第 39 卷第 12 期 同 济 大 学 学 报(自 然 科 学 版) Vol.39 No.12
2011 年 12 月 JOURNAL OF TONGJI UNIVERSITY(NATURAL SCIENCE) Dec.2011

文章编号:0253-374X(2011)12-1880-03 DOI:10.3969/j.issn.0253-374x.2011.12.028

标准 C^*-代数间保持一类正元比较关系的映射

方小春[1], 赵 冬[1], 徐小明[1,2]

(1.同济大学 数学系,上海 200092; 2.上海应用技术学院 理学院,上海 201418)

摘要:假设 H 是一个复 Hilbert 空间,A_H是 H 上的一个标准 C^*-代数,A_{H_+} 是 A_H中所有正元构成的集合.1977 年,Cuntz 引入了 C^*-代数中正元的比较关系.设 A 是一个 C^*-代数,任给 $A,B\in A_+$,若存在 $X\in A_+$,使得 $A=XBX^*$,则记 $A\leqslant B$.文章刻画了定义在 A_{H_+} 上的所有双边保持此关系的弱连续半线性满射.

关键词:标准 C^*-代数; 比较关系; 保持映射

中图分类号:O 177.1 **文献标识码**:A

Mapping on Standard C^*-algebras Preserving Comparison for Positive Elements

FANG Xiaochun[1], *ZHAO Dong*[1], *XU Xiaoming*[1,2]

(1.Department of Mathematics,Tongji University,Shanghai 200092,China; 2. Shanghai Insititule of Technology,School of Science,Shanghai 201418,China)

Abstract: Let H be a complex Hilbert space,A_H the standard C^*-algebra on H,and A_{H_+} the set of all positive elements in A_H.In 1977,Cuntz introduced a comparison in the set of all positive elements in a C^*-algebra.Let A be a C^*-algebra.For $A,B\in A_+$,we write $A\leqslant B$ if there exists an element $X\in A$ such that $A=XBX^*$.In this paper,we characterize all weakly continuous semilinear surjective maps on A_{H_+} which preserves the positive elements comparison in both directions.

Key words: standard C^*-algebras; comparison relation; preserving mapping

1 结果陈述

假设 H 是一个复 Hilbert 空间,$B(H)$是 H 上所有有界线性算子构成的代数,$F(H)$是 $B(H)$中所有有限秩算子构成的理想,$F(H)_+$ 是 $F(H)$中所有正元构成的集合.任给算子 $T\in B(H)$,分别用 T^*,$R(T)$表示 T 的伴随算子和值域.

设 A_H是$B(H)$的一个 C^*-子代数,如果 A_H包含$F(H)$和单位元 I,则称 A_H是 H 上的一个标准 C^*-代数.将 A_H中所有正元构成的集合记作A_{H_+}.

定义 1[1,2] 设 $A,B\in A_{H_+}$.若存在 $X\in A_H$,使得

$$A = XBX^*$$

则记 $A\leqslant B$.

若 $A\leqslant B$ 且 $B\leqslant A$,则称 A 等价于 B,此时记作 $A\approx B$.

容易证明,$\approx$是A_{H_+} 中的一个等价关系,它推广了 Murray-von Neumann 在 C^*-代数中定义的投影等价关系.任给 $A\in A_{H_+}$,用$\langle A\rangle$表示 A 在A_{H_+} 中关系$\approx$的等价类.

定义 2 设 ϕ 是A_{H_+} 上的一个映射.若 ϕ 具有可加性且对任给的 $\lambda\in R_+$ 和 $A\in A_{H_+}$ 都满足 $\phi(\lambda A)=\lambda\phi(A)$,则称 ϕ 是一个半线性映射.任给一个网$\{A_i\}$,如果$\{A_i\}$按弱算子拓扑收敛于 A,那么 $\phi(A_i)$也按弱算子拓扑收敛于 $\phi(A)$,则称 ϕ 是一个弱连续映射.

若映射 $\phi:A_{H_+}\to A_{H_+}$ 满足对任给的 $A,B\in A_{H_+}$,如果 $A\leqslant B$,那么 $\phi(A)\leqslant\phi(B)$,则称 ϕ 是一个保持比较关系$\leqslant$的映射.若 ϕ 满足$\phi(A)\leqslant\phi(B)$当且仅当 $A\leqslant B$,则称 ϕ 是一个双边保持比较关系$\leqslant$的映射.近些年来,很多学者对算子保持问题做了很深入的研究[3-8].本文讨论 A_{H_+} 中比较关系$\leqslant$的双边保持问题.

本文的主要结果如下.

定理 1 设 $\phi:A_{H_+}\to A_{H_+}$ 是一个弱连续半线性

收稿日期:2010-09-27

基金项目:国家自然科学基金(10771161)

第一作者:方小春(1966—),男,教授,博士生导师,理学博士,主要研究方向为算子代数与泛函分析.E-mail:xfang@tongji.edu.cn

通讯作者:赵 冬(1985—),男,硕士生,主要研究方向为算子代数与泛函分析.E-mail:sdzd2004@163.com

满射.如果存在可逆元 $M\in B(H)$,使得对任意的 $A\in A_{H_+}$,都有 $\phi(A)=MAM^*$,则 ϕ 是一个双边保持比较关系$\leqslant$的映射.

定理 2　设 $\phi:A_{H_+}\to A_{H_+}$ 是一个弱连续半线性满射.如果 ϕ 双边保持比较关系$\leqslant$,则

(1) 任给 $A,B\in A_{H_+}$,$A\approx B\Leftrightarrow\phi(A)\approx\phi(B)$.

(2) 任给 $A\in F(H)_+$,$\mathrm{rank}(\phi(A))=\mathrm{rank}(A)$.

根据定理 1,很容易得到下述推论.

推论 1　设 $\phi:B(H)_+\to B(H)_+$ 是一个弱连续半线性满射.如果 ϕ 双边保持比较关系$\leqslant$,则

(1)任给 $A,B\in B(H)_+$,$A\approx B\Leftrightarrow\phi(A)\approx\phi(B)$.

(2)任给 $A\in F(H)_+$,$\mathrm{rank}(\phi(A))=\mathrm{rank}(A)$.

2　定理的证明

定理 1 的证明　设 $A,B\in A_{H_+}$.如果 $A\leqslant B$,根据定义 1,则存在 $X\in A_H$,使得 $A=XBX^*$.所以

$$\begin{aligned}\phi(A)&=MAM^*=\\ &MXBX^*M^*=\\ &MXM^*(MM^*)^{-1}MBM^*(MM^*)^{-1}MX^*M^*=\\ &MXM^*(MM^*)^{-1}\phi(B)(MM^*)^{-1}MX^*M^*=\\ &MXM^*(MM^*)^{-1}\phi(B)(MXM^*(MM^*)^{-1})^*.\end{aligned}$$

因为 $MM^*=\phi(I)\in A_{H_+}$,MM^* 在 $B(H)$中可逆,所以$(MM^*)^{-1}\in A_{H_+}$.因为 A_H是由A_{H_+}线性张成的且 $MA_{H_+}M^*=\phi(A_{H_+})=A_{H_+}$,所以 $MXM^*\in A_H$,故 $MXM^*(MM^*)^{-1}\in A_H$.根据定义 1,有$\phi(A)\leqslant\phi(B)$.

反之,设 $A,B\in A_{H_+}$.如果 $\phi(A)\leqslant\phi(B)$,根据定义 1,则存在 $X\in A_H$,使得 $\phi(A)=X\phi(B)X^*$.所以

$$\begin{aligned}A&=M^{-1}\phi(A)M^{*-1}=\\ &M^{-1}X\phi(B)X^*M^{*-1}=\\ &M^{-1}XMBM^*X^*M^{*-1}=\\ &(M^{-1}XM^{*-1})(M^{-1}M^{*-1})^{-1}B(M^{-1}M^{*-1})^{-1}\cdot\\ &(M^{-1}X^*M^{*-1})=(M^{-1}XM^{*-1})(M^{-1}M^{*-1})^{-1}B\cdot\\ &((M^{-1}XM^{*-1})(M^{-1}M^{*-1})^{-1})^*.\end{aligned}$$

因为 ϕ 是 A_{H_+}上的满射,所以 $M^{-1}A_{H_+}M^{*-1}=M^{-1}\phi(A_{H_+})M^{*-1}=A_{H_+}$.故 $M^{-1}XM^{*-1}\in A_H$.又因为 $M^{-1}M^{*-1}=M^{-1}IM^{*-1}\in A_{H_+}$,所以$(M^{-1}\cdot M^{*-1})^{-1}\in A_{H_+}$.从而$(M^{-1}XM^{*-1})(M^{-1}M^{*-1})^{-1}\in A_H$.根据定义 1,有 $A\leqslant B$.

为了证明定理 2,首先给出几个引理.

引理 1　设 $A,B\in A_{H_+}$且 $A\leqslant B$.若 $\dim R(B)<\infty$,则 $\dim R(A)<\infty$.

证明　不妨假设 $\dim R(B)=k<\infty$.由于 $A\leqslant B$,根据定义 1,则存在 $X\in A_H$,使得 $A=XBX^*$,故 $\dim R(A)\leqslant\dim R(B)=k<\infty$.

引理 2　设 $A,B\in A_{H_+}$.若 $\dim R(A)<\infty$或 $\dim R(B)<\infty$,则 $A\leqslant B$ 当且仅当 $\dim R(A)\leqslant\dim R(B)$.

证明　先证充分性.不失一般性,不妨假设 $\dim R(A)=k<\infty$,H_1 是$\overline{R(B)}$的一个 k 维子空间,其中$\overline{R(B)}$表示$R(B)$的闭包.因为$\overline{R(B^{\frac12})}=\overline{R(B^{\frac12}B^{\frac12})}=\overline{R(B)}$,所以$H_1$ 也是$\overline{R(B^{\frac12})}$的一个 k 维子空间,故 $\dim R(P_{H_1}B^{\frac12})=k$,其中 P_{H_1}表示到H_1上的正交投影.又因为 $\overline{R(P_{H_1}BP_{H_1})}=\overline{R((P_{H_1}B^{\frac12})(P_{H_1}B^{\frac12})^*)}=\overline{R(P_{H_1}B^{\frac12})}$,所以 $\dim R(P_{H_1}BP_{H_1})=k=\dim R(P_{H_1}B^{\frac12})$,因此存在可逆元 $U\in B(H)$,使得 $A=U(P_{H_1}BP_{H_1})U^*$.令 $X=UP_{H_1}$,显然 $A=XBX^*$.考虑到 U 是一个可逆元,故$X\in A_H$.根据定义 1,有 $A\leqslant B$.

再证必要性.由于 $A\leqslant B$,根据定义 1,存在 $X\in A_H$,使得 $A=XBX^*$,故 $\dim R(A)\leqslant\dim R(B)$.

引理 2 揭示了有限秩正算子的秩与比较关系$\leqslant$之间的一些联系.根据引理 2,得到如下推论.

推论 2　设 $A\in A_{H_+}$.下列命题等价.

(1) $\dim R(A)=k$.

(2) 任给 $X\in A_{H_+}$,若 $\dim R(X)=k$,则 $A\approx X$.

(3) 存在 $X\in A_{H_+}$,若 $\dim R(X)=k$,则 $A\approx X$.

命题 1　设 $\phi:A_{H_+}\to A_{H_+}$ 是一个半线性满射.如果 ϕ 双边保持比较关系$\leqslant$,则:

(1) 任给 $A,B\in F(H)_+$,$A\approx B\Leftrightarrow\phi(A)\approx\phi(B)$.

(2) 任给 $A\in F(H)_+$,$\mathrm{rank}(\phi(A))=\mathrm{rank}(A)$.

证明　(1)因为 ϕ 双边保持比较关系$\leqslant$,所以对任给的 $A,B\in F(H)_+$,$A\leqslant B\Leftrightarrow\phi(A)\leqslant\phi(B)$.容易验证对任给的 $A,B\in F(H)_+$,$A\approx B\Leftrightarrow\phi(A)\approx\phi(B)$.

(2) 只需证明(1)$\Rightarrow$(2).设任给 $A,B\in F(H)_+$,$A\approx B\Leftrightarrow\phi(A)\approx\phi(B)$.给定自然数 k,将 $F(H)_+$中所有 k 秩算子构成的集合记作$F_k(H)_+$.证明对任给的自然数 k 和 $A\in F_k(H)_+$,$\mathrm{rank}(\phi(A))=\mathrm{rank}(A)$.

当 $k=0$ 时,只需证明 $\phi(0)=0$.因为 ϕ 是半线性映射,所以 $\phi(0)=\phi(0+0)=\phi(0)+\phi(0)=2\phi(0)$,故 $\phi(0)=0$.

假设对任给自然数 $k\leqslant m$ 和 $A\in F_k(H)_+$,

$\mathrm{rank}(\phi(A))=\mathrm{rank}(A)$. 下面证明当 $A\in F_{m+1}(H)_+$ 时, $\mathrm{rank}(\phi(A))=\mathrm{rank}(A)$. 用反证法,假设当 $A\in F_{m+1}(H)_+$ 时, $\mathrm{rank}(\phi(A))\neq m+1$,分两种情况来讨论:

1) 若 $\mathrm{rank}(\phi(A))<m+1$,即 $\mathrm{rank}(\phi(A))\leqslant m$,根据假设有 $\mathrm{rank}(\phi(\phi(A)))=\mathrm{rank}(\phi(A))$. 应用推论 2,有 $\phi(\phi(A))\approx\phi(A)$. 故 $A\approx\phi(A)$. 根据推论 2, $m+1=\mathrm{rank}(A)=\mathrm{rank}(\phi(A))<m+1$. 显然,矛盾.

2) 若 $\mathrm{rank}(\phi(A))>m+1$,证明 ϕ 的像不包含 $m+1$ 秩算子. 若 $k<m+1$ 且 $B\in F_k(H)_+$,根据假设,有 $\mathrm{rank}(\phi(B))=\mathrm{rank}(B)<m+1$. 若 $k=m+1$ 且 $B\in F_k(H)_+$,根据推论 2,有 $B\approx A$. 故 $\phi(B)\approx\phi(A)$,从而 $\mathrm{rank}(\phi(B))=\mathrm{rank}(\phi(A))>m+1$. 若 $k>m+1$ 且 $B\in F_k(H)_+$,则存在正交集合 $\{e_1,\cdots,e_k\}(e_i\in H,i=1,\cdots,k)$,使得 $B=\sum_{i=1}^{k}e_i\otimes e_i$ 且 $\mathrm{rank}(\sum_{i=1}^{m+1}e_i\otimes e_i)=m+1$,应用 $k=m+1$ 时的结论,有 $\mathrm{rank}(\phi(\sum_{i=1}^{m+1}e_i\otimes e_i))>m+1$. 因为 ϕ 是半线性映射,所以 $\phi(B)=\phi(\sum_{i=1}^{k}e_i\otimes e_i)=\phi(\sum_{i=1}^{m+1}e_i\otimes e_i)+\phi(\sum_{i=m+2}^{k}e_i\otimes e_i)$. 因此 $\mathrm{rank}(\phi(B))\geqslant\mathrm{rank}(\phi(\sum_{i=1}^{m+1}e_i\otimes e_i))>m+1$. 这样证明了 ϕ 的像不包含 $m+1$ 秩算子. 这与 ϕ 是满射矛盾.

现在证明定理 2.

定理 2 的证明

(1) 因为 ϕ 双边保持比较关系 $\leqslant$,所以对任给的 $A,B\in A_{H_+}$, $A\leqslant B\Leftrightarrow\phi(A)\leqslant\phi(B)$. 则容易验证对任给的 $A,B\in A_{H_+}$, $A\approx B\Leftrightarrow\phi(A)\approx\phi(B)$.

(2) 因为 ϕ 是弱连续的,根据结论(1)和命题 1 及其证明过程,显然结论(2)成立.

参考文献:

[1] Cuntz J. The structure of multiplication and addition in simple C^*-algebras[J]. Math Scand, 1977, 40: 215.

[2] Cuntz J. Dimension functions on simple C^*-algebras[J]. Math Ann, 1978, 233(2): 145.

[3] Bell J, Sourour A R. Additive rank-one preserving mappings on triangular matrix algebras[J]. Linear Algebra Appl, 2000, 312(1/3): 13.

[4] Clark S, Li C K, Mahle J, et al. Linear preservers of higher rank numerical ranges and radius[J]. Linear and Multilinear Algebra, 2009, 57(5): 503.

[5] Dolinar G, Molnár L. Maps on quantum observables preserving the Gudder order[J]. Rep Math Phys, 2007, 60(1): 159.

[6] Hou J C. Rank preserving linear maps on B(X)[J]. Sci in China (ser. A), 1989, 32(15): 929.

[7] Li C K, Rodman L. Preservers of spectral radius, numerical radius, or spectral norm of the sum on non negative matrices[J]. Linear Algebra Appl, 2009, 430(7): 1739.

[8] Zhang X L, Hou J C, He K. Maps preserving numerical radius and cross norms of operator products[J]. Linear and Multilinear Algebra, 2009, 57(5): 523.

(上接第 1879 页)

$\hat{\boldsymbol{u}}(t)=\arg\min_{\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}\leqslant 1}\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}$. 这样就得到一个最优控制

$$\hat{\boldsymbol{u}}(t)=-\left(\frac{1}{\sqrt{\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{c}}}\right)\boldsymbol{c}=-\frac{1}{\sqrt{5}}(1,2)^{\mathrm{T}},\forall\, t\in[0,1]$$

由原问题的控制系统得到相应的最优轨道为

$$\hat{\boldsymbol{x}}(t)=-\frac{\boldsymbol{c}}{\sqrt{\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{c}}}t=-\frac{1}{\sqrt{5}}(t,2t)^{\mathrm{T}}$$

从而由命题 1 的证明可知, $\hat{\boldsymbol{x}}(1)=\left(-\frac{1}{\sqrt{5}},-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^{\mathrm{T}}$ 是凹函数全局优化问题(13)的最优解.

4 一个注记

对于本文所讨论的问题,人们一般是用数值方法处理的. 通常直接求得最优解非常困难. 通过引入 Krotov 沿拓法,在构造辅助函数这一环节施展数学技巧,有望给出更多的凹函数全局优化问题的最优解,比如 $P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$,可试将偶次项和奇次项分离开来讨论,写成 $P(x)=P_1(x)+xP_2(x)$ 的形式,而这是通过寻求最优控制的解析表达式来实现的.

参考文献:

[1] ZHU Jinghao, TAO Shiming, GAO David. A study on concave optimization via canonical dual function [J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2009, 224(2): 459.

[2] Krotov V F. Global methods in optimal control theory[M]. New York: Marcel Dekker, 1996.

[3] Gurman V I. The extension principle in control problems — constructive methods and applied problems [M]. Moscow: [s. n.], 2005.