

柱体限制失稳形态的统一挠度曲线方程

武秀根¹, 郑百林², 贺鹏飞², 刘曙光¹

(1. 同济大学 土木工程学院, 上海 200092; 2. 同济大学 航空航天与力学学院, 上海 200092)

摘要: 在大变形框架下, 基于点接触和线接触状态, 分析轴向受压失稳柱在不同接触状态下的挠度曲线方程. 将柱整体的失稳形态分解为多个典型柱的变形, 引入各个典型柱反弯点处的截面转角作为变量, 推导得到了相应典型柱的挠度曲线表达式. 结果表明, 柱的限制失稳形态可用统一的挠度曲线方程描述, 截面转角变量的不同取值范围决定了柱与限制失稳构件之间不同的接触状态.

关键词: 限制失稳; 大变形; 点接触; 线接触; 截面转角

中图分类号: O 317

文献标识码: A

Deflection Governing Equation of Constrained Buckling on Column

WU Xiugen¹, ZHENG Bailin², HE Pengfei², LIU Shuguang¹

(1. College of Civil Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, China; 2. College of Aerospace Engineering and Applied Mechanics, Tongji University, Shanghai 200092, China)

Abstract: The constitutive equation of post-buckling column is derived based on large deformation postulation to describe point contact and line contact respectively. The deformation of column can be regarded as the combined deformations of different typical small columns. The angle of rotation of the middle point in typical column is introduced in the constitutive equations of different typical columns. The results show that the constitutive equations in different contact state obey the same formulation, and the contact state depends on the value of new introduced variable.

Key words: constrained buckling; large deformation; point contact; line contact; angle of cross rotation

常常在失稳柱的外围布置限制其失稳波形发展的限制构件^[1-2], 失稳位移受到限制, 因而能继续承载.

轴向受压柱的限制失稳问题, 属于后屈曲的范畴, 其承载能力和后屈曲形态有极大的关系. Chateau 等^[3]对存在单侧限制的弹性结构的分岔和稳定性问题进行了一般意义上的研究, 采用能量原理建立平衡方程. 吕和祥等^[4]引入拉格朗日乘子, 采用数学规划法计算了外部受限制结构的临界载荷. Domokos 等^[5]在 1997 年研究了压柱在两平行、刚性、光滑的约束面之间的后屈曲行为, 分析了柱与刚性面之间的不同接触状态. Herzl Chai^[6]采用聚碳酸酯材料制作细长的受压柱, 使受压柱在刚性面之间发生限制失稳, 观察细柱的失稳波形及其演化. 申波等^[7]研究了双钢管构件在受轴向压力时, 内、外弹性变形构件之间由点接触状态到线接触状态之间的连续过渡过程中, 接触力等变量的连续变化.

本文根据点接触和线接触的概念, 在大变形框架下, 引入截面转角作为统一变量, 推导了点、线接触状态下的受压柱失稳形态方程. 结果表明, 不同的接触状态下, 柱的失稳形态具有相同的方程形式, 根据截面转角变量的不同取值范围区分不同的接触状态.

1 分析模型

以一平面轴向受压柱为研究对象. 柱受压发生欧拉失稳后, 两侧的失稳变形受到约束, 进入后屈曲阶段, 如图 1 所示. 图中, \bar{P} 为柱所受的轴向力, \bar{L} 为柱的原始长度, \bar{h} 为柱未受压时, 距离两侧约束壁面的距离.

工程结构中, 为提高轴向受压柱的极限承载力,

收稿日期: 2010-03-09

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11002101)

第一作者: 武秀根(1981—), 男, 工学博士, 博士后, 主要研究方向为结构稳定性. E-mail: wuxiugen@tongji.edu.cn

通讯作者: 郑百林(1966—), 男, 教授, 工学博士, 博士生导师, 主要研究方向为计算力学和复合材料力学.

E-mail: blzheng@tongji.edu.cn

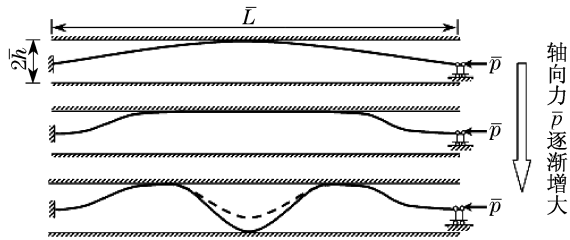


图1 轴向受压柱的限制失稳

Fig.1 Constrained buckling of column under axial compressed load

为计算及分析方便,做量纲一化处理^[7],各种变量的量纲一化约定如下:

$$M = \frac{\bar{L}}{EI} \bar{M}, F = \frac{\bar{L}^2}{EI} \bar{F}, s = \frac{\bar{s}}{\bar{L}}$$

其中, \bar{F} 为力, \bar{M} 为弯矩, \bar{s} 为位移; \bar{EI} 为抗弯刚度. 相应的无上划线的变量为其量纲一量.

该量纲一化公式里的变量并不代表后续分析中的具体变量,仅规定了当具体模型的变量类型为力、弯矩和位移时应分别采用的量纲一化方法.

由于两端约束的对称性,因此柱的各段失稳挠曲线也具有对称性或反对称性,因此可以选择具有代表性的部分挠度曲线进行分析,然后根据对称性或反对称得到整个柱的后屈曲挠度曲线.

2 挠度曲线方程的求解

2.1 点接触过程

点接触过程中,存在两典型柱段的变形:靠近端部的柱的挠度和中间部分柱的挠度.

分别在两典型柱段的反弯点建立局部坐标系,如图2~图4所示. 根据对称性,取典型柱段的一半分析, C 为 \widehat{AB} 段的反弯点,也即中点, D 为 \widehat{BE} 段的反弯点,也即中点. 点 B, E 为柱与约束壁面之间的接触点,坐标系 Cx_1y_1 为在 C 点建立的局部坐标系,坐标系 Dx_2y_2 为在 D 点建立的局部坐标系. 分别用 \bar{a}, \bar{b} 表示 $\widehat{AB}, \widehat{BE}$ 的水平距离.

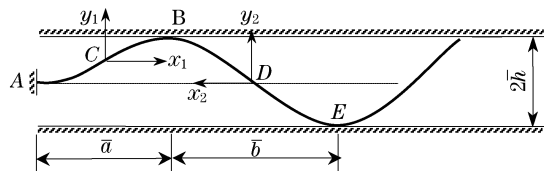
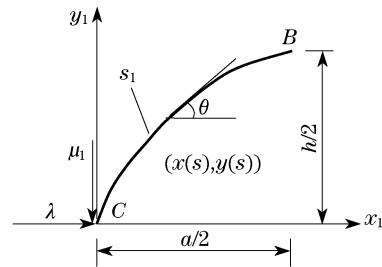
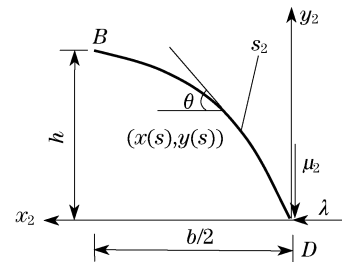


图2 点接触过程局部分析坐标系的建立

Fig.2 Establishment of local analysis coordinate under point contact state

图3中, s_1 为 C 到 B 点的弧长,则 \widehat{AB} 的长度为 $2s_1$,在反弯点处的量纲一剪力记为 μ_1 ,在 $s=0$ (即 C 点处)柱截面转角为 θ_a ,端点 B 的坐标为 $(a/2, h/2)$, λ 为量纲一轴向力. 图4中, s_2 为 D 点到 B 点的弧长,则 \widehat{BE} 的弧长为 $2s_2$,在 $s=0$ (即 D 点处)柱截面转角为 θ_b ,端点 B 在 x_2Dy_2 处的坐标为 $(b/2, h)$. μ_2 为 D 点处量纲一剪力.

图3 \widehat{AB} 段的局部坐标系Fig.3 Local analysis coordinate of \widehat{AB} 图4 \widehat{BE} 的局部坐标系Fig.4 Local analysis coordinate of \widehat{BE}

2.1.1 端部挠度曲线

对 \widehat{CD} 部分,按照图3所示的坐标系进行分析. 量纲一平衡微分方程^[5,8]:

$$\frac{d^2 \theta(s)}{ds^2} + \lambda \sin \theta + \mu_1 \cos \theta = 0 \quad (1)$$

令 $r_1 = -\frac{\mu_1}{\lambda}$, 依据文献[8]类似的推导过程,得

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\theta}{ds} \right)^2 = \lambda \sqrt{1 + r_1^2} \left[\frac{r_1}{\sqrt{1 + r_1^2}} \sin \theta + \frac{1}{\sqrt{1 + r_1^2}} \cos \theta \right] \quad (2)$$

令 $\tan \alpha = r_1$, $\varphi = \theta - \alpha$, 则 $\varphi_0 = \theta_a - \alpha$.

$$\text{令 } p_1 = \sin \left(\frac{\varphi_0}{2} \right), \sin \left(\frac{\varphi}{2} \right) = \sin \left(\frac{\varphi_0}{2} \right) \sin \phi =$$

$p_1 \sin \phi$ ^[8-9], 式(2)化为

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\theta}{ds} \right)^2 = 2\lambda \sqrt{1 + r_1^2} p_1^2 \cos^2 \phi \quad (3)$$

显然,当 $s=0$ 时, $\phi = \frac{\pi}{2}$, 由式(3)得

$$s = \frac{1}{\sqrt{\lambda} (1+r_1)^{1/4}} [K(p) - F(\phi(s), p_1)] \quad (4)$$

其中, $K(p_1)$ 为第一类完全椭圆积分, $F(\phi(s), p_1)$ 为第一类不完全椭圆积分^[8],

$$K(p_1) = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1-p_1^2 \sin^2 \phi}} d\phi,$$

$$F(\phi(s), p_1) = \int_0^{\phi(s)} \frac{1}{\sqrt{1-p_1^2 \sin^2 \phi}} d\phi.$$

因为 $x = \int \cos(\theta(s)) ds$, $y = \int \sin(\theta(s)) ds$, 又 $\varphi = \theta - \alpha$, 故由式(4)可得

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \frac{1}{(1+r_1^2)^{3/4}} [2E(p_1) - 2E(\phi, p_1) - K(p_1) + F(\phi, p_1) - 2p_1 r_1 \cos \phi] \\ y = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \frac{1}{(1+r_1^2)^{3/4}} [2p_1 \cos \phi + r_1 (2E(p_1) - 2E(\phi, p_1) - K(p_1) + F(\phi, p_1))] \end{cases} \quad (5)$$

$$\quad (6)$$

其中, $E(p_1) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-p_1^2 \sin^2 \phi} d\phi$, $E(\phi, p_1) = \int_0^{\phi} \sqrt{1-p_1^2 \sin^2 \phi} d\phi$, $K(p_1) = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1-p_1^2 \sin^2 \phi}} d\phi$,

$$F(\phi, p_1) = \int_0^{\phi} \frac{1}{\sqrt{1-p_1^2 \sin^2 \phi}} d\phi$$

$E(p_1)$ 为第二类完全椭圆积分, $E(\phi, p_1)$ 为第二类不完全椭圆积分.

2.1.2 中间部分挠度曲线分析

采用相同的方法,可以推导得到中间段变形挠度曲线 \widehat{BE} 的弧长和直角坐标表达式, s_2 为其长度.

$$\text{令 } r_2 = -\frac{\mu_2}{\lambda}, \tan \beta = r_2, \varphi = \theta - \beta, p_2 = \sin\left(\frac{\varphi_0}{2}\right), \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) = p_2 \sin \phi, \text{ 当 } s = s_2 \text{ 时, } \phi = \phi_{s_2}.$$

$$s = \int_{\pi/2}^{\phi} -\frac{1}{\sqrt{\lambda} (1+r_2)^{1/4}} \frac{1}{\sqrt{1-p_2^2 \sin^2 \phi}} d\phi \quad (7)$$

$$x = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \frac{1}{(1+r_2^2)^{3/4}} [2E(p_2) - 2E(\phi, p_2) - K(p_2) + F(\phi, p_2) - 2p_2 r_2 \cos \phi] \quad (8)$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \frac{1}{(1+r_2^2)^{3/4}} \cdot [2p_2 \cos \phi + r_2 (2E(p_2) - 2E(\phi, p_2) - K(p_2) + F(\phi, p_2))] \quad (9)$$

2.2 线接触过程

柱与约束面之间的线接触过程,柱的挠度可分为三部分典型的变形(图5):靠近固定端的端部柱的挠度 \widehat{AB} , 柱与约束面之间的直线接触段 \widehat{BE} , 中间部分柱的挠度 \widehat{EF} . 依据与点接触相同方法,可以建立线接触过程各部分的挠度曲线方程.

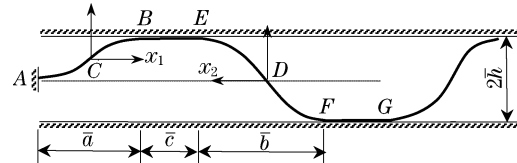


图5 线接触过程,局部分析坐标系的建立

Fig.5 Establishment of local analysis coordinate under point line contact state

3 点接触和线接触过程挠度曲线方程的比较

可以发现,虽然推导过程不同,但点接触过程与线接触过程中的长度以及直角坐标的表达式在形式上存在着统一性.

以端部挠曲线为例,点接触过程中,长度以直角坐标的表达式分别为式(4)~(6).线接触过程,相应的计算式分别为式(7)~(9).

可以发现,点接触过程和线接触过程中,长度以及直角坐标的计算式在形式上完全相同,当 $s=0$ 时,都存在 $\phi = \frac{\pi}{2}$. 区别在于点接触过程中, $p_1 = \sin\left(\frac{\varphi_0}{2}\right) = \sin\left(\frac{\theta_a - \alpha}{2}\right)$, 其中 θ_a 为反弯点处截面转角. 而线接触过程中, $p_1 = \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$; $s = s_1$ 时,点接触过程, $\phi(s_1) = \phi_{s_1}$, $-\frac{\pi}{2} \leq \phi_{s_1} \leq \frac{\pi}{2}$, 而线接触过程, $\phi(s_1) = -\frac{\pi}{2}$.

反弯点截面转角 θ_a 和参数 $\phi(s_1)$ 随轴向载荷的变化曲线见图6和图7.

从点接触,线接触的计算公式比较可以看出,线接触的计算公式可以退化到点接触. 当式(7), (8)和(9)中的 $\phi(s_1) > -\frac{\pi}{2}$ 时,为点接触计算表达式,当 $\phi(s_1) = -\frac{\pi}{2}$ 时,为线接触计算表达式. 中间部分典

型柱的挠度曲线方程存在着同样的特点,点接触和线接触过程的挠度曲线方程均相同,依靠参数 $\phi(s_1)$ 的不同取值确定不同的接触状态.

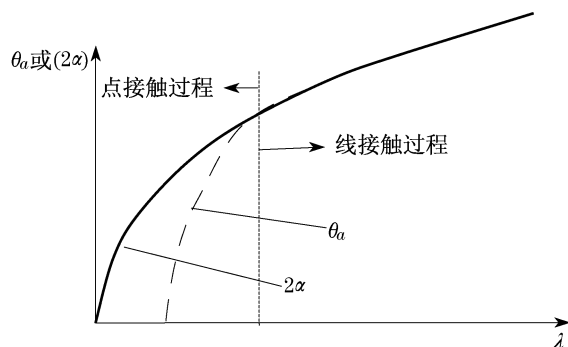


图6 反弯点处截面转角 θ_a 的变化示意图

Fig.6 Relationship between axial load and θ_a

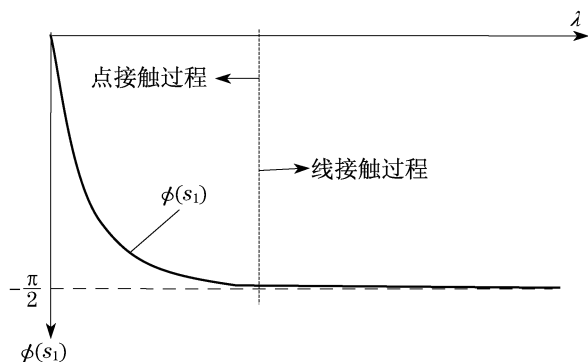


图7 接触点处参数 $\phi(s_1)$ 变化示意图

Fig.7 Relationship between axial load and $\phi(s_1)$

4 结论

本文在大变形框架下,通过合理的建立局部分析坐标系,引入典型柱反弯点的截面转角作为变量,得到了失稳柱的挠度曲线方程.引入反弯点处的截面转角作为变量后,点接触和线接触状态下的挠度曲线方程可以采用统一的表达式形式,而截面转角不同的取值即决定了柱的不同接触状态.

采用统一的表达式形式描述柱在不同接触状态下的限制失稳波形,不仅可以简化分析过程,减少分析变量,而且对进一步研究柱失稳形态的连续变化过程和截面转角大于临界值,导致发生失效等极限失稳状态提供了便利.

参考文献:

- [1] 郭英涛,任文敏.关于限制失稳的研究进展[J].力学进展,2004,34(1):41.
GUO Yingtao,REN Wenmin. Some advances in confined buckling[J]. Advances in Mechanics,2004,34(1):41.
- [2] 武秀根,郑百林,贺鹏飞.限制失稳柱的后屈曲分析[J].同济大学学报:自然科学版,2009,37(1):26.
WU Xiugen,ZHENG Bailin,HE Pengfei. Study on post-buckling of constrained bar[J]. Journal of Tongji University: Natural Science,2009,37(1):26.
- [3] Chateau X, Nguyen Q S. Buckling of elastic structures in unilateral contact with or without friction[J]. Eur J Mech, A/Solid,1991,10(1):71.
- [4] Lu Hexiang, Feng Minghui, Lark R J, et al. The calculation of critical buckling loads for externally constrained structures[J]. Communications in Numerical Methods in Engineering,1999,15(3):193.
- [5] Domokos G, Holmes P, Royce B. Constrained euler buckling[J]. Journal of Nonlinear Science,1997,7(3):281.
- [6] CHAI Herzl. The post-buckling response of a bi-laterally constrained column[J]. Journal of the Mechanics and Physics of Solid,1998,46(7):1155.
- [7] 申波,邓长根.双钢管构件由点接触到线接触连续过渡[J].工程力学,2007,24(2):154.
SHIN Bo, DENG Changgen. Buckling of line-contact segment between axially compressed inner core and flexible sleeve in a sleeved column[J]. Engineering Mechanics,2007,24(2):154.
- [8] 铁木辛科.弹性稳定理论(中译本)[M].北京:科学出版社,1965.49-51.
Timoshenko S P. Theory of elastic stability[M]. Beijing: Science Press,1965.49-51.
- [9] Roman B, Pocheau A. Postbuckling of bilaterally constrained rectangular thin plates[J]. Journal of the Mechanics and Physics of Solids,2002,50(11):2379.