第 39 卷第 12 期
2011 年 12 月

同济大学学报(自然科学版)
JOURNAL OF TONGJI UNIVERSITY(NATURAL SCIENCE)

Vol. 39 No. 12
Dec. 2011

文章编号：0253-374X(2011)12-1773-06　　DOI:10.3969/j.issn.0253-374x.2011.12.008

三维快速多极虚边界元配点法

许　强，司　炜，张志佳

（同济大学 建筑工程系，上海 200092）

摘要：以三维弹性力学问题为研究背景，提出了一种三维快速多极虚边界元配点法的求解思想，即将三维快速多极展开的基本思想和广义极小残值法运用于求解传统虚边界元配点法方程. 文中将三维弹性问题的基本解推导为适合于虚边界元快速多极算法的展开格式，经数值计算格式的演变，使求解方程的计算量和储存量与所求问题的计算自由度数成线性比例，以达到数值模拟大规模自由度问题的目的. 算例说明了该方法的可行性、计算效率和计算精度. 此外，该方法的思想具有一般性，应用上具有扩展性.

关键词：快速多极算法；广义极小残值法；虚边界元法

中图分类号：O 343.1；TB 33　　**文献标识码**：A

Fast Multipole Virtual Boundary Element Collocation Method for Solving Three-dimensional Problems

XU Qiang, SI Wei, ZHANG Zhijia

(Department of Building Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, China)

Abstract: In the research background of the three dimensional elasticity problem, the idea of the three-dimensional fast multipole virtual boundary element collocation method is proposed, in other words, the generalized minimal residual (GMRES) algorithm and the basic idea of fast multipole method (FMM) are jointly employed to solve the equations related to virtual boundary element collocation method (VBEM). The fundamental solutions of three-dimensional problem of elasticity are derived as the numerical scheme to be suitable for the FMM of virtual boundary element method. After the evolution of numerical format, the amount of the computational elapsed time and the memory volume of the storage problems with the calculation of demand are linearly proportional to the number of degrees of freedom of the problem to be solved. Then the numerical simulation large-scale degrees of freedom question might be achieved by the method. The numerical examples have proved the feasibility, efficiency and calculating precision of the method. Moreover, the idea of the proposed method has the generality and the extension in the engineering applications.

Key words: fast multipole method (FMM); generalized minimal residual algorithm (GMRES); virtual boundary element method (VBEM)

相对边界元直接法，虚边界元法具有自身的优点，如无需处理奇异积分、不存在边界层效应、数值稳定性好和解的精度高等[1-3]. 但与边界元直接法一样，采用虚边界元法求解大规模问题时也存在着耗时较多和存储量较大的现象，尤其是对三维问题的计算，其原因是常规虚边界元法所形成的系数矩阵通常也是非稀疏的满阵或为对称的. 这就是说，当维数 N 增大到一定的量值时，一般的普通计算机内存是难以满足相应的存储要求；更为突出的是，计算耗时量是随着 N 的增大而按某一指数急剧地增长. 由此可知，如何采用虚边界元法有效地求解大规模问题是值得深入探讨的.

近年来，快速多极展开算法(FMM)[4-8]的研究更加深入，为提高边界元法的计算效率和减少存储空间提供了可行的思路. “快速多极展开”最早是由 Rokhlin 于 1985 年提出的，当时主要用于势场问题的计算分析，使矩阵与向量相乘的计算量和储存量由 $O(N^2)$ 降至 $O(N\lg N)$. 在此基础上，Greengard 和 Rokhlin 于 1997 年又提出了局部展开的数值处理技术，使计算量和储存量进一步减少到 $O(N)$量级. 近年来，国内外已有一些学者将快速多极展开算法应用于边界元直接法的方程求解中[4-8].

本文以三维弹性力学问题为研究背景，借鉴快速多极展开算法的基本思想，推导出一种适用于三

收稿日期：2010-09-27
第一作者：许　强(1951—)，男，教授，博士生导师，工学博士，主要研究方向为计算固体力学、结构工程. E-mail:xuqiang@tongji.edu.cn
通讯作者：司　炜(1980—)，男，博士生，主要研究方向为计算固体力学. E-mail:2009swreal@tongji.edu.cn

维快速多极虚边界元配点法的数值求解格式.该方法在虚拟边界上采用数值积分,在实际边界上依据配点法思想进行相应配点.此处值得指出的是:①虚边界元法与边界元直接法引入快速多极展开所形成的快速多极解法的思想存在较大差异;②目前已有的快速多极边界元直接法仍不能避免奇异积分,而快速多极虚边界元法则无需处理奇异积分,且不存在边界层效应;③由于问题的实际边界所对应的虚拟边界构形具有一定的可选性,且实、虚边界间的距离适用选择范围较大,故可做到人为地调制满足快速多极展开法的计算收敛要求;换言之,原虚拟边界上的数值积分可尽可能地做到采用快速多极算法来处理,从而能较大限度地提高计算效率.

1 三维弹性问题的虚边界元配点法数值求解格式

虚边界元法的基本思想见文献[1-3],此处仅作简述.设弹性问题的域定义为 Ω,其实际边界为 Γ,虚拟边界为 S(图1).设在虚拟边界 S 上存在着与原弹性力学问题真实的解相对应的虚拟源函数 $\varphi_i(\boldsymbol{y})(i=1,2,3)$,这里的 $\boldsymbol{y}$ 称之为位于虚边界上的源点.虚边界元法的主导思想可简述为:将原来只在体力作用下满足实际边界条件的弹性力学问题的求解转化为在体力函数和虚拟源函数共同影响下满足实际边界条件的求解.倘若与给定问题真实的解相对应的 $\varphi_i(\boldsymbol{y})$ 存在,则在不计体力的情况下原问题的域 Ω 内任一点处位移和实边界 Γ 上任一点处位移或面力可根据叠加原理由下式计算:

$$U_j(\boldsymbol{x}) = \int_S U_{ji}^*(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \cdot \varphi_i(\boldsymbol{y})\mathrm{d}S \tag{1}$$

$$P_j(\boldsymbol{x}) = \int_S P_{ji}^*(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \cdot \varphi_i(\boldsymbol{y})\mathrm{d}S \tag{2}$$

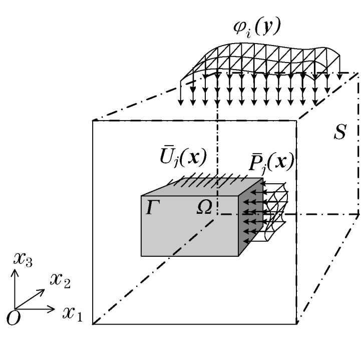


图1 虚边界元法示意图

Fig.1 Sketch map of VBEM

式(1),(2)中:$U_{ji}^*(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ 和 $P_{ji}^*(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ 分别是三维弹性力学问题的位移和面力基本解[1],即 Kelvin 解.

在运用式(1),(2)求解位移和面力时,必须先获知 $\varphi_i(\boldsymbol{y})$;而 $\varphi_i(\boldsymbol{y})$ 则需通过建立具有满足问题所给定的实际边界条件性质的虚边界元法方程来求解.为此,本文依据配点法思想,采用由基本解和叠加原理所建立的积分方程(1)和(2),且对其进行数值化离散,使该方程在有限个配点处满足问题所给定的实际边界条件来建立求解 $\varphi_i(\boldsymbol{y})$ 在虚拟边界上的节点值的代数方程,从而达到对 $\varphi_i(\boldsymbol{y})$ 的求解.

将研究的弹性体所对应的虚拟边界 S 离散成 m_e 个单元,每个单元有 n_e 个节点,则

$$S = \sum_{e=1}^{m_e} S_e \tag{3}$$

$$y_i^{(e)}(\xi_1,\xi_2) = \sum_{l=1}^{n_e} N_l^{(e)}(\xi_1,\xi_2) \cdot {}_l y_i \tag{4}$$

$$\varphi_i^{(e)}(\xi_1,\xi_2) = \sum_{l=1}^{n_e} N_l^{(e)}(\xi_1,\xi_2) \cdot {}_l\varphi_i \tag{5}$$

式(3)~(5)中:S_e 表示虚边界上的第 e 个单元;$y_i^{(e)}(\xi_1,\xi_2)$ 表示第 e 个单元内点 $\boldsymbol{y}(\xi_1,\xi_2)$ 处沿 x_i 方向的坐标插值;$N_l^{(e)}(\xi_1,\xi_2)$ 为在自然坐标 ξ_1,ξ_2 下单元的形函数;${}_l y_i$ 是单元节点坐标值;$\varphi_i^{(e)}(\xi_1,\xi_2)$ 表示第 e 个单元内点 $\boldsymbol{y}(\xi_1,\xi_2)$ 处沿 x_i 方向的虚拟函数插值;${}_l\varphi_i$ 是单元节点虚拟函数值.设 n 为整个虚拟边界上的节点数,则节点虚拟函数值的整体向量 $\boldsymbol{\varphi}$ 可表示为

$$\boldsymbol{\varphi} = \{{}_1\varphi_1\ {}_1\varphi_2\ {}_1\varphi_3 \cdots {}_n\varphi_1\ {}_n\varphi_2\ {}_n\varphi_3\}^{\mathrm{T}} \tag{6}$$

对虚拟边界进行单元离散并将式(4),(5)带入式(1),于是,有

$$U_j(\boldsymbol{x}) = \sum_{e=1}^{m_e}\sum_{l=1}^{n_e}\int_{S_e} U_{ji}^*(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \cdot N_l^{(e)}(\xi_1,\xi_2) \cdot {}_l\varphi_i\ \mathrm{d}S \tag{7}$$

同理,由式(2)可得

$$P_j(\boldsymbol{x}) = \sum_{e=1}^{m_e}\sum_{l=1}^{n_e}\int_{S_e} P_{ji}^*(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \cdot N_l^{(e)}(\xi_1,\xi_2) \cdot {}_l\varphi_i\ \mathrm{d}S \tag{8}$$

依据配点法,使式(7)和(8)在有限个配点处分别满足问题所给定的位移和面力边界条件,即在位移边界的配点 $\boldsymbol{x}$ 处有 $U_j(\boldsymbol{x}) = \bar{U}_j(\boldsymbol{x})$,面力边界上有 $P_j(\boldsymbol{x}) = \bar{P}_j(\boldsymbol{x})$.最后可形成求解节点虚拟函数值 $\boldsymbol{\varphi}$ 的线性代数方程组,即

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{B} \tag{9}$$

式中:$\boldsymbol{A}$ 为 $3n \times 3n$ 的系数矩阵;$\boldsymbol{B}$ 是由配点处的已

知边界条件所形成的 $3n \times 1$ 的列向量.

2　三维快速多极展开传递技术

依据快速多极算法的基本思想,形成适合于虚边界元配点法的多极展开的数值求解格式.需强调的是,由于虚边界元法与边界元直接法建立求解方程的思路不同,故对基本解的多级展开格式和传递过程的实施,两种方法均存在差别.

下面就核函数的多极展开、多极展开系数的转移、多极展开系数向局部展开系数的传递和局部展开系数的转移等细节逐一阐述.由于面力基本解的多极展开和传递过程与位移基本解的类似,故文中仅就位移基本解的展开与传递阐述本文方法.

2.1　核函数的多极展开

如图 2 所示,$\boldsymbol{y}$ 和 $\boldsymbol{x}$ 分别表示三维空间中的任一源点和场点,而将靠近点 $\boldsymbol{y}$ 的 $\boldsymbol{y}_0$ 视为过渡点.为了确保计算精度,要求

$$r_1 \leqslant \frac{1}{2} r_2 \tag{10}$$

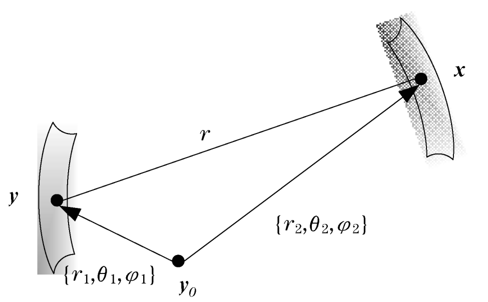


图 2　球谐函数展开的条件

Fig.2　Requirements for spherical harmonic expansion

运用球谐函数,可使距离 r 的倒数展开成如下形式,从而达到变量 $\boldsymbol{y}$ 和 $\boldsymbol{x}$ 的分离:

$$\frac{1}{r} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} \overline{S_{n,m}(\overrightarrow{\boldsymbol{y}_0\boldsymbol{x}})} R_{n,m}(\overrightarrow{\boldsymbol{y}_0\boldsymbol{y}}) \tag{11}$$

其中

$$R_{n,m}(\overrightarrow{\boldsymbol{y}_0\boldsymbol{y}}) = \frac{1}{(n+m)!} P_n^m(\cos\theta_1) \mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi_1} r_1^{n+1} \tag{12}$$

$$S_{n,m}(\overrightarrow{\boldsymbol{y}_0\boldsymbol{x}}) = (n-m)! P_n^m(\cos\theta_2) \mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi_2} \frac{1}{r_2^{n+1}} \tag{13}$$

式(12),(13)中:P_n^m 为连带勒让德多项式.在实际应用中,当展开阶数 $n \geqslant 15$ 时,计算误差小于 10^{-5},有很高的精度.将位移基本解 $U_{ji}^*(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ 改写成如下形式:

$$U_{ji}^*(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \frac{1}{8\pi\mu}\left[\frac{\lambda+3\mu}{\lambda+2\mu}\delta_{ij}\frac{1}{r} - \frac{\lambda+\mu}{\lambda+\mu}(\overrightarrow{\boldsymbol{y}_0\boldsymbol{x}})_j \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{1}{r} + \frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{(\overrightarrow{\boldsymbol{y}_0\boldsymbol{y}})_j}{r}\right] \tag{14}$$

式中:δ_{ij} 为 Kronecker-δ 函数;λ,μ 为拉梅常数.将式(11)代入式(14),可得位移基本解的标准双重求和展开形式

$$U_{ji}^*(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \frac{1}{8\pi\mu}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}\left[\overline{F_{ij,n,m}^{\mathrm{S}}(\overrightarrow{\boldsymbol{y}_0\boldsymbol{x}})} R_{n,m}(\overrightarrow{\boldsymbol{y}_0\boldsymbol{y}}) + \overline{G_{i,n,m}^{\mathrm{S}}(\overrightarrow{\boldsymbol{y}_0\boldsymbol{x}})}(\overrightarrow{\boldsymbol{y}_0\boldsymbol{y}})_j R_{n,m}(\overrightarrow{\boldsymbol{y}_0\boldsymbol{y}})\right] \tag{15}$$

其中

$$F_{ij,n,m}^{\mathrm{S}}(\overrightarrow{\boldsymbol{y}_0\boldsymbol{x}}) = -t_2(\overrightarrow{\boldsymbol{y}_0\boldsymbol{x}})_j \frac{\partial}{\partial x_i} S_{n,m}(\overrightarrow{\boldsymbol{y}_0\boldsymbol{x}}) + t_1\delta_{ij} S_{n,m}(\overrightarrow{\boldsymbol{y}_0\boldsymbol{x}}) \tag{16}$$

$$G_{i,n,m}^{\mathrm{S}}(\overrightarrow{\boldsymbol{y}_0\boldsymbol{x}}) = t_2 \frac{\partial}{\partial x_i} S_{n,m}(\overrightarrow{\boldsymbol{y}_0\boldsymbol{x}}) \tag{17}$$

$$t_1 = \frac{\lambda+3\mu}{\lambda+2\mu},\ t_2 = \frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu} \tag{18}$$

这里的 $F_{ij,n,m}^{\mathrm{S}}(\overrightarrow{\boldsymbol{y}_0\boldsymbol{x}})$ 和 $G_{i,n,m}^{\mathrm{S}}(\overrightarrow{\boldsymbol{y}_0\boldsymbol{x}})$ 均是以球谐函数表述,且只与变量 $\boldsymbol{x}$ 有关;而 $R_{n,m}(\overrightarrow{\boldsymbol{y}_0\boldsymbol{y}})$ 则仅与变量 $\boldsymbol{y}$ 有关.再将式(15)代入式(1),则得

$$U_j(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{8\pi\mu}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}\left[\overline{F_{ij,n,m}^{\mathrm{S}}(\overrightarrow{\boldsymbol{y}_0\boldsymbol{x}})} M_{i,n,m}^1(\boldsymbol{y}_0) + \overline{G_{i,n,m}^{\mathrm{S}}(\overrightarrow{\boldsymbol{y}_0\boldsymbol{x}})} M_{ij,n,m}^2(\boldsymbol{y}_0)\right] \tag{19}$$

其中

$$M_{i,n,m}^1(\boldsymbol{y}_0) = \int_S R_{n,m}(\overrightarrow{\boldsymbol{y}_0\boldsymbol{y}})\varphi_i(\boldsymbol{y})\mathrm{d}S \tag{20}$$

$$M_{ij,n,m}^2(\boldsymbol{y}_0) = \int_S (\overrightarrow{\boldsymbol{y}_0\boldsymbol{y}})_j R_{n,m}(\overrightarrow{\boldsymbol{y}_0\boldsymbol{y}})\varphi_i(\boldsymbol{y})\mathrm{d}S \tag{21}$$

这里,$M_{i,n,m}^1(\boldsymbol{y}_0)$ 和 $M_{ij,n,m}^2(\boldsymbol{y}_0)$ 称作多极展开系数或多极矩,可适用于不同源点的核函数积分,其在传递过程中仅需计算一次.

2.2　多极展开系数的转移(M2M)

图 3 中给出的立方体 C_2 是由 8 个大小相同的子立方体组成,其形心位置以 $\boldsymbol{y}_{c_2}$ 表示;将其中一个子立方体示为 C_1,对应的形心位置以 $\boldsymbol{y}_0$ 表示.将基本解中的 $\boldsymbol{y}$ 视为自变量,以 $\boldsymbol{y}_{c_2}$ 为新的展开点,利用球谐函数将其展开成双重求和形式,可得到与式(19)相似的表达和新的多极展开系数.新的多极展开系数可以由老的多极展开系数计算得到.在满足下式要求的前提下:

$$|\overrightarrow{\boldsymbol{y}_{c_2}\boldsymbol{y}}| \leqslant \frac{1}{2}|\overrightarrow{\boldsymbol{y}_{c_2}\boldsymbol{x}}| \tag{22}$$

根据球谐函数 R 的固有传递性质

$$R_{n,m}(\overrightarrow{\boldsymbol{y}_{c_2}\boldsymbol{y}}) = \sum_{n'=0}^{n}\sum_{m'=-n'}^{n'} R_{n-n',m-m'}(\overrightarrow{\boldsymbol{y}_0\boldsymbol{y}}) R_{n',m'}(\overrightarrow{\boldsymbol{y}_{c_2}\boldsymbol{y}_0}) \tag{23}$$

则依据式(20)和(21),对 $\boldsymbol{y}_{c_2}$ 点展开,有

$$M^1_{i,n,m}(\boldsymbol{y}_{c_2}) = \sum_{n'=0}^{n}\sum_{m'=-n'}^{n'} R_{n',m'}(\overrightarrow{\boldsymbol{y}_{c_2}\boldsymbol{y}_0}) M^1_{i,n-n',m-m'}(\boldsymbol{y}_0) \tag{24}$$

$$M^2_{ij,n,m}(\boldsymbol{y}_{c_2}) = \sum_{n'=0}^{n}\sum_{m'=-n'}^{n'} R_{n',m'}(\overrightarrow{\boldsymbol{y}_{c_2}\boldsymbol{y}_0}) \cdot [M^2_{ij,n-n',m-m'}(\boldsymbol{y}_0) - (\overrightarrow{\boldsymbol{y}_0\boldsymbol{y}_{c_2}})_j M^1_{i,n-n',m-m'}(\boldsymbol{y}_0)] \tag{25}$$

通过多极展开系数的传递,把子立方体的多极展开系数集成到了父立方体的多极展开系数.

2.3 多极展开系数向局部展开系数的传递(M2L)

又如图3可知,立方体 C_3 也是由8个大小相同的子立方体组成,其形心位置以 $\boldsymbol{x}_{c_3}$ 表示;将其中一个子立方体示为 C_4,对应的形心位置以 $\boldsymbol{x}_0$ 表示. C_3 与 C_2 大小相同.以 $\boldsymbol{x}$ 为自变量,$\boldsymbol{x}_{c_3}$ 为中心,在满足下式要求的前提下:

$$|\overrightarrow{\boldsymbol{x}_{c_3}\boldsymbol{x}}| \leqslant \frac{1}{2}|\overrightarrow{\boldsymbol{y}_{c_2}\boldsymbol{x}_{c_3}}| \tag{26}$$

且由球谐函数 R 和 S 的固有传递性质

$$\overline{S_{n,m}(\overrightarrow{\boldsymbol{y}_{c_2}\boldsymbol{x}})} = \sum_{n'=0}^{\infty}\sum_{m'=-n'}^{n'} (-1)^{n'} R_{n',m'}(\overrightarrow{\boldsymbol{x}_{c_3}\boldsymbol{x}}) \cdot \overline{S_{n+n',m+m'}(\overrightarrow{\boldsymbol{y}_{c_2}\boldsymbol{x}_{c_3}})} \tag{27}$$

经推导可将式(19)演变为如下标准的双重求和形式:

$$U_j(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{8\pi\mu}\sum_{n'=0}^{\infty}\sum_{m'=-n'}^{n'} F^{\mathrm{R}}_{ij,n',m'}(\overrightarrow{\boldsymbol{x}_{c_3}\boldsymbol{x}}) L'_{i,n',m'}(\boldsymbol{x}_{c_3}) + \frac{1}{8\pi\mu}\sum_{n'=0}^{\infty}\sum_{m'=-n'}^{n'} G^{\mathrm{R}}_{i,n',m'}(\overrightarrow{\boldsymbol{x}_{c_3}\boldsymbol{x}}) L^2_{ij,n',m'}(\boldsymbol{x}_{c_3}) \tag{28}$$

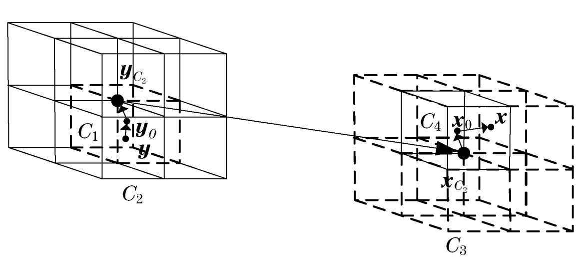


图3 展开与传递示意图

Fig.3 The schematic diagram of the expansion and translation

其中

$$L^1_{i,n,m}(\boldsymbol{x}_{c_3}) = \sum_{n'=0}^{\infty}\sum_{m'=-n'}^{n'} (-1)^n \overline{S_{n+n',m+m'}(\overrightarrow{\boldsymbol{y}_{c_2}\boldsymbol{x}_{c_3}})} \cdot M^1_{i,n',m'}(\boldsymbol{y}_{c_2}) \tag{29}$$

$$L^2_{ij,n,m}(\boldsymbol{x}_{c_3}) = \sum_{n'=0}^{\infty}\sum_{m'=-n'}^{n'} (-1)^n \overline{S_{n+n',m+m'}(\overrightarrow{\boldsymbol{y}_{c_2}\boldsymbol{x}_{c_3}})} \cdot [M^2_{ij,n',m'}(\boldsymbol{y}_{c_2}) - (\overrightarrow{\boldsymbol{y}_{c_2}\boldsymbol{x}_{c_3}})_j M^1_{i,n',m'}(\boldsymbol{y}_{c_2})] \tag{30}$$

$L^1_{i,n,m}(\boldsymbol{x}_{c_3})$ 和 $L^2_{ij,n,m}(\boldsymbol{x}_{c_3})$ 称为局部展开系数或局部矩.通过多极展开系数向局部展开系数的传递,把远离 $\boldsymbol{x}$ 点的立方体 C_2 的多极展开系数传递到了包含 $\boldsymbol{x}$ 的立方体 C_3 的局部展开系数.

2.4 局部展开系数的转移(L2L)

新老局部展开系数之间同样具有传递关系.为能达到快速收敛,要求

$$|\overrightarrow{\boldsymbol{x}_0\boldsymbol{x}}| \leqslant \frac{1}{2}|\overrightarrow{\boldsymbol{y}_{c_2}\boldsymbol{x}_0}| \tag{31}$$

可采用与多极展开中关于平移的相同推导方式,可得

$$L^1_{i,n,m}(\boldsymbol{x}_0) = \sum_{n'=n}^{\infty}\sum_{m'=-n'}^{n'} R_{n'-n,m'-m}(\overrightarrow{\boldsymbol{x}_{c_3}\boldsymbol{x}_0}) \cdot L^1_{i,n',m'}(\boldsymbol{x}_{c_3}) \tag{32}$$

$$L^2_{ij,n,m}(\boldsymbol{x}_0) = \sum_{n'=n}^{\infty}\sum_{m'=-n'}^{n'} R_{n'-n,m'-m}(\overrightarrow{\boldsymbol{x}_{c_3}\boldsymbol{x}_0}) \cdot [L^2_{ij,n',m'}(\boldsymbol{x}_{c_3}) - (\overrightarrow{\boldsymbol{x}_{c_3}\boldsymbol{x}_0})_j \cdot L^1_{i,n',m'}(\boldsymbol{x}_{c_3})] \tag{33}$$

以 $\boldsymbol{x}_0$ 为中心的新的局部展开系数可以由 $\boldsymbol{x}_{c_3}$ 为中心的老的局部展开系数经传递计算得到.通过局部展开系数的传递,把父立方体的局部展开系数传递到其所包含的子立方体的局部展开系数.

3 数值算例

3.1 算例1

分析承受均匀法向内压的厚球壳,其内半径 $R_1 = 100$ mm,外半径 $R_2 = 200$ mm,内压 $p_{\mathrm{n}} = 10$ MPa,弹性模量 $E = 200$ GPa,泊松比 $\nu = 0.3$.圆筒外侧虚、实边界间的距离为100 mm,内侧为50 mm.分别采用直接迭代法和快速多极虚边界元法求解(多极展开和局部展开的阶次均为20,迭代收敛的相对残差为 1×10^{-5}),进行了不同计算自由度数下的数值逼近分析,并与有限元法结果作了对比.

表1为外边界上任一点的径向位移 u_{r} 和径向平面上的切向正应力 σ_{T} 计算结果的对比.由表1可看出,上述两种算法都具有较高的计算精度,且随着配点的增加能很快地逼近解析解.

图4为在不同自由度数下分别采用两种算法所花费的时间对比.由图4可知,当自由度增大时,快速多极虚边界元法的计算时间与计算自由度约成线性关系.当计算自由度大于7 500时,随着计算自由度的增大,快速多极虚边界元法所花费的计算时间

远小于虚边界元直接迭代法.

表 1　径向平面上外边界的切向正应力与径向位移

Tab.1　Tangential stress on the sagittal plane and radial displacement at the external boundary

自由度数	u_r/mm		σ_T/MPa	
	虚边界元直接迭代	快速多极虚边界元	虚边界元直接迭代	快速多极虚边界元
972	150.062 5	149.985 4	2.142 802	2.142 809
1 512	150.030 3	149.990 0	2.142 811	2.142 818
6 012	150.019 1	149.992 3	2.142 826	2.142 837
13 512	150.004 8	149.998 7	2.142 841	2.142 849
24 012	150.000 2	149.999 7	2.142 853	2.142 855
解析解	150.000 0		2.142 857	

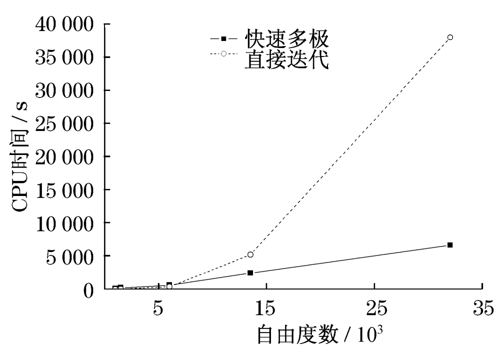


图 4　虚边界元直接迭代法和快速多极虚边界元法计算时间对比

Fig.4　Comparison of computing time of VBEM with direct iteration with one of fast multipole VBEM

由表 2 可知,欲达到相同计算精度,有限元法的计算自由度数远大于本文方法.

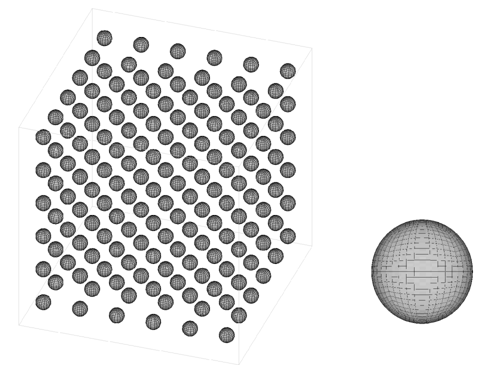
表 2　外边界上的径向位移

Tab.2　Radial displacement at the external boundary

虚边界元自由度数	快速多极虚边界元 u_r/mm	有限元法自由度数	有限元法 u_r/mm
972	149.985 4	2 718	138.209 2
1 512	149.990 0	5 148	140.908 4
6 012	149.992 3	6 174	142.071 6
13 512	149.998 7	9 960	145.431 3
24 012	149.999 7	12 450	147.693 5
		20 916	148.098 7
		31 356	149.344 1
		41 796	149.781 8
		52 236	149.984 7
解析解	150.000 0		

3.2　算例 2

图 5 为含多孔洞的立方体,在上、下两面作用有均匀压力 $p = 10$ MPa,立方体边长 300 mm,弹性模量 $E = 200$ GPa,泊松比 $\nu = 0.3$. 下面讨论两种孔洞分布情况.



a　　b

图 5　立方体内多球形孔洞边界单元网格图

Fig.5　Mesh for boundary of multi-spheres in cube

(1) 含 6×6×6 个规则分布的球形孔洞阵列,每个孔洞的半径为 10 mm;其分别沿坐标轴 3 个方向,以间距为 50 mm 均匀分布. 对每个孔洞边界采用四边形等参元划分,根据划分精细程度不同,可将单个球体表面按照一定细分方式分别从 10 个单元增加至 1 000 个单元. 当单个球体划分成 1 000 个单元时,其自由度为 3 006,此时整个结构的自由度达到 658 014. 由图 6,7 可知,快速多极虚边界元法在大规模自由度的计算中,其单步计算时间和总 CPU 时间均与自由度数约成线性关系,而且斜率明显较直接迭代求解要小得多. 在 100 000 自由度以上时,直接迭代的计算变得非常缓慢. 由此说明快速多极虚边界元法较直接迭代求解的计算效率有了非常明显的改善.

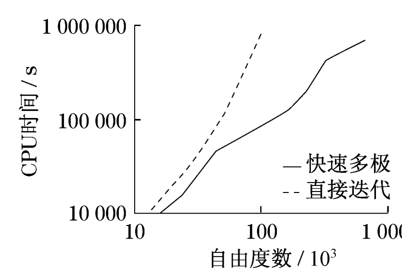


图 6　含多球形孔洞阵列的立方体计算效率

Fig.6　Performance curves for arrays of sphere cracks in cube

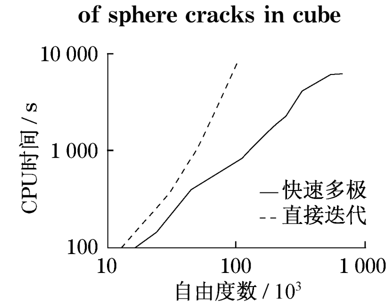
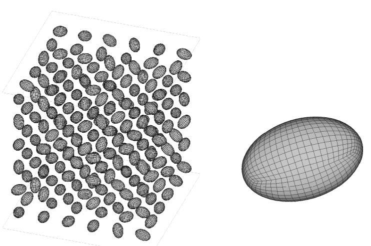


图 7　含多球形孔洞阵列的立方体单步计算效率

Fig.7　Per performance curves for arrays of sphere cracks in cube

(2) 含6×6×6个随机指向的椭球形孔洞阵列，如图8所示，每个椭球孔洞的形心和第一种情况下的每个球形孔洞的形心位置相同.单个椭球三轴分别为，长轴半径15 mm，另两轴半径10 mm；长轴指向是随机的.对每个椭球孔洞的边界均以四边形等参元划分，其剖分单元的程度及其计算自由度数均与球形孔洞问题相同.

图8的计算结果及其对比分析见图9，10.相比于情况(1)，在相同自由度情况下，两种情况的CPU计算时间及单步迭代时间并无较大偏差.由此可见，即使处理不规则的复杂结构，快速多极虚边界元法同样具有高效性质，这也体现出本文方法解复杂问题具有较好的适应性.



a　　b

图8　立方体内多椭球形孔洞边界单元网格图

Fig.8　Mesh for boundary of multi-ellipsoids in cube

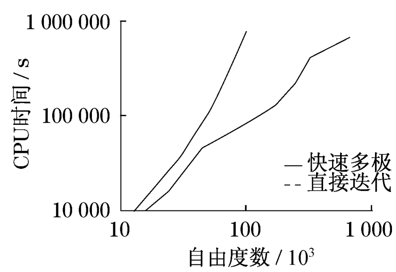


图9　含多椭球形孔洞阵列的立方体计算效率

Fig.9　Performance curves for arrays of ellipsoid cracks in cube

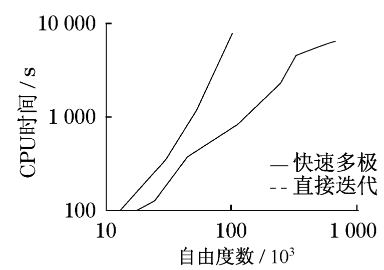


图10　含多椭球形孔洞阵列的立方体单步计算效率

Fig.10　Per performance curves for arrays of ellipsoid cracks in cub

4　结语

本文法无需处理奇异积分，不存在边界层效应，且具有较好的计算精度和效率.由本文的理论思想及其实施过程可知，本方法的计算机储存量和计算量均降到了 $O(N)$量级，充分展示了求解(数值模拟)大规模计算自由度问题的能力.方法的思想具有一般性，应用上具有扩展性.

虚边界元法也是一种具有半解析性质的数值方法，具有较高的计算精度.在同等计算精度的要求下，本文方法的计算自由度数远少于有限元法；而在同等计算自由度下，本文方法的计算精度又远高于有限元法.但是，在相同的计算自由度下，本文方法所花费的计算时间要大于有限元法；这是因为本文方法与边界元直接法一样，所形成的系数矩阵是满阵而非稀疏阵.倘若引入最小二乘的思路来建立虚边界元法的求解方程，则可形成对称的系数矩阵，从而能进一步提高计算效率.综上所述，对于一个给定的问题，本文方法的计算精度高于有限元法.而计算效率则涉及到是否有同等计算精度的要求，故不具有统一性评价.

参考文献：

[1]　孙焕纯，张立州，许强，等.无奇异边界元法[M].大连：大连理工大学出版社，1999.
SUN Huanchun，ZHANG Lizhou，XU Qiang，et al. Non-singularity boundary element methods[M]. Dalian：Dalian University of Technology Press，1999.

[2]　许强，孙焕纯.板弯曲问题三维虚边界元分析[J].工程力学学报，2000，17(3)：23.
XU Qiang，SUN Huanchun. Three-dimensional virtual boundary element analysis of plate bending[J]. Engineering Mechanics，2000，17(3)：23.

[3]　许强.薄壳问题的三维虚边界元解法[J].应用力学学报，2000，17(4)：111.
XU Qiang. Virtual boundary element method for three-dimensional problems of thin shell[J]. Applied Mathematics and Mechanics，2000，17(4)：111.

[4]　许强，蒋彦涛，张志佳.随机分布圆孔板有效弹性模量快速多极虚边界元法模拟[J].同济大学学报：自然科学版，2009，37(6)：755.
XU Qiang，JIANG Yantao，ZHANG Zhijia. Simulation of effective elastic moduli of plate with randomly distributed holes based on fast multipole virtual boundary element method[J]. Journal of Tongji University：Natural Science，2009，37(6)：755.

[5]　Greengard L，Rokhlin V. A fast algorithm for particle simulations[J]. Comput Phys，1987，73(2)：325.

[6]　Rokhlin V. Rapid solution of integeral equations of classical potential theory[J]. Comput Phys，1985，60(2)：187.

[7]　Greengard L Rokhlin V. A new version of the fast multipole method for the laplace equation in three dimensions[J]. Acta Numerical，1997，6：229.

[8]　Cheng H，Greengard L. A fast adaptive multipole algorithm in three dimensions[J]. Comput Phys，1999，155：468.