

## 基于傅立叶级数解的导温系数现场测定

吴建良<sup>1</sup>, 汤文<sup>2</sup>, 孙立军<sup>1</sup>

(1. 同济大学 道路与交通工程教育部重点实验室, 上海 201804; 2. 中交第二公路勘察设计研究院有限公司, 湖北 武汉 430056)

**摘要:** 将路面温度场抽象为1维瞬态热传导方程, 由分离变量法导出满足方程的傅立叶级数, 推导出在已知界面温度时确定1维层状体瞬态温度分布的解答. 基于路面温度场实测数据, 提出用牛顿法反算路面材料导温系数的方法. 在路面降温过程中路面温度沿深度单调变化时, 傅立叶级数解取50项就能够达到0.01℃的精度. 实测数据分析结果表明: 路面沥青层中上部导温系数较下部稍大, 中面层AC-16导温系数为 $0.0024 \text{ m}^2 \cdot \text{h}^{-1}$ , 底面层AC-25为 $0.0016 \text{ m}^2 \cdot \text{h}^{-1}$ , 比大多实验室测定值低.

**关键词:** 路面; 材料; 温度场; 导温系数; 傅立叶级数

**中图分类号:** U 416.217

**文献标识码:** A

### Thermal Diffusivity Field Determination Based on Fourier Series

WU Jianliang<sup>1</sup>, TANG Wen<sup>2</sup>, SUN Lijun<sup>1</sup>

(1. Key Laboratory of Road and Traffic Engineering of the Ministry of Education, Tongji University, Shanghai 201804, China; 2. CCCC Second Highway Consultants Co. Ltd., Wuhan 430056, China)

**Abstract:** Pavement temperature field was abstracted as one-dimensional transient heat conduction equation. Fourier series that compatibility with the equation was obtained by separation of variables. Then instantaneous temperature distribution of one dimensional layered body in terms of known interface temperature was derived based on Fourier series. The Newton method that back-calculation the thermal diffusivity of pavement material in related to measuring temperature distribution in field was presented. In cooling process as pavement temperature changes along the depth monotony, Fourier series with 50 items can attain the accuracy of 0.01℃. Results derived from measured data show that thermal diffusivity of top asphalt concrete layer is larger than that of bottom layer, with  $0.0024 \text{ m}^2 \cdot \text{h}^{-1}$  for AC-16 and  $0.0016 \text{ m}^2 \cdot \text{h}^{-1}$  for AC-25, which is lower than most of the

laboratory measured values.

**Key words:** pavement; material; temperature field; thermal diffusivity; Fourier series

密实的路面材料层显著地隔断了水的渗透与蒸发; 路面材料强烈吸收太阳辐射并蓄积于路面结构表层. 这些使得路面结构及其环境的温度变化范围超过其他地面类型, 而材料的热物理参数对温度的变化有着决定性的影响.

测定热物理参数时常用的平板法 ASTM C177<sup>[1]</sup>要求试件的厚度不大于平面尺寸的1/3. 测定沥青混合料这类非均匀材料时由于尺寸效应和边缘热损失, 平板法测定结果偏差较大.

Joseph Lucas等<sup>[2]</sup>研究采用圆柱体试件来进行热物理参数测定, 减少了热流的不均匀<sup>[3-4]</sup>. 对各向异性的材料来说, 圆柱体试件测定的是径向热传导性能, 而非通常关注较多的深度方向.

涂新斌等<sup>[5]</sup>以周期性温度场的解析解为基础, 由地面日平均温度随时间变化的波动反算材料的导温系数. 该方法需要对温度场做长期观测, 且只能获得在分析期内导温系数的平均值. 宋志文等<sup>[6]</sup>采用试验和反演分析相结合的方法, 同时反算多个热物理参数.

将实体结构作为一个大平板, 可以避开室内试件与实际结构相似度差的问题. 室外实际结构受环境、施工方式等影响与实验室试件差别较大, 直接测定室外结构的热物理参数代表性更好. 文章构建以短时实测温度场反算材料导温系数的理论模型, 以实测温度场验证, 并与实验室材料的测定值比较.

收稿日期: 2010-07-14

基金项目: 国家杰出青年科学基金(50325825)

第一作者: 吴建良(1983—), 男, 博士生, 主要研究方向为路面工程. E-mail: wys1c4b34@126.com

通讯作者: 孙立军(1963—), 男, 教授, 博士生导师, 工学博士, 主要研究方向为道路与交通工程. E-mail: jsun@tongji.edu.cn

## 1 路面模型

### 1.1 模型建立

路面沥青层厚度与路面平面尺度的比值远小于 1/3, 热流可以认为是垂直于路面表面 1 维传热. 沥青层厚度超过最大颗粒的 3 倍, 路面材料近似为均匀材料. 在已知沥青层内 2 个界面的温度分布后, 界面内沥青混合料的温度分布可以用如下方程表示<sup>[7]</sup>:

$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} \quad (1)$$

边界条件:  $T(0, t) = A(t)$ ;  $T(H, t) = B(t)$ .

初始条件:  $T(x, 0) = C(x)$ .

式中: 温度函数  $T(x, t)$  为时间  $t$  与深度  $x$  的函数;  $x$  的正方向为垂直于路表向里;  $H$  为界面间距离;  $\alpha$  为材料导温系数. 初始条件通常可以拟合为时间的三次函数.

路面温度场可以用对应的齐次边界条件下的傅立叶级数拟合

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x) \theta_n(t) \quad (2)$$

式中:  $\varphi_n(x) = \sin(n\pi x/H)$ ;  $\theta_n(t)$  为时间的函数.

需要指出的是: 从基本方程(1)通过分离变量法导出的傅立叶级数是针对深度  $x$  而非时间  $t$  的函数, 式(2)是瞬态温度场解答.

傅立叶级数的系数  $\theta_n(t)$  满足如下方程<sup>[7]</sup>:

$$\frac{d\theta_n(t)}{dt} + \alpha \lambda_n \theta_n(t) = \frac{\alpha(n\pi/H)[A(t) - (-1)^n B(t)]}{\int_0^H \varphi_n(x)^2 dx} \quad (3)$$

式中:  $\lambda_n = (n\pi/H)^2$ , 为第  $n$  项傅立叶级数的特征值. 定义时间函数  $\theta_n(t)$ ,  $A(t)$ ,  $B(t)$  的拉普拉斯变换函数为  $F_n(s)$ ,  $F_A(s)$ ,  $F_B(s)$ .  $\theta_n$  导数的拉普拉斯变换为

$$L\left(\frac{d\theta_n}{dt}\right) = sF_n(s) - \theta_n(0)$$

式中:  $L$  为拉氏变换;  $\theta_n(0)$  是初始温度下傅立叶级数第  $n$  项的系数, 且

$$\theta_n(0) = \frac{\int_0^H \varphi_n C(x) dx}{\int_0^H \varphi_n^2 dx}$$

对式(3)做拉普拉斯变换, 并定义等式右边为

$$\frac{\alpha(n\pi/H)[F_A(s) - (-1)^n F_B(s)]}{\int_0^H \varphi_n(x)^2 dx} = Y$$

方程式(3)变化为

$$sF_n(s) - \theta_n(0) + \alpha \lambda_n F_n(s) = Y \quad (4)$$

解代数方程(4)得

$$F_n(s) = \frac{Y + \theta_n(0)}{s + \alpha \lambda_n} \quad (5)$$

利用奇点性质对式(5)做拉普拉斯逆变换就得到傅立叶级数的系数  $\theta_n$ .

### 1.2 傅立叶级数误差

对均匀材料来说, 已知 3 个断面的温度分布就能够通过试算确定导温系数的区间. 把边界条件与初始条件导入式(1)的模型, 将式(4)做拉普拉斯逆变换的系数代入式(2)的傅立叶级数, 就得到不同导热系数下中间断面的温度预测值. 比较预测值与实测值的差异, 偏差最小对应的系数即为反算结果.

为选取合适的模型参数, 选择初始条件如图 1, 温度边界如表 1、表 2 所示的状况 1 与状况 2, 导温系数取  $10^{-4} \text{ m}^2 \cdot \text{h}^{-1}$ . 分析结构厚度为 10 cm. 不同项傅立叶级数在状况 1 与状况 2 下拟合 7 cm 深度处温度变化过程如图 2 和 3 所示, 图标中数值为级数取值项数.

由表 1 和表 2 可知, 状况 1、状况 2 中边界温度均随时间单调递减. 图 1 中状况 1 初始温度分布为单调函数, 而状况 2 初始温度存在 2 个拐点. 图 2 中状况 1 下傅立叶级数超过 50 项后波动不超过 0.05 °C. 状况 1 下随着时间的推移, 各傅立叶级数的截断误差有减小的趋势, 开始时最大差距为 2 °C; 6 h 后, 差距减小为 1 °C. 图 3 状况 2 中要达到 0.05 °C 的精度级数需要取 100 项, 且随时间推移截断误差减小趋势不明显.

表 1 状况 1 温度边界

Tab.1 Thermal boundary for condition 1

位置/cm	温度/°C					
	0	1 h	2 h	3 h	4 h	5 h
0	20.8	18.3	15.3	13.4	12.4	11.4
10	16.1	15.6	14.7	13.6	12.5	11.6

表 2 状况 2 温度边界

Tab.2 Thermal boundary for condition 2

位置/cm	温度/°C					
	0	1 h	2 h	3 h	4 h	5 h
0	38.6	38.8	37.7	36.0	35.2	34.5
10	40.3	39.6	39.0	38.5	37.7	36.9

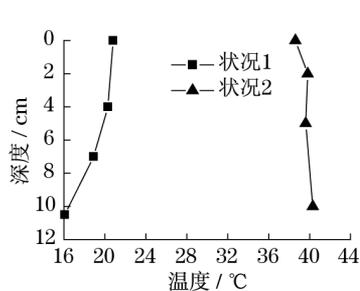


图1 初始温度分布  
Fig.1 Initial temperature distribution

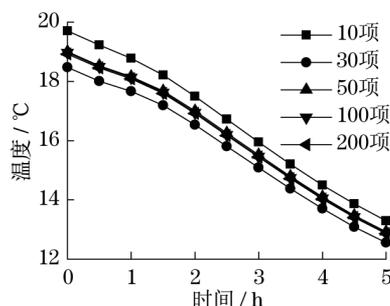


图2 状况1下傅立叶级数拟合  
7 cm处温度  
Fig.2 Fourier series fitting for  
7 cm in condition 1

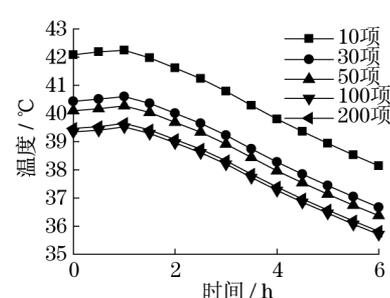


图3 状况2下傅立叶级数  
拟合7 cm处温度  
Fig.3 Fourier series fitting for  
7 cm in condition 2

傅立叶正弦级数在拟合有界变差函数时对函数的单调性较敏感.为提高预测精度,在分析时间段内沥青层内的热流方向不宜变化.24 h内沥青层降温过程较长,温度变化的速度比升温过程小,因此宜选择降温过程分析.用本方法模拟温度场在深度温度分布为单调时傅立叶级数取50项.

### 1.3 导温系数影响的单调性

参数反算中一个常见问题是同一响应对应的模型参数值并不惟一.而本模型中导温系数为唯一的参数.已知两断面的温度边界如表1,导温系数变化时7 cm处温度的变化如图4.

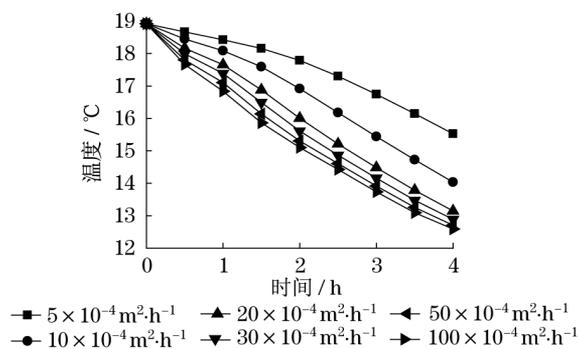


图4 导温系数影响的单调性  
Fig.4 Monotony of thermal diffusion affections

从图4中看出,随着导温系数的变化温度曲线没有交叉,导温系数对温度变化趋势的影响是单调的.参数反算可以通过调整参数值来实现,不会出现局部最优解的问题.预测值与实测值偏差最小时的导温系数值就为反算结果.

## 2 温度场实测

传感器的埋置如图5所示<sup>[8]</sup>.首先在沥青路面上钻芯;并在芯样的侧面不同高度处钻孔;将温度传

感器用热沥青固定于孔中;最后将埋入传感器的芯样还原回原路面结构,并用沥青混合料填充芯样与钻孔间的空隙.在预先计划的观测期内,记录仪全天候连续记录数据.采样频率为每10 min记录1组路面温度数据,并取每小时6次记录的平均值为该小时的路面温度观测值.

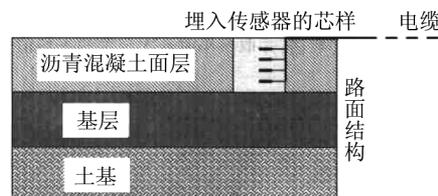


图5 传感器布置  
Fig.5 Sensor arrangement

## 3 实测比较

### 3.1 参数反算

由于材料的不均匀、温度传感器的测定偏差等因素的影响,不存在导温系数使得预测温度与实测数据相同.因此需要采用最优化的方法选择与实际较接近的参数.用数学方式表示为

$$\min \Delta T(\alpha) = \sum_{i=1}^d (T_{y_i}(\alpha) - T_{s_i})^2 / d \quad (6)$$

式中: $T_{y_i}(\alpha)$ 为导温系数取 $\alpha$ 时预测温度序列 $i$ 的取值; $T_{s_i}$ 为实测温度序列 $i$ 的取值; $\Delta T(\alpha)$ 为偏差函数; $d$ 为序列元素数目.

导温系数反算的实现过程为<sup>[9]</sup>:

(1) 选定初始点 $\alpha_0$ ,给定允许误差 $\epsilon > 0$ 和最大迭代次数 $k_{\max}$ ,令 $k = 0$ ;

(2) 求 $\Delta T(\alpha^{(k)})$ , $[\Delta^{(2)} T(\alpha^{(k)})]^{-1}$ ,检验若 $\Delta T(\alpha^{(k)}) < \epsilon$ 或 $k > k_{\max}$ ,则停止迭代, $\alpha^* \approx \alpha^{(k)}$ .否

则转向(3);

(3) 令  $S^{(k)} = [\Delta^{(2)} T(\alpha^{(k)})]^{-1} \Delta T(\alpha^{(k)})$  (牛顿方向);

(4)  $k = k + 1, \alpha^{(k)} = \alpha^{(k)} + S^{(k)}$ , 转回(2).

其中,  $\Delta^{(2)} T(\alpha^{(k)})$  为 2 阶导数, 用差分近似计算为  $\Delta^{(2)} T(\alpha^{(k)}) = [\Delta T(\alpha^{(k)} - \beta) - 2\Delta T(\alpha^{(k)}) + \Delta T(\alpha^{(k)} + \beta)]/\beta^2$ ,  $\beta$  为差分网格大小.

在选定迭代终止条件时增加迭代次数, 以防止在不能够达到精度要求时出现无穷迭代的情况.

### 3.2 实测数据反算参数

表 3 为乌鲁木齐测试路段的温度数据, 温度传感器的埋设位置为路表下: 10, 50, 80, 90, 100, 115 mm. 以 10, 115 mm 断面为边界层, 把边界条件与初始条件导入式(1)的模型, 求解得到不同导热系数下中间断面的温度预测值.

表 3 乌鲁木齐 2003 年 4 月 6 日温度场实测温度  
Tab.3 Urumchi temperature field measured in April 6, 2003

位置/mm	温度/℃					
	0	1 h	2 h	3 h	4 h	5 h
10	19.9	16.6	14.0	12.4	11.3	9.9
50	19.3	16.9	14.7	12.9	11.8	10.5
80	17.9	16.4	14.8	13.2	12.2	11.1
90	17.0	15.7	14.1	12.7	11.7	10.7
100	16.9	15.6	14.0	12.4	11.3	10.2
115	15.2	14.3	13.2	11.9	11.0	10.0

运用本文方法反算各深度的导温系数. 参数设定为: 导温系数初始值  $\alpha_0 = 30 \times 10^{-4} \text{ m}^2 \cdot \text{h}^{-1}$ ; 容许误差  $\epsilon = 0.04 \text{ }^\circ\text{C}^2$ ; 最大迭代次数  $k_{\max} = 50$ ; 差分网格大小  $\beta = 0.05 \times 10^{-4} \text{ m}^2 \cdot \text{h}^{-1}$ .

路面沥青层为 120 mm, 3 mm AC-13 + 4 mm AC-16 + 5 mm AC-25. 沥青层的下卧层为 300 mm 的半刚性基层和 400 mm 的二灰土.

图 6 为中间断面温度预测值与计算值的对比, 导温系数以对应的数值在图中标识.

图 6 中 50 mm 处实测温度曲线靠近导温系数为  $20 \times 10^{-4} \text{ m}^2 \cdot \text{h}^{-1}$  的温度曲线. 表 4 中, 位于沥青混凝土中下层的 80, 90, 100 mm 处反算的导温系数稳定于  $16 \times 10^{-4} \sim 18 \times 10^{-4} \text{ m}^2 \cdot \text{h}^{-1}$ ; 位于沥青混凝土中层的 50 mm 处反算出的导温系数稍大. 表 4 的反算结果表明, 路面沥青层不同层次的导温系数并不完全相同, 较细级配的 AC-16 导温系数大于粗级配 AC-25 的导温系数.

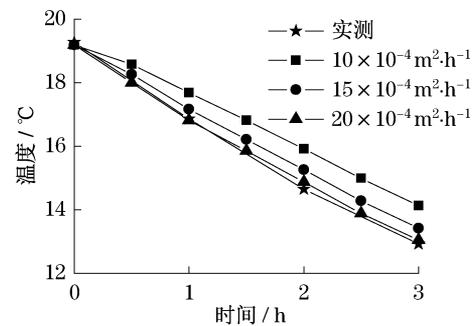


图 6 50 mm 处预测值与实测值比较

Fig.6 Comparison of predicted and measured values in the 50 mm

表 4 反算结果

Tab.4 Back-calculation results

位置/mm	导温系数/ $(10^{-4} \text{ m}^2 \cdot \text{h}^{-1})$	迭代次数	误差/ $^\circ\text{C}^2$
50	22.8	5	0.000 3
80	16.3	7	0.022 2
90	17.9	6	0.007 8
100	17.1	7	0.027 8

以上的反算结果是建立在沥青结构层大致均匀的基础上的; 如要进行更加精确的参数反算, 可以减小温度边界的间距重新反算. 如以 80, 100 mm 深度温度序列为温度边界, 拟合 90 mm 深度处温度序列; 如以 10, 80 mm 深度温度序列为温度边界, 拟合 50 mm 深度处温度序列. 反算结果为: 50 mm 所在的中面层导温系数为  $24.3 \times 10^{-4} \text{ m}^2 \cdot \text{h}^{-1}$ ; 90 mm 所在的下面层导温系数为  $16.6 \times 10^{-4} \text{ m}^2 \cdot \text{h}^{-1}$ .

表 5 为近年来实验室测定的沥青混凝土材料导温系数. 在分析时有必要获取更加精确的数值.

材料热物理性能的参数间有如下关系:

$$\alpha = \lambda / \rho c$$

式中:  $\lambda$  为导热系数;  $\rho$  为密度;  $c$  为比热容.

导温系数、比热、密度已知就得到导热系数. 沥青混凝土的比热和密度可以在制作的过程中获得, 并且较稳定. 在反算出导温系数后, 易得到材料导热系数的估计值.

表 5 沥青混凝土导温系数

Tab.5 Thermal diffusion of asphalt concrete

文献	文献[10]	文献[2]	文献[4]	文献[3]
导温系数/ $(10^{-4} \text{ m}^2 \cdot \text{h}^{-1})$	20~28	14~25	14~33	41~52

## 4 结论

根据热传导方程, 推导出温度边界下 1 维层状

体瞬态温度场的傅立叶级数解.在导温系数已知时,解答可以预测边界内任意位置的温度变化.通过参数分析,确定了傅立叶级数解的实用范围,在降温阶段温度沿深度单调时,级数取50项就能够达到0.01℃的精度.采用牛顿迭代法,提出通过现场实测数据反算导温系数的方法.沥青混凝土导温系数的一般值为 $0.0015 \sim 0.0025 \text{ m}^2 \cdot \text{h}^{-1}$ ,较实验室测定值小.

### 参考文献:

- [1] ASTM C177. Standard test method for steady-state heat flux measurements and thermal transmission properties by means of the guarded-hot-plate apparatus [S]. [S. l.]: ASTM, 2004.
- [2] Joseph Lucas, Donath Mrawira. New measurement of thermal property of superpave asphalt concrete[J]. Journal of Materials in Civil Engineering, 2005, 17(1): 72.
- [3] Kavianipour A, Beck J V. Thermal property estimation utilizing the laplace transform with application to asphaltic pavement [J]. International Journal of Heat Mass Transfer, 1977, 20(3): 259.
- [4] Mrawira D, Luca J. Thermal properties and transient temperature response of full depth asphalt pavements [R]. Washington D C: Transportation Research Board, 2002.
- [5] 涂新斌,戴福初. 土体一维热传导方程解析解及热扩散系数测定[J]. 岩土工程学报, 2008, 30(5): 652.
- TU Xinbin, DAI Fuchu. Analytical solution for one-dimensional heat transfer equation of soil and evaluation of thermal diffusivity [J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2008, 30(5): 652.
- [6] 宋志文,肖建庄,赵勇. 基于试验测定的混凝土热工参数反演计算[J]. 同济大学学报:自然科学版, 2010, 38(1): 35.
- SONG Zhiwen, XIAO Jianzhuang, ZHAO Yong. Back-analysis of concrete thermal parameters based on experimental measurements [J]. Journal of Tongji University: Natural Science, 2010, 38(1): 35.
- [7] Haberman R. 实用偏微分方程 [M]. 郇中丹,李援南,刘歆,等,译. 北京:机械工业出版社, 2007.
- Haberman R. Applied partial differential equations [M]. Translated by XUN Zhongdan, LI Yuannan, LIU Xin, et al. Beijing: China Machine Press, 2007.
- [8] 孙立军. 沥青路面结构行为理论 [M]. 北京:人民交通出版社, 2005.
- SUN Lijun. Asphalt pavement performance theory [M]. Beijing: China Communications Press, 2005.
- [9] 陈宝林. 最优化理论与算法 [M]. 北京:清华大学出版社, 2005.
- CHEN Baolin. Optimization theory and algorithms [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2005.
- [10] 吴赣昌. 半刚性路面温度应力分析 [M]. 北京:科学出版社, 1995.
- WU Ganchang. Semi-rigid pavement thermal stresses analysis [M]. Beijing: Science Press, 1995.
- [11] 王命平,张自琼,耿树江. 500 MPa 级带肋碳素钢筋混凝土简支梁的受弯试验 [J]. 工业建筑, 2007, 37(8): 39.
- WANG Mingping, ZHANG Ziqiong, GENG Shujiang. Experiment of reinforced concrete simply supported beam with 500 MPa ribbed carbon bars under bending [J]. Industrial Construction, 2007, 37(8): 39.
- [12] 王铁成,李艳艳,戎贤. 配置 500 MPa 钢筋的混凝土梁受弯性能试验 [J]. 天津大学学报, 2007, 40(5): 507.
- WANG Tiecheng, LI Yanyan, RONG Xian. Test for bending behavior of reinforced concrete beam with 500 MPa steel bar [J]. Journal of Tianjin University, 2007, 40(5): 507.
- [13] 肖红菊. HRB400 级钢筋混凝土梁抗弯性能研究 [D]. 郑州:郑州大学土木工程学院, 2006.
- XIAO Hongju. Experimental research on the bend behavior of HRB400 reinforced concrete beams [D]. Zhengzhou: Zhengzhou University. College of Civil Engineering, 2006.
- [14] 徐风波. HRB500 级钢筋混凝土梁正截面受力性能试验及理论研究 [D]. 长沙:湖南大学土木工程学院, 2007.
- XU Fengbo. Experimental and theoretical research on flexural behavior of reinforced concrete beams with HRB500 bars [D]. Changsha: Hunan University. College of Civil Engineering, 2007.
- [15] 张艇. HRB500 级钢筋混凝土构件受力性能的试验研究 [D]. 郑州:郑州大学土木工程学院, 2004.
- ZHANG Ting. Experimental research on forced performance of concrete beam reinforced with grade HRB500 reinforcement [D]. Zhengzhou: Zhengzhou University. College of Civil Engineering, 2004.
- [16] 蓝宗建,丁大钧. 钢筋混凝土受弯构件裂缝宽度的计算 [J]. 南京工学院学报, 1985(2): 64.
- LAN Zongjian, DING Dajun. Calculation for crack width for reinforced concrete members with flexure [J]. Journal of Nanjing Institute of Technology, 1985(2): 64.
- [17] 周建民,胡匡璋. 加筋混凝土构件裂缝宽度计算方法的研究 [J]. 上海铁道大学学报:自然科学版, 1990, 11(3): 1.
- ZHOU Jianmin, HU Kuangzhang. Studies on calculating method for the crack width in reinforced concrete members [J]. Journal of Shanghai Institute of Railway Technology, 1990, 11(3): 1.

### (上接第 1425 页)