partial}{\partial t}-\Delta\right)|\nabla u|^2\varphi^2 \leqslant \int_M|\nabla u_0|^2\varphi^2 + 4\int_0^T\int_M|\varphi\|\nabla\varphi\|\nabla u\|\nabla^2 u| \leqslant$$

$$\int_M|\nabla u_0|^2\varphi^2 + 4\int_0^T\int_M|\nabla\varphi|^2|\nabla u|^2 + 4\int_0^T\int_M\varphi^2|\nabla^2 u|^2 \quad (4)$$

依照局部标准正交公式，可参考文献[6]

$$\frac{1}{2}\Delta|\nabla u|^2 = \Sigma_{k,l}u_{kl}^2 + \Sigma_k u_k(\Delta u)_k + \Sigma_{k,l}R_{kl}u_ku_l \geqslant |\nabla^2 u|^2 + \langle\nabla u,\nabla\Delta u\rangle$$

用 $\varphi^2(\boldsymbol{x})$ 乘在方程的两边并且分部积分，则可以得到

$$\int_{B_0(R)}|\nabla^2 u|^2 \leqslant C\left(\int_{B_0(2R)}(\Delta u)^2 + R^{-2}\int_{B_0(2R)}|\nabla u|^2\right) \quad (5)$$

由定理 1，得到

$$|\nabla u(x,t)| \leqslant C_7 u(x,t) \leqslant C_3\exp(3b(r^2(\boldsymbol{x}))$$

和

$$u(x,t) \leqslant C_2\exp(3br^2(\boldsymbol{x}))$$

所以存在常数 C_8

$$|\Delta u| \leqslant C_8\exp(3br^2(\boldsymbol{x})) \quad (6)$$

因为

$$\int_0^T\int_M\left(\frac{\partial}{\partial t}-\Delta\right)|\nabla u|^2\varphi^2 \leqslant \int_0^T\int_M -\| u_{\alpha\bar{\beta}} \|^2\varphi^2 - \int_0^T\int_M -\| u_{\alpha\beta} \|^2\varphi^2$$

所以由式(4)～(6)，得到存在常数 C_9 使得

$$\int_0^T\int_M \exp(-C_9(r^2+1))\| u_{\alpha\bar{\beta}} \|^2(\boldsymbol{x})\mathrm{d}x\mathrm{d}t < \infty \quad (7)$$

现在令 $\Phi=\| u_{\alpha\bar{\beta}} \|^2$，那么由引理 4 有

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-\Delta\right)\Phi(x,t) \leqslant 0 \quad (8)$$

利用平均值不等式[L－Y]，对 $\frac{1}{4}r^2\geqslant T$

$$\exp(-C_1r^2t)(1+\Phi)(x,t) \leqslant C_2\left[\frac{1}{r^{2m+2}}\int_0^T\int_{B_x\left(\frac{r}{4}\right)}\exp(-C_1r^2s)\Phi(y,s)\mathrm{d}y\mathrm{d}s + \sup_{B_x\left(\frac{r}{4}\right)}\Phi(y,0)\right] \quad (9)$$

由式(6)，(7)和式(9)，证明定理 2

参考文献：

[1] Cheng S Y, Yau S T. Differential equations on Riemannian manifolds and their geometric applications[J]. Comm Pure Apple Math, 1975, 28(3): 333.

（下转第 940 页）