文章编号:0253-374X(2011)09-1387-07 DOI:10.3969/j.issn.0253-374x.2011.09.025

同时有短期和长期债券的公司债券定价

任学敏,光 华
(同济大学 应用数学系,上海 200092)

摘要:主要考虑公司同时发行短期和长期零息票债券的定价问题.利用随机分析方法,在短期债券到期日,由于偿付短期债务会引起公司资产的跳跃,所以,长期债券的定价需要分两个时间段进行.在结构化模型下给出了公司在短期债券存续期间没有违约的概率,以及在此条件下公司资产的条件概率分布,得到短期债券和长期债券的定价公式.通过数值计算,分析债券价格随各个参数变化的金融意义.

关键词:债券定价;违约概率;公司资产条件分布;首次通过模型
中图分类号:F 83 **文献标识码**:A

Bonds-pricing by a Firm with Short- and Long-term Bonds

REN Xuemin, *GUANG Hua*
(Department of Mathematics, Tongji University, Shanghai 200092, China)

Abstract: At the maturity of short-term bond, the payment of the short-term debt may cause a jump in the company's assets, so the pricing of the long-term bond needs to be divided into periods. By stochastic analysis and structure approach, the probability of no default before the short-term bond maturity and the conditional distribution of the company's assets was obtained, and the pricing formula for both the short- and long-term bond were derived too. Finally, an analysis was made of the financial meanings on the basis of the numerical results.

Key words: bond pricing; default probability; conditional distribution of company's assets; first passage time model

信用风险是指在金融交易中交易对手违约或信用质量潜在变化而导致损失的可能性,是金融风险的主要类型之一.从来源看,信用风险可以分为交易对手风险和发行者风险两种类型,前者主要产生于商业银行的贷款和金融衍生交易中,后者主要和公司债券相联系.从组成上看,信用风险由两部分组成,一部分是违约风险,是交易一方不愿或无力支付约定款项致使交易另一方受损失的可能性,一般来说在违约的情况下,一部分债权会得到受偿,这一比率称为回收率;另一部分是信用价差风险,是因信用质量的变化引起信用价差的变化可能导致的风险.

2007 年 8 月,美国本土爆发的次贷危机对信用风险管理提出了更高的要求.信用风险与市场风险相比具有收益分布的可偏性、信用风险数据难获取性和信用风险非系统性等特点.随着金融理论和金融工程技术的发展,信用风险的量化研究取得了很大进展.在违约概率测算方面,先后出现了基于企业财务指标的统计判别模型、基于基础资产演化过程的结构模型和基于违约强度过程的简化模型等.其中,结构模型又称公司资产模型,把公司资产值作为衡量标准,如果资不抵债,则公司破产并进入清算程序.通常,资产在变现过程中价值会有一个下降,因此影响公司债券价值的主要有两个因素:破产概率和破产时的回收率.结构模型由于风险驱动机制明确、理论依据充分而受到理论界和实务界的关注.在理论研究上,结构模型已成为信用风险研究的一个重要分支;在实务上,以结构模型技术为基础的穆迪的 MKMV 模型也取得了成功的商业应用.

结构化模型最早是由 Merton[1] 提出的.它假定资产价值服从几何布朗运动,在债务的到期日,如果资产价值大于债务面值,公司所有者就选择偿付债务;否则,公司所有者就选择违约.Merton 模型的缺点是几何布朗运动意味着资产价值是连续变化的,没有考虑信用事件的突发性,并且在该假设下,随着到期日

收稿日期:2010-05-18
基金项目:国家"九七三"重点基础研究发展计划(2007CB814903);国家自然科学基金(10671103)
第一作者:任学敏(1962—),男,副教授,硕士生导师,理学博士,主要研究方向为金融数学.E-mail:renxuemin@citiz.net

的接近,违约风险将趋于零.但事实上,即将到期的企业债券的信用利差并不为零.Zhou在几何布朗运动基础上加入了跳跃成分,用来研究资产价值的跳跃对信用风险的影响,阐释当考虑跳跃到违约的可能性时,即将到期债券的违约风险始终存在,不会随着到期日的接近而趋于零[2].Black和Cox分析了安全条款对违约时间的影响,提出首次通过模型[3].它假定公司资产在存续期内一旦达到某个边界时即违约,这个边界又称违约边界.根据MKMV公司大量统计所得的结果,公司最可能在公司资产下降到其短期债务加上长期债务的一半时违约,因为此时继续经营几乎没有价值.所以,在违约边界的设定上,取短期债务加上长期债务的一半为违约边界.

而简化模型是不追究公司的违约原因,把公司的违约看作完全不可预测、是一定违约强度下的Poisson过程,其参数是通过对市场数据分析得到的.

上述模型大多用于公司只发行一个债券,实际上,许多公司都有长期融资用于投资,短期融资用于流动资金.MKMV主要对这种情况下公司违约概率进行研究.笔者考虑一个公司同时发行2张到期日不同(可以看作是一短期、一长期债券)的零息票债券,那么,在短期债券到期日,由于偿付短期债务会引起公司资产的跳跃,所以长期债券的定价需要分两个时间段分别给出它的价格.本文给出了公司在短期债券存续期间没有违约的概率以及在此条件下公司资产的条件分布,并用于长期债券的定价中.对于短期债券,利用结构模型中的首次通过模型给出它的定价公式.定价中面临的问题是如何设定公司的违约边界以及公司违约后如何分配剩余的公司资产.最后,通过数值计算作图分析债券价格随各参数变化的金融意义.

1 基本假设

(1) 假设公司发行了2张到期日分别为T_1(短期)和T_2(长期)面值均为1元的零息票债券($T_1<T_2$),到期日应偿还债务分别为K_1和K_2,价格分别记为P_1和P_2.

(2) 假定公司的资产值在风险中性测度下满足随机微分方程

$$\mathrm{d}V_t/V_t = r\mathrm{d}t + \sigma\mathrm{d}W_t \tag{1}$$

其中:r为无风险利率,σ为波动率,均为常数;V为公司资产;t为时间;W_t为标准布朗运动,即$E(\mathrm{d}W)=0$,$\mathrm{Var}(\mathrm{d}W)=\mathrm{d}t$,$t=0$时刻的公司资产记为$V_0$.

如果公司在$[0,T_1]$内没有违约,在T_1时刻公司偿还短期债务K_1,资产发生跳跃,之后继续满足式(1)描述的几何布朗运动.T_1时刻,偿还短期债务之前公司资产记为V_{T_1-},偿还后记为V_{T_1+}.

(3) 假定时间段$[0,T_1]$内公司的违约边界为$K(t)$,$[T_1,T_2]$内的违约边界为$K'(t)$.其中

$$K(t) = \omega K_1\mathrm{e}^{-r(T_1-t)} + \theta K_2\mathrm{e}^{-r(T_2-t)} = (\omega K_1 + \theta K_2\mathrm{e}^{-r(T_2-T_1)})\mathrm{e}^{-r(T_1-t)} \triangleq \bar{K}\mathrm{e}^{-r(T_1-t)} \tag{2}$$

式中,ω和θ分别为短、长期债券在违约边界中的权重.在违约边界的设定上,大多参考MKMV模型的方法,即取短期债务加上长期债务的一半为违约边界.

$$K'(t) = \lambda K_2\mathrm{e}^{-r(T_2-t)} \tag{3}$$

式中,λ为违约边界中的权重.

(4) 假定公司违约后的回收率为常数α,采用面值回收.即如果公司在$[0,T_1]$内违约,那么在T_1时刻对短、长期债务同时偿付;T_1时刻由于公司偿还短期债务,资产跳跃导致公司违约,公司优先偿还短期债务,剩余资产偿还长期债务;公司在$[T_1,T_2]$内违约,在T_2时刻偿付长期债务.

(5) 如果公司在$[0,T_1]$内违约,以α计算T_1时刻公司的资产为$\alpha\bar{K}$,假定公司按照短期债券和长期债券的资金同比例分配剩余资产,即每份短、长期债券在T_1分别可以获得$\alpha\bar{K}/(K_1+K_2\mathrm{e}^{-r(T_2-T_1)})$和$\alpha\bar{K}\mathrm{e}^{-r(T_2-T_1)}/(K_1+K_2\mathrm{e}^{-r(T_2-T_1)})$;如在$[0,T_1]$内没违约,$T_1$时刻由于公司偿还短期债务,资产跳跃导致公司违约,公司优先偿还短期债务,剩余资产偿还长期债务,则长期债券在T_1可获得$\alpha(V_{T_1+}-K_1)/K_2$;如在$[T_1,T_2]$内违约,以α计算T_2时刻公司资产为$\alpha\lambda K_2$,则T_2时刻长期债券可得到$\alpha\lambda$.

(6) 假设市场是完全的、无摩擦的.

2 模型建立及问题的求解

2.1 短期债券(到期日为T_1)的定价

债券价格可以看成是公司资产的衍生物,由Itô公式[4-6],短期债券价格满足偏微分方程

$$\left.\begin{aligned}&LP_1 = 0,\quad 0<t<T_1, K(t)<V<\infty\\&P_1(K(t),t) = \frac{\alpha\bar{K}\cdot\mathrm{e}^{-r(T_1-t)}}{K_1+K_2\mathrm{e}^{-r(T_2-T_1)}}\\&P_1(V,T_1) = 1\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

令$Q=P_1/\mathrm{e}^{-r(T_1-t)}$,$W=V/\mathrm{e}^{-r(T_1-t)}$,$X=\ln(W/$

$\bar{K}$)，$R = Q - \alpha\bar{K}/(K_1 + K_2 e^{-r(T_2-T_1)})$，则式(4)可写成

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial R}{\partial t}+\frac{\sigma^2}{2}\cdot\frac{\partial^2 R}{\partial X^2}-\frac{\sigma^2}{2}\cdot\frac{\partial R}{\partial X}=0,\\&\quad(0<t<T_1, 0<X<\infty);\\&R(0,t)=0;\\&R(X,T_1)=1-\alpha\bar{K}/(K_1+K_2e^{-r(T_2-T_1)})\end{aligned}\right\}\tag{5}$$

再令 $U = e^{-\sigma^2 t/8 - X/2}R$，则式(5)可写成

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial U}{\partial t}+\frac{\sigma^2}{2}\cdot\frac{\partial^2 U}{\partial X^2}=0,\\&\quad(0<t<T_1, 0<X<\infty);\\&U(0,t)=0;\\&U(X,T_1)=[1-\alpha\bar{K}/K_1+\\&\qquad K_2e^{-r(T_2-T_1)})]e^{-\sigma^2T_1/8-X/2}\end{aligned}\right\}\tag{6}$$

利用镜像法[7]，可得方程(6)的解为

$$U(X,t)=\left[1-\frac{\alpha\bar{K}}{K_1+K_2e^{-r(T_2-T_1)}}\right]e^{-\sigma^2t/8}\cdot\left[N\left(\frac{X-\sigma^2(T_1-t)/2}{\sigma\sqrt{T_1-t}}\right)e^{-X/2}-N\left(-\frac{X+\sigma^2(T_1-t)/2}{\sigma\sqrt{T_1-t}}\right)e^{X/2}\right]\tag{7}$$

其中，$N(x)$为标准正态分布的累计概率分布函数.代回到原来的变量，可得

$$P_1(V,t)=\{(1-\alpha\bar{K}/(K_1+K_2e^{-r(T_2-T_1)})[N(d_2)-VN(-d_1)/\bar{K}e^{-r(T_1-t)}]+\alpha\bar{K}/(K_1+K_2e^{-r(T_2-T_1)})\}\cdot e^{-r(T_1-t)}\tag{8}$$

其中：$d_1 = [\ln(V/\bar{K}) + (r + \sigma^2/2)(T_1 - t)]/\sigma\sqrt{T_1-t}$；$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T_1-t}$.

2.2　长期债券(到期日为 T_2)的定价

2.2.1　[0，T_1]内公司没违约的概率和 T_1时刻公司资产的条件分布

在风险中性测度下，公司的资产在时间段[0，T_1]内满足随机微分方程(1)，在[0，T_1]上，公司的违约时间记为随机变量 τ，$\tau = \inf\{t \mid V_t \leqslant K(t); t\in[0,T_1]\}$.由基本假定知资产在[$T_1$，$T_2$]上满足式(1)所描述的随机微分方程，但值得注意的是，在 T_{1+}(偿还短期债务 K_1后)，公司资产 $V_{T_1+} = V_{T_1-} - K_1$是一个随机变量($V_{T_1-}$是在[0，$T_1$]内公司没违约前提下($\tau > T_1$) T_{1-}(偿还短期债务 K_1前)时刻公司资产).下面计算随机变量 V_{T_1+}的条件密度函数 $p(V_{T_1+} = z \mid \tau > T_1)$.记公司资产 V 在 T_{1-}时刻的条件分布为 $p(V_{T_1-} = y \mid \tau > T_1)$，即在公司在[0，$T_1$]内没有违约的前提下资产为 y 的密度.由等式 $p(V_{T_1-} = y \mid \tau > T_1)P(\tau > T_1) = P(\tau > T \mid V_{T_1-} = y)p(V_{T_1-} = y)$可得

$$p(V_{T_1-}=y\mid\tau>T_1)=P(\tau>T_1\mid V_{T_1-}=y)p(V_{T_1-}=y)/P(\tau>T_1)$$

由式(1)根据 Itô公式可得 $V_{T_1-} = V_0 e^{(r-\sigma^2/2)T_1} + \sigma W_{T_1}$，令 $y = V_0 e^{(r-\sigma^2/2)T_1+\sigma x}$，可知事件$\{V_{T_1-} = y\}\sim\{W_{T_1} = x\}$.对事件$\{\tau > T \mid V_{T_1-} = y\}$做如下等价变换：

$$\begin{aligned}&\{\tau>T_1\mid V_{T_1-}=y\}\sim\{V_t>K(t),0\leqslant t\leqslant T_1\mid V_{T_1-}=y]\sim\{\ln V_t>\ln K(t),0\leqslant t\leqslant T_1\mid V_{T_1-}=y\}\sim\{\ln V_0+(r-\sigma^2/2)t+\sigma W_t>\\&\ln\bar{K}-r(T_1-t),\quad 0\leqslant t\leqslant T_1\mid V_{T_1-}=y\}\sim\{GW_t>at+b,0\leqslant t\leqslant T_1\mid W_{T_1}=x\}\mid\sim\\&\{-\infty<-W_t<-at-b,0\leqslant t\leqslant T_1\mid -W_{T_1}=-x\}\end{aligned}\tag{9}$$

其中：$a = \sigma/2$，$b = (\ln(\bar{K}/V_0) - rT_1)/\sigma$.由标准布朗运动 W_t 的性质可知，$\{-W(t), t\geqslant 0\}$仍为标准布朗运动.

引理 1[8]　设$\{W(t), t\geqslant 0\}$为一维标准布朗运动，$f(s)$，$0\leqslant t_1<s\leqslant t_2$为任一线性函数，则

$$P(-\infty<W(s)<f(s),t_1\leqslant s\leqslant t_2,W(t_1)=x,W(t_2)=y)=1_{\{f(t_1)>x,f(t_2)>y\}}\{1-\exp[-2(f(t_1)-x)(f(t_2)-y)/(t_2-t_1)]\}\tag{10}$$

引理 1 的证明参见文献[9].利用引理 1 的结论并结合式(9)，可得

$$\begin{aligned}&P(\tau>T\mid W_{T_1}=x)=P(W_t>at+b,\\&0<t<T_1\mid W_{T_1}=x)=P(-\infty<-W_t<\\&-at-b,0<t<T_1\mid -W_{T_1}=-x)=\\&1_{\{-aT_1-b>-x\}}[1-\exp(-2(-b)\cdot\\&(-aT_l-b+x)/T_1)]\end{aligned}\tag{11}$$

由于$\{-W(t), t\geqslant 0\}$仍为标准布朗运动，故其概率密度为

$$p(-W_{T_1}=-x)=e^{-x^2/2T_1}/\sqrt{2\pi T_1}\tag{12}$$

由式(11)和(12)进一步可以计算[0，T_1]内公司没违约的概率

$$P(\tau>T_1)=\int_{-\infty}^{+\infty}P(\tau>T_1\mid W_{T_1}=x)\,p(W_{T_1}=x)\mathrm{d}x=$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P(-\infty < -W_t < -at - b, 0 < t < T_1 \mid -W_{T_1} = -x)\, p(-W_{T_1} = -x)\mathrm{d}x =$$

$$\int_{-\infty}^{-\alpha T_1 - b}\left[1 - \exp\left(-\frac{2(-b)(-\alpha T_1 - b + x)}{T_1}\right)\right]\frac{\mathrm{e}^{-x^2/2T_1}}{\sqrt{2\pi T_1}}\mathrm{d}x =$$

$$N[(-\alpha T_1 - b)/\sqrt{T_1}] - \exp(-2\alpha b)N[(-\alpha T_1 + b)/\sqrt{T_1}] \tag{13}$$

由式(11),(12)和(13)可得

$$p(W_{T_1} = x \mid \tau > T_1) = P(\tau > T \mid W_{T_1} = x)p(W_{T_1} = x)/P(\tau > T_1) =$$

$$\frac{1_{\{-\alpha T_1 - b > -x\}}[1 - \exp(-2(-b)(-\alpha T_1 - b + x)/T_1)](\mathrm{e}^{-x^2/2T_1}/\sqrt{2\pi T_1})}{N[(-\alpha T_1 - b)/\sqrt{T_1})] - \exp(-2\alpha b)N[(-\alpha T_1 + b)/\sqrt{T_1})]} \tag{14}$$

由 V_{T_1-} 是 $W_{T_1} \sim N(0, T_1)$ 的函数[10],可得

$$p(V_{T_1-} = y \mid \tau > T_1) =$$

$$\frac{1_{\{y > \bar{K}\}}[1 - \exp(-2(-b)\ln(y/\bar{K})/\sigma T_1)][\mathrm{e}^{-(\ln(y/V_0) - (r - \sigma^2/2)T_1)^2/2T_1\sigma^2}/\sqrt{2\pi T_1}]/(\sigma \mid y \mid)}{N[(-\alpha T_1 - b)/\sqrt{T_1}] - \exp(-2\alpha b)N[(-\alpha T_1 + b)/\sqrt{T_1}]} \tag{15}$$

由于 $V_{T_1+} = V_{T_1-} - K_1$,由式(15)可得 V 在 T_{1+} 时刻的条件分布为

$$p(V_{T_1+} = z \mid \tau > T_1) =$$

$$\frac{1_{\{z > \bar{K} - K_1\}}[1 - \exp(-2(-b)\ln(z + K_1/\bar{K})/\sigma T_1)][\mathrm{e}^{-\{\ln[(z + K_1)/V_0] - (r - \sigma^2/2)T_1\}^2/2T_1\sigma^2}/\sqrt{2\pi T_1}]/(\sigma \mid z + K_1) \mid}{N[(-\alpha T_1 - b)/\sqrt{T_1}] - \exp(-2\alpha b)N[(-\alpha T_1 + b)/\sqrt{T_1}]} \tag{16}$$

2.2.2 T_1时刻由于偿还短期债务导致违约的概率及此时长期债券的定价

如果公司在$[0, T_1]$内没有违约的条件下,T_1时刻偿还短期债务K_1后发生违约,即 T_{1+} 时刻公司资产满足 $V_{T_1+} \leqslant \lambda K_2 \cdot \mathrm{e}^{-r(T_2 - T_1)}$. 由 $V_{T_1+} = V_{T_1-} - K_1$,可得

$$\{\bar{K} < V_{T_1-} \leqslant \lambda K_2 \mathrm{e}^{-r(T_2 - T_1)} + K_1 \sim \bar{\bar{K}}\} \sim \{\bar{K} < V_0 \mathrm{e}^{(r - \sigma^2/2)T_1 + \sigma W_{T_1}} \leqslant \bar{\bar{K}}\} \sim \{\ln\bar{K} < \ln V_0 + (r - \sigma^2/2)T_1 +$$
$$\sigma W_{T_1} \leqslant \ln\bar{\bar{K}}\} \sim \{\ln[(\bar{K}/V_0) - rT_1]/\sigma + \sigma T_1/2 < W_{T_1} \leqslant \ln[(\bar{\bar{K}}/V_0) - rT_1]/\sigma +$$
$$\sigma T_1/2\} \sim \{b + \alpha T_1 < W_{T_1} \leqslant b' + \alpha T_1\} \tag{17}$$

其中,$b' = (\bar{\bar{K}}/V_0 - rT_1)/\sigma$. 上式成立的前提是 $\bar{K} < \bar{\bar{K}}$,即 $\omega K_1 + \theta K_2\mathrm{e}^{-r(T_2 - T_1)} < K_1 + \lambda K_2 \cdot \mathrm{e}^{-r(T_2 - T_1)}$,否则不会由于偿还短期债务导致违约. 由式(17)可以得到 T_1时刻由于公司偿还短期债务,资产跳跃导致公司违约的概率为

$$P(b + \alpha T_1 < W_{T_1} \leqslant b' + \alpha T \mid \tau > T_1) = \int_{b + \alpha T_1}^{b' + \alpha T_1} p(W_{T_1} = x \mid \tau > T_1)\mathrm{d}x =$$

$$\int_{b + \alpha T_1}^{b' + \alpha T_1}\frac{[1 - \exp(2b(x - \alpha T_1 - b)/T_1)](\mathrm{e}^{-x^2/2T_1}/\sqrt{2\pi T_1})}{N[(-\alpha T_1 - b)/\sqrt{T_1}] - \mathrm{e}^{-2\alpha b}N[(-\alpha T_1 + b)/\sqrt{T_1}]}\mathrm{d}x \triangleq$$

$$\{[I_2/N(-\alpha T_1 - b)/\sqrt{T_1}] - \mathrm{e}^{-2\alpha b}N[(-\alpha T_1 + b)/\sqrt{T_1}]\} \tag{18}$$

此时,记长期债券的价格为 B_1,由基本假设 5 可知

$$B_1 = \int_{b + \alpha T_1}^{b' + \alpha T_1}[p(W_{T_1} = x \mid \tau > T_{1-})\alpha(V_0\mathrm{e}^{(r - \sigma^2/2)T_1 + \sigma x} - K_1)/K_2]\mathrm{d}x =$$

$$\int_{b + \alpha T_1}^{b' + \alpha T_1}\left\{\frac{[1 - \exp(2b(x - \alpha T_1 - b)/T_1)](\mathrm{e}^{-x^2/2T_1}/\sqrt{2\pi T_1})}{N[(-\alpha T_1 - b)/\sqrt{T_1}] - \mathrm{e}^{-2\alpha b}N[(-\alpha T_1 + b)/\sqrt{T_1}]}\alpha(V_0\mathrm{e}^{(r - \sigma^2/2)T_1 + \sigma x} - K_1)/K_2\right\}\mathrm{d}x \triangleq$$

$$\frac{(\alpha V_0\mathrm{e}^{(r - \sigma^2/2)T_1}I_1 - K_1 I_2)/K_2}{N[(-\alpha T_1 - b)/\sqrt{T_1}] - \mathrm{e}^{-2\alpha b}N[(-\alpha T_1 + b)/\sqrt{T_1}]} \tag{19}$$

其中

$$
\begin{aligned}
I_1 = {} & e^{\sigma^2 T_1/2}[N(b' + \alpha T_1;\sigma T_1,\sqrt{T_1}) - \\
& N(b + \alpha T_1;\sigma T_1,\sqrt{T_1})] - \\
& e^{-2\alpha b+\sigma^2 T_1/2+2b\sigma}[N(b' + \alpha T_1;\sigma T_1 + 2b, \\
& \sqrt{T_1}) - N(b + \alpha T_1;\sigma T_1 + 2b,\sqrt{T_1})] \\
I_2 = {} & [N(b' + \alpha T_1;0,\sqrt{T_1}) - \\
& N(b + \alpha T_1;0,\sqrt{T_1})] - \\
& e^{-2\alpha b}[N(b' + \alpha T_1;2b,\sqrt{T_1}) - \\
& N(b + \alpha T_1;2b,\sqrt{T_1})]
\end{aligned}
$$

其中,$N(x;\mu,\sigma)$表示期望为 μ、方差为 σ 的正态分布的累计概率分布函数.

2.2.3　时间段$[T_1,T_2]$上长期债券的价格

如果公司在$[0,T_1]$内没有违约,并且 T_1时刻偿还短期债务 K_1后也没有违约.类似 2.1 节的短期债券价格推导,根据式(3)和式(4),可得到$[T_1,T_2]$上长期债券价格 $P_2(V,t)$满足方程

$$
\left.
\begin{aligned}
& LP_2 = 0,\quad T_1 < t < T_2, K'(t) < V < \infty \\
& P_2(K'(t),t) = \alpha\lambda e^{-r(T_2-t)} \\
& P_2(V,T_2) = 1
\end{aligned}
\right\} \tag{20}
$$

类似可得

$$
P_2(V,t) = \{(1-\alpha\lambda)[N(\bar{d}_2) - VN(-\bar{d}_1)/\lambda K_2 e^{-r(T_2-t)}] + \alpha\lambda\}e^{-r(T_2-t)} \tag{21}
$$

其中:$\bar{d}_1 = [\ln(V/\lambda K_2) + (r+\sigma^2/2)(T_2-t)]/\sigma\sqrt{T_2-t}$,$\bar{d}_2 = \bar{d}_1 - \sigma\sqrt{T_2-t}$;$N(x)$意义同上.

注意到在 T_{1+}时刻 $V_{T_{1+}}$是一个随机变量,利用式(16)给出的随机变量 $V_{T_{1+}}$ 的条件密度函数 $p(V_{T_{1+}} = z|\tau > T_1)$,可以计算公司在$[0,T_1]$内没违约、并且 T_1时刻偿还短期债务 K_1后也没有违约的情形下,T_1时刻的价格 B_2

$$
\begin{aligned}
B_2 = {} & \int_{\max\{\bar{K},\bar{\bar{K}}\}-K_1}^{+\infty} P_2(z,T_1)p(V_{T_{1+}} = z|\tau > T_1)\mathrm{d}z = \\
& \int_{\max\{\bar{K},\bar{\bar{K}}\}-K_1}^{+\infty} \frac{\{1-\exp\{-2(-b)\ln[(z+K_1)/\bar{K}]/\sigma T_1\}\}(e^{-\{(\ln[(z+K_1)/V_0]-(r-\sigma^2/2)T_1)\}^2/2T_1\sigma^2}/\sqrt{2\pi T_1})/(\sigma(z+K_1))}{N[(-\alpha T_1-b)/\sqrt{T_1}]\exp(-2\alpha b)N[(-\alpha T_1-b)/\sqrt{T_1}]}\cdot \\
& \{(1-\alpha\lambda)[N(\bar{d}_2) - zN(-\bar{d}_1)/\lambda K_2 e^{-r(T_2-t)}] + \alpha\lambda\}e^{-r(T_2-t)}\mathrm{d}z
\end{aligned} \tag{22}
$$

如果 $\bar{K} < \bar{\bar{K}}$,公司因为偿还短期债务而违约,上式积分下限应为$\bar{\bar{K}} - K_1$;否则公司不会违约,积分下限应为 $\bar{K} - K_1$.

2.2.4　时间段$[0,T_1]$上长期债券的价格

在不同的情形下,T_1时刻长期债券有不同的价格,如果公司在$[0,T_1]$内违约,由基本假设 5 可知,长期债券在 T_1 时刻获得 $\alpha\bar{K}e^{-r(T_2-T_1)}/(K_1 + K_2 e^{-r(T_2-T_1)})$;如果公司在$[0,T_1]$内没违约的条件下,$T_1$时刻由于偿还短期债务 K_1后违约,长期债券在 T_1时刻价格为 B_1;如果在$[T_1,T_2]$内违约,那么长期债券在 T_1时刻的价格为 B_2.假设 $\bar{K} < \bar{\bar{K}}$,那么$[0,T_1]$内长期债券的价格为

$$
\begin{aligned}
P_2(t) = {} & [P(\tau \leqslant T_1)[\alpha\bar{K}e^{-r(T_2-T_1)}/(K_1 + K_2 e^{-r(T_2-T_1)})] + P(\tau > T_1)\int_{\bar{K}-K_1}^{+\infty} p(V_{T_{1+}} = \\
& z|\tau > T_1)P_2|_{t=T_{1+}}]e^{-r(T_1-t)} = [(1 - P(\tau > T_1))[\alpha\bar{K}e^{-r(T_2-T_1)}/ \\
& (K_1 + K_2 e^{-r(T_2-T_1)})] + P(\tau > T_1)(B_1 + B_2)]e^{-r(T_1-t)}
\end{aligned} \tag{23}
$$

其中:$P(\tau > T_1)$,B_1,B_2由式(15),(19)和(22)表示;$P_2|_{t=T_{1+}}$表示偿还短期债务后公司资产为 z 时,长期债券对应的价格.

3　数值结果及分析

从式(8),(21)和(23)可以看到,影响债券价格的主要因素有无风险利率、资产的波动率、债券的到期日,违约边界中的长期和短期债务的权重和违约时债务的回收率,还有财务杠杆(financial leverage,又叫融资杠杆),即企业在制定资本结构决策时对债务筹资的应用.这里引入负债比率——负债总额÷资产总额,反映公司通过债务筹资的比率——偿还财务能力比率,以反映公司履行债务的能力.这里通过债务结果中的短期和长期债务初始时刻占公司资产的比重反映公司的债务结构.假定 $t=0$ 时刻有 $K_1/V_0 = 0.1$,$K_2/V_0 = 0.5$,取 $r = 0.05$,$\sigma = 0.2$,$\alpha = 0.4$,$\omega = 1$,$\theta = \lambda = 0.5$,$V_0 = 1$,$T_1 = 1$,$T_2 = 10$.除非另外设定参数值,否则保持不变.

3.1　考虑短期债券随各个因素的变化情况

图 1,2,3 都在 $t = 0.5$ 年时考虑短期债券的价格变化,其中式(22)利用复合辛普森公式计算[11-12].

从图 1 可见,某一时刻短期债券价格都随公司资产的增加而增加,因为公司资产越多,意味着违约的可能性越小即违约风险越低.公司资产波动率越大,违约概率增大.所以,价格随波动率增大而减小.

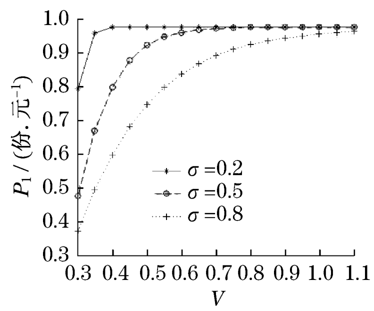

图 1 资产波动率的影响

Fig.1 The impact of the asset volatility

从图 2 可知,在违约概率不变的情况下,回收率越大意味着公司违约后可以偿付更多的债务,所以债券价格越高.($\sigma=0.8$)

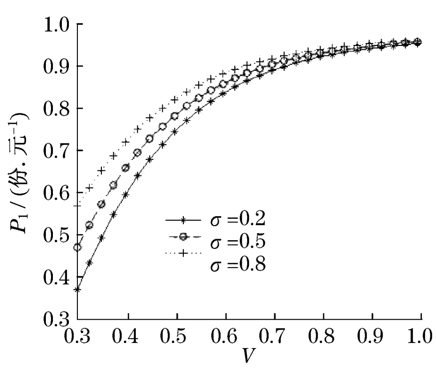

图 2 回收率的影响

Fig.2 The impact of recovering rate

图 3 中,S 和 L 分别代表初始时刻短期和长期债务占公司资产的比例.在总债务不变的前提下,因为短期债务在违约边界中的权重大于长期债务以及到期日短,使得短期债券的比例越大违约边界就越大,公司越容易违约,债券价格越低.($\sigma=0.8$)

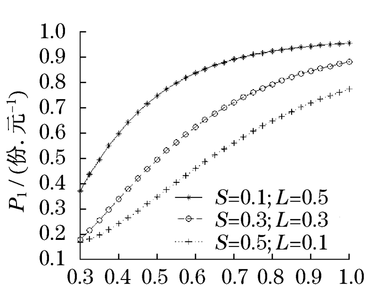

图 3 短期和长期债务比重对短期债券的影响

Fig.3 The impact of the ratio of short- and long-term liabilities on short- term liability

3.2 长期债券在[0,T_1]上的变化情况

由于长期债券在[T_1,T_2]上的定价过程及表达式与短期债券类似,在此不对它的变化做分析.这里主要考虑[0,T_1]上的价格变化.

由图 4 可知,在总债务不变的前提下,短期债券的比例越大违约边界就越大,公司越容易违约,债券价格越低.

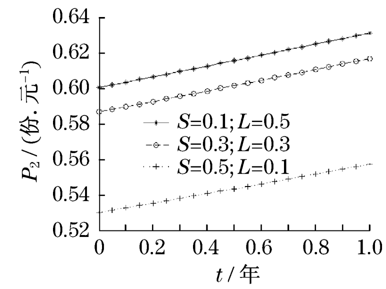

图 4 短期和长期债务比重对长期债券的影响

Fig.4 The impact of the ratio of short- and long-term liabilities on long-term liability

4 结论

对同时发行零息票的短期债券和长期债券公司,公司资产收益的波动率和违约时的回收率,对债券价格的影响,与只发行单个债券是类似的;但短期债券和长期债券发行量的比率对定价则有重大影响,原因主要是公司更可能由于不能偿还短期债务而违约.理论上,本文的方法可以推广到附息债券和信用违约互换(CDS)定价中,其中附息债券可以看成是多张不同到期日零息债券的组合.

参考文献:

[1] Merton R. Theory of rational option pricing[J]. Bell Journal of Economics and Management Science,1973(4):141.

[2] Zhou C. A jump-diffusion approach to modeling credit risk and valuing defaultable securities[R]. Washington:Federal Reserve Board,1997.

[3] Black F,Cox J C. Valuing corporate securities:some effects of bond indenture provisions[J]. Journal of Finance, 1976, 31:351.

[4] 姜礼尚.期权定价的数学模型和方法[M].北京:高等教育出版社,2003.
JIANG Lishang. The mathematical models and methods in option pricing[M]. Beijing:Higher Education Press 2003.

[5] 姜礼尚,徐承龙,任学敏,等.金融衍生产品定价的数学模型与案例分析[M]. 北京:高等教育出版社,2008.
JIANG Lishang, XU Chenglong, REN Xuemin, et al. The

mathematical model and cases analysis of financial derivatives pricing[M]Beijing：Higher Education Press. 2008.

[6] 姜礼尚，孙和生，陈志浩，等. 偏微分方程选讲[M]. 北京：高等教育出版社，1997.
JIANG Lishang，SUN Hesheng，CHEN Zhihao，et al. Some topics on partial differential equation[M]. Beijing：Higher Education Press. 1997.

[7] 姜礼尚，陈亚浙，刘西垣，等. 数学物理方程讲义[M]. 3 版. 北京：高等教育出版社，2007
JIANG Lishang，CHEN Yazhe，LIU Xihen，et al. Lecture on mathematics and physics equation[M]. 3rd ed. Beijing：Higher Education Press，2007.

[8] 徐润，吕玉华. 标准布朗运动关于线性边界通过概率[J]. 数学研究与评论，2005(4)：25.
XU Run，LV Yuhua. The probability of standard brownian motion passing linear Boundary[J]. Mathematics Research and Comments，2005(4)：25.

[9] Siegmund D，Yihshyh Yuh. Brownian approximations to first passage probabilities [J]. Zeitschrift für Wahrsch verw. Gebiete，1982，59：239.

[10] 陈兰祥，蒋凤瑛. 应用概率论[M]. 上海：同济大学出版社，1999.
CHEN Lanxiang，JIANG Fengying. Applied probability theory [M]. Shanghai：Tongji University Press，1999.

[11] 王沫然. MATLAB 与科学计算[M]. 2 版. 北京：电子工业出版社，2003.
WANG Moran. MATLAB and scientific computation [M]. 2nd ed. Beijing：Publishing House of Electronic Industry，2003.

[12] 同济大学计算数学教研室. 现代数值数学和计算[M]. 上海：同济大学出版社，2004.
Teaching and Research Section of Computational Mathematics of Tongji University. Modern numerical mathematics and computation[M]. Shanghai：Tongji University Press，2004.

（上接第 1328 页）

参考文献：

[1] Adriana Zaleska，Jan Hupka，Marek Wiergowski，et al. Photocatalytic degradation of Lindane，p，p-DDT and methoxychlor in an aqueous environment [J]. Journal of Photochemistry and Photobiology A：Chemistry，2000，135(2-3)：213.

[2] Nadeau L J，Menn F M，Breen A，et al. Aerobic degradation of 1，1，1-trichloro-2，2-bis (4-chlorophenyl) ethane (DDT) by alcaligenes eutrophus A5 [J]. Applied and Environmental Microbiology，1994，60：51.

[3] Nina H，Laura-Leena K，Kristiina K，et al. Crystal structure of a laccase from Melanocarpus albo Tnyces with an intact trinuclear copper site[J]. Nat Struct Boil，2002，9(8)：601.

[4] 王彦丽. 多氯酚污染物的降解研究进展[J]. 安徽农业科学，2009，37(30)：14858.
WANG Yanli. Research progress on degradation of the chlorinated phenols organic pollutants[J]. Journal of Anhui Agn Sci，2009，37(30)：14858.

[5] 陈辉，张剑波，刘小鸥，等. 漆酶催化降解氯酚类有机污染物[J]. 北京大学学报：自然科学版，2005，41(4)：605.
CHEN Hui，ZHANG Jianbo，LIU Xiaochi，et al. Degradation of chlorophenols catalyzed by laccase [J]. Acta Scientiarum Naturalium Univeritaties Pekinensis，2005，41(4)：605.

[6] 陈辉，张剑波，王维敬，等. 壳聚糖固定化云芝漆酶的制备及特性[J]. 北京大学学报：自然科学版，2006，42：254.
CHEN Hui，ZHANG Jianbo，WANG Weijing，et al. Preparation and characteristics of immobilized laccase from coriolus versicolor on chitosan [J]. Acta Scientiarum Naturalium Univeritaties Pekinensis，2006，42：254.

[7] 美国公共卫生协会，美国自来水厂协会，水污染控制联合会. 水和废水标准检验法[M]. 15 版. 宋仁元，张亚杰，王维一，等，译. 北京：中国建筑工业出版社，1985.
American Pubic Health Association，American Water Works Association，Water Pollution Control Federation. Standard methods for the examination of water and wastewater[M]. 15th ed. Translated by SONG Renyuan，ZAHNG Yajie，WANG Weiyi，et al. Beijing：China Architecture & Building Press，1985.

[8] 李建武. 生物化学[M]. 北京：北京大学出版社，1993.
LI Jianwu. Biological chemistry[M]. Beijing：Peking University Press，1993.

[9] YANG Yuxiang，ZHANG Jianbo，YANG Weimin，et al. Adsorption properties for urokinase on local diatomite surface [J]. Applied Surface Science，2003(206)：20.

[10] 秦文娟，于慧生，付时雨. 利用漆酶降解有机污染物[J]. 中国造纸，2001(5)：58.
QIN Wenjuan，YU Huisheng，FU Shiyu. Degradation of organic contamination by laccase[J]. China Puip & Paper，2001(5)：58.

[11] SHAO Jianguo，DENG Wenjing，YANG Yuxiang，et al. Adsorption of laccase onto mesoporous silica prepared with inorganic counterions[J]. Adsorption Science and Technology. 2009，27：147.

[12] 张伟，杨秀山. 酶的固定化技术及其应用[J]. 自然杂志，2000，22(5)：282.
ZHAGN Wei，YANG Xiushan. Methods for immobilizing enzymes and some applications[J]. Chinese Journal of Nature，2000，22(5)：282.

[13] Nelson Duran，Maria A Rosa Alessandro D Annibale，et al. Applications of laccases and tyrosinases (phenoloxidases) immobilized on different supports：a review[J]. Laccase and Microbial Technology，2002，31：926.