

圆形基础的临界荷载和形状系数

楼晓明¹, 朱克宏², 朱亚娟³

(1. 同济大学 地下建筑与工程系, 上海 200092; 2. 中铁二十四局集团有限公司, 上海 200070;

3. 上海港湾软地基处理有限公司, 上海 200092)

摘要: 基于圆形荷载下地基中任意一点应力分量的弹性力学公式和 Mohr-Coulomb 极限平衡理论计算出最大塑性区深度达到 1/4 基础直径对应的临界荷载. 通过圆形与条形基础临界荷载的比较, 进一步得到了圆形基础界限荷载的承载力系数和形状系数. 将这些形状系数与已有的各种极限荷载形状系数进行比较, 发现与黏聚力和埋深有关的形状系数略小于极限荷载中的数值, 与基础宽度有关的形状系数与极限荷载中的数值差距较大, 建议按偏小的 Meyerhof 形状系数取值. 算例表明: 圆形基础临界荷载相对于极限承载力的安全系数与条形基础界限承载力相对于极限承载力的安全系数大致是匹配的.

关键词: 圆形基础; 临界荷载; 极限承载力; 形状系数

中图分类号: Tu 470⁺. 3

文献标识码: A

Critical Load and Shape Factors of Circular Foundations

LOU Xiaoming¹, ZHU Kehong², ZHU Yajuan³

(1. Geotechnical Engineering Department, Tongji University, Shanghai 200092, China; 2. China Railway 24 Bureau Group Co. Ltd., Shanghai 200070, China; 3. Shanghai Harbour Soil Treatment Engineering Co. Ltd., Shanghai 200092, China)

Abstract: According to Mohr Coulumb Criterion and the elastic theory for circular distribution pressure, the critical bearing capacity can be determined, which is the pressure when the maximums depth in plastic zone is upto one fourth of the diameter. Based on a comparison with strip foundation, the critical bearing capacity factors and shape factors are presented. The shape factors of the critical bearing capacity for circular foundation are compared with those of several ultimate bearing capacity. Similarity is found for the shape factors in relation with cohesion and embedded depth of foundation, but inconsistency is found for the shape factor in relation with width of foundation, which is advised to adopt Meyerhof's shape factor for safety. The safety factor of the ultimate capacity divided by the critical one for circular

foundation is consistent with that for strip foundation.

Key words: circular foundation; critical load; ultimate bearing capacity; shape factors

用理论公式计算地基承载力的方法有两大类, 一类称为界限荷载公式, 另一类称为极限荷载公式.

通过限制塑性区范围的界限荷载公式, 自前苏联 20 世纪 50 年代的地基规范采用以后我国的地基规范至今一直采用. 我国建筑地基基础设计规范一直推荐条形荷载下地基承载力的理论公式 $p_{1/4}$ (临界荷载)、 p_{cr} (临塑荷载) 作为地基承载力的特征值或容许值^[1-2], 临塑荷载与临界荷载统称界限荷载或界限承载力.

在实际工程中, 矩形、圆形的独立基础更为常见, 静载试验也通常采用方形、圆形的载荷板. 将平面应变条件下推导的 $p_{1/4}$ 、 p_{cr} 用于矩形或圆形的独立基础虽然是偏安全的, 但当这种差异较大时, 也就意味着地基承载力还有较大的潜力, 不可忽视.

根据刚塑性力学推导的极限荷载公式, Terzaghi, Meyerhof, Hansen, Vesic 通过形状修正系数将条形基础极限荷载公式各组成部分进行逐项修正, 可用于矩形、圆形基础的承载力计算^[3]. 上海地基基础设计规范 1999 年、2010 年版均推荐了用 Hansen 极限承载力公式计算地基承载力设计值的方法, 粘聚力和内摩擦分别除以不同的分项系数作为安全储备, 采纳了其基础形状修正系数^[4]. 修正方法对于圆形基础在假定刚塑性的前提下有复杂的轴对称解^[5]; 对于矩形基础, 由于在数学上求解困难很大, 多是根据各种形状基础所做的对比载荷试验得到的^[3, 6]. 周中等假定主动朗金区、过度区、被动朗金区为圆锥或环锥面, 推导了圆形地基与粘聚力、基础埋深相关的极限承载力理论解, 经多种土性指标验

算,结果与 Vesic 半经验解接近;与基础宽度或土体重度相关的极限承载力项直接采用 Vesic 半经验解^[7]. 应永法等用非线性有限元分析了圆形板几何尺寸、刚度、埋深、边界条件对基础沉降、塑性区、极限承载力的影响,未讨论圆形基础的形状影响^[8].

我国长期采用基于界限荷载的条形基础承载力公式,总体上还缺乏采用地基极限承载力及安全系数取值的经验. 对于界限荷载公式,则没有考虑基础形状方面的理论与经验:界限荷载中是否应考虑基础形状系数? 如要考虑,与极限承载力公式中的基础形状系数是否相同?

本文根据平面应变条件下推导 $p_{1/4}$, p_{cr} 的相同思路建立圆形基础的界限荷载公式及基础形状系数,并与极限荷载公式中的形状系数比较,为确定圆形基础形状系数提供依据. 这虽然是一个经典土力学问题,鉴于我国现在、将来需要大量修建各种油罐、筒仓,完善圆形基础的承载力理论及更好地了解圆形基础的承载机理具有重要现实意义.

1 圆形基础的界限荷载与形状系数

1.1 圆形荷载作用下地基任意点的附加应力

根据弹性力学空间轴对称问题的基本解法可知,在半径为 R 的圆形均布垂直荷载 q 作用下,弹性半空间体内距离圆心水平距离为 r 、深度为 z 处的 4 个应力分量表达式如下^[9]:

$$\begin{cases} \sigma_r = -q \int_0^\infty \left(1 - \frac{z}{R}x\right) e^{-\frac{r}{R}x} J_1(x) J_0\left(\frac{r}{R}x\right) \cdot \\ \quad dx + \frac{qR}{r} U \\ \sigma_\theta = -2\mu q \int_0^\infty e^{-\frac{r}{R}x} J_1(x) J_0\left(\frac{r}{R}x\right) dx - \frac{qR}{r} U \\ \sigma_z = -q \int_0^\infty \left(1 + \frac{z}{R}x\right) e^{-\frac{r}{R}x} J_1(x) J_0\left(\frac{r}{R}x\right) dx \\ \tau_{rz} = -\frac{qz}{R} \int_0^\infty e^{-\frac{r}{R}x} J_1(x) J_1\left(\frac{r}{R}x\right) dx \end{cases} \quad (1)$$

式中: σ 为正应力; $U = \int_0^\infty \left(1 - 2\mu - \frac{z}{R}x\right) e^{-\frac{r}{R}x} \cdot J_1(x) J_1\left(\frac{r}{R}x\right) dx$; μ 为泊松比; J_0 , J_1 分别为零阶及一阶 Bessel 函数; τ_{rz} 为剪应力.

本文根据公式(1)采用 MATLAB 软件编程计算出圆形荷载下地基中任意点的附加应力数值解.

1.2 圆形基础下地基中塑性区的计算

考虑基础埋深 D 和地基土的自重应力,圆形均布垂直荷载 q 作用下,地基中任意点的总应力为

$$\begin{cases} \sigma_{zz} = \sigma_z + \gamma_0 D + \gamma z \\ \sigma_{rr} = \sigma_r + K(\gamma_0 D + \gamma z) \\ \sigma_{\theta\theta} = \sigma_\theta + K(\gamma_0 D + \gamma z) \end{cases} \quad (2)$$

式中: γ_0 为基底以上土体重度; γ 为基底以下土体重度; K 为地基土静止侧压力系数,为了与条形荷载比较,本文计算时假定 $K=1$, $\mu=0.5$.

求得主应力 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ 后,根据 Mohr-Coulomb 极限平衡理论可判断土体的某点是否满足极限平衡状态. 当某点正好达到该状态时,大小主应力满足

$$\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) = \left[c \operatorname{ctg} \varphi + \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3) \right] \sin \varphi \quad (3)$$

式中, c, φ 分别为土的粘聚力和内摩擦角. 令

$$\beta = \frac{(\sigma_1 - \sigma_3)/2}{\sin \varphi [c \operatorname{ctg} \varphi + (\sigma_1 + \sigma_3)/2]} \quad (4)$$

由土体中一点达到极限平衡状态时的摩尔圆可知,当土体中一点正好达到极限平衡时 $\beta=1$; 当 $\beta>1$ 时,土体已经处于塑性破坏状态;当 $\beta<1$ 时,土体正好处于弹性状态. 连接地基内所有 $\beta=1$ 的点,即可得到地基的塑性区开展情况.

1.3 圆形基础界限荷载与形状系数的表达

根据塑性区的容许深度可得地基土的容许承载力. 为了便于与条形基础的界限荷载比较,本文仍按照塑性区开展深度 $z_{\max} = d/4$ 求圆形基础地基相应的临界荷载 $p_{1/4}$,其中 d 为圆形荷载直径. 条形基础的临界荷载 $p_{1/4}$ 和临塑荷载 p_{cr} 采用式(5)计算:

$$\begin{cases} p_{1/4} = \gamma B N_\gamma + \gamma_0 D N_q + c N_c \\ p_{cr} = \gamma_0 D N_q + c N_c \end{cases} \quad (5)$$

式中: B 为条形基础宽度; N_γ, N_q, N_c 为条形荷载的承载力系数,是 φ 的函数. 圆形基础的临界荷载 $p_{1/4}$ 和临塑荷载 p_{cr} 采用相似的计算公式.

$$\begin{cases} p_{1/4} = \gamma(2R) N'_\gamma + \gamma_0 D N'_q + c N'_c \\ p_{cr} = \gamma_0 D N'_q + c N'_c \end{cases} \quad (6)$$

式中: N'_γ, N'_q, N'_c 为圆形基础的界限承载力系数.

在地基极限承载力理论中,圆形基础的承载力通常通过修正条形基础承载力形状系数后得到.

令 $s_\gamma = N'_\gamma / N_\gamma, s_c = N'_c / N_c, s_q = N'_q / N_q, s_\gamma, s_c, s_q$ 即为圆形基础界限荷载系数 N_γ, N_c, N_q 的形状系数. 圆形基础 $p_{1/4}$ 和 p_{cr} 计算公式相应改写为

$$\begin{cases} p_{1/4} = s_\gamma \gamma(2R) N_\gamma + s_q \gamma_0 D N_q + s_c c N_c \\ p_{cr} = s_q \gamma_0 D N_q + s_c c N_c \end{cases} \quad (7)$$

2 圆形基础界限荷载的形状系数计算

2.1 N_γ 项的圆形基础形状系数 s_γ

假定地基土 $K=1, \mu=0.5$, 式(6)中 $D=0, c=$

0,此时圆形荷载的界限荷载 $p_{1/4} = \gamma(2R)N'_\gamma$. 假定一基础直径,改变计算荷载,塑性区最大深度为 $d/4$ 时的荷载是 $p_{1/4}$,根据上述公式可以算出这一基础的 N'_γ ;改变荷载半径和土重度等参数重新进行计算,发现 N'_γ 不随这些参数变化而变化.

假定条形荷载宽度与圆形荷载直径相等,图 1 列出了条形荷载及圆形荷载的承载力系数随内摩擦角的变化情况. 根据图 1 可以算出圆形荷载的形状系数 $s_\gamma = N'_\gamma/N_\gamma$,如图 2a 所示. 通过曲线拟合,可以得到形状系数的表达式

$$s_\gamma = \begin{cases} 0.0026\varphi^2 - 0.0075\varphi + 1.2024 & 0 \leq \varphi \leq 21^\circ \\ -0.0308\varphi + 2.8000 & 21^\circ < \varphi \leq 30^\circ \end{cases} \quad (8)$$

图 1 条形、圆形基础临界荷载系数 N_γ

Fig.1 Factors N_γ of critical load of circular and strip foundation

由图 1 可见,当土的内摩擦角增大时, N'_γ 随之增大,说明地基的承载力提高. 同时从图 2a 可以看出,当摩擦角小于 21° 时,形状系数随土的内摩擦角增大而不断增大;当超过 21° 时,形状系数开始下降,这主要是由于此时圆形荷载的计算承载力系数随内摩擦角的增长趋势变得平缓一些了.

2.2 N_c 项的圆形基础形状系数 s_c

令 $\gamma=0, D=0$ (不考虑土重),可类似进行 N_c 与 N'_c 的比较. 图 2b 反应了圆形和条形基础承载力系数比 N'_c/N_c ,即 s_c 的变化趋势. 通过图 2b 对圆形基础的形状系数进行拟合,可得如下表达式:

$$s_c = 0.0002\varphi^2 + 0.0023\varphi + 1.1144 \quad (9)$$

由式(9)可见,当土的内摩擦角增大时, s_c 随之增大,说明地基的承载力不断提高. 改变 c 值进行计算,可以发现 s_c 不随 c 值变化而变化;改变 R 值进行计算, s_c 也不随 R 值变化而变化.

2.3 N_q 项的圆形基础形状系数 s_q

令 $c=0, N'_\gamma$ 为已知,改变其他参数分析 N'_q 的变化. 图 2c 为圆形荷载与条形荷载承载力系数比 N'_q/N_q 即 s_q 的计算与拟合对比曲线,可知

$$s_q = 0.0005\varphi^2 + 0.0034\varphi + 1.0234 \quad (10)$$

从图 2c 可以看出,当土的内摩擦角增大时,圆形基础形状系数不断增大. 改变 D 值,土体重度 γ 及荷载半径无明显变化.

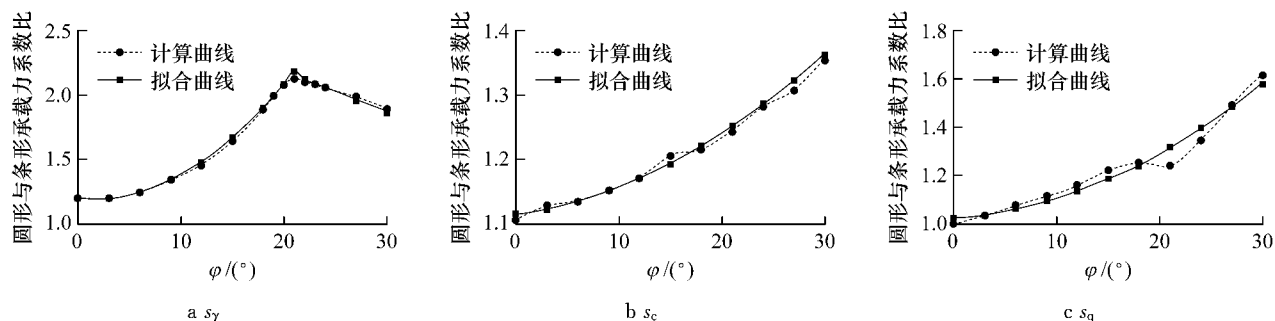


图 2 圆形基础临界荷载形状系数

Fig.2 Shape factors of critical load of circular foundations

3 圆形基础界限与极限荷载的形状系数比较

在地基极限承载力的各种理论公式中,有不少公式涉及了基础形状系数^[3],对于圆形基础,相关系数的取值方法统一列于表 1,其中 K_p 为被动土压力系数. 鉴于界限承载力与极限承载力的区别主要体

现在承载力系数 N_γ, N_q, N_c 中,在此将本文的基础形状系数与各极限承载力的基础形状系数进行比较,周中等的理论解^[7]与 Vesic 半经验解接近,不再进行单独比较.

由图 3a 为各公式形状系数 s_c 随内摩擦角变化的情况,可知,本文形状系数的变化趋势与 Meyerhof, Hansen, Vesic 的相同,但总体数值偏低一些.

表 1 圆形基础形状系数
Tab.1 Shape factors of circular foundations

形状系数	Terzaghi	Meyerhof	Hansen	Vesic	圆形基础界限荷载形状系数的计算值
s_γ	0.3	$1, \varphi=0$ $1+0.2K_p, \varphi>10^\circ$	0.6	0.6	$0.002\ 6\varphi^2-0.007\ 5\varphi+1.202\ 4, \varphi\leq 21^\circ$ $-0.030\ 8\varphi+2.800\ 0, 21^\circ<\varphi\leq 30^\circ$
s_c	1.2	$1+0.2K_p$	$1+N_q/N_c$	$1+N_q/N_c$	$0.000\ 2\varphi^2-0.002\ 3\varphi+1.114\ 4$
s_q	1.0	$1, \varphi=0$ $1+0.2K_p, \varphi>10^\circ$	$1+\sin \varphi$	$1+\tan \varphi$	$0.000\ 5\varphi^2-0.003\ 4\varphi+1.023\ 4$

图 3b 为各公式形状系数 s_q 随内摩擦角变化的情况,可知,内摩擦角较小时本文形状系数的变化趋势与 Hansen, Vesic 的接近,但总体数值偏低一些;内摩擦角较大时本文形状系数的变化趋势与 Meyerhof, Vesic 的接近.

由图 3c 为本文公式与 Meyerhof 形状系数 s_r 随

内摩擦角变化的情况,可知,内摩擦角在 $10^\circ\sim 30^\circ$ 范围时 s_γ 随内摩擦角变化差别较大.同时根据表 1,只有本文公式与 Meyerhof 形状系数 s_r 大于 1,其他均小于 1. Terzaghi 公式的形状系数相对其他公式均较小.

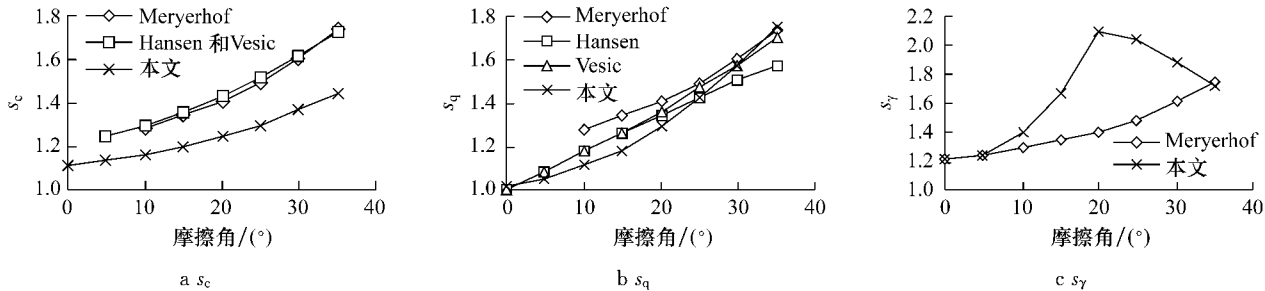


图 3 临界荷载与极限荷载的形状系数比较

Fig.3 Comparison of shape factors between critical and ultimate load

综合以上比较结果,本文根据理论计算得到的圆形基础形状系数 s_c, s_q 与已有成果较为接近, s_γ 则相差较大,建议实际使用取偏小的 Meyerhof 形状系数 s_γ . 由于极限承载力中的形状系数都是根据各种形状基础所作的载荷模型对比试验得到,这也某种程度上证明了本文计算方法的合理性.

4 算例分析

为了确保计算界限承载力的准确性,先将计算得到的圆形荷载下地基的应力等值线的对称性条件、竖向应力与文献[10]中已有的结果进行检验.

某工程为粉质粘土地基,已知土的重度为 $18.8\text{ kN}\cdot\text{m}^{-3}$,粘聚力 $c=16\text{ kPa}$,摩擦角 $\varphi=14^\circ$,基础埋深 1.2 m ,静载试验的荷载-沉降($p-s$)曲线见图 4,根据 $s/b=0.010\sim 0.015$ 的相对变形指标承载力特征值为 $124\sim 150\text{ kPa}$,其中 b 为荷载板宽度.

根据条形基础公式,临界荷载为 126.5 kPa ,如表 2 所示,与条形基础 Prandle 极限荷载比较,安全系数为 2.21. 根据圆形基础公式,临界荷载为 154.4

kPa ,如表 2 所示,与圆形基础极限荷载比较,安全系数为 $2.24\sim 2.49$. 可见,本文得到的圆形基础临界荷载相对于极限承载力的安全系数与条形基础临界荷载相对于极限承载力的安全系数大致是匹配的.

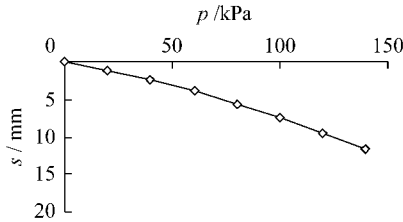


图 4 载荷板静载试验的 $p-s$ 曲线

Fig.4 $p-s$ curve of plate-bearing test

5 结论与讨论

根据理论计算得到的圆形基础临界荷载形状系数 s_c, s_q 与极限承载力的有关成果较为接近, s_γ 则相差较大,为安全起见,建议实际使用取偏小的 Meyerhof 形状系数 s_γ . 由于极限承载力中的形状系数根据各种形状基础所作的载荷模型对比试验得

到,这也某种程度上证明了本文计算方法的合理性。

表2 条形基础与圆形基础临界荷载的安全系数

Tab.2 Safety factors of critical bearing capacity of strip and circular foundations

基础	极限荷载计算公式	极限荷载 /kPa	安全系数 ¹⁾
条形	Prandtle	279.8	2.21
	Terzaghi	384.4	2.49
圆形	Meyerhof	371.5	2.41
	Hansen	346.0	2.24
	Vesic	346.5	2.24

注:1) 安全系数等于极限荷载除以界限荷载。

圆形基础临界荷载相对于极限承载力的安全系数与条形基础界限承载力相对于极限承载力的安全系数大致匹配,这说明对于圆形基础采用临界荷载作为设计使用荷载安全度是有保证的。

圆形基础形状系数 s_c, s_q, s_γ 均随内摩擦角的增大而增大,因此,对于土性较好的圆形基础,如果采用圆形基础承载力公式设计而不是条形基础,可更多地利用地基承载力,节省工程造价。

本文得到的圆形基础临界荷载公式(7)可以考虑以基底标高为界的简单双层地基情况。对于基底以下的多层地基,实用上可采用 Hansen 加权平均法^[11],将最深塑性区 $d/4$ 内不同土层的重度、粘聚力和内摩擦角按厚度加权平均,然后将这些平均值代入公式计算。这表明该公式只能反映最深塑性区以内土层的作用。

若最深塑性区以下($z > d/4$)有软弱下卧层,软弱下卧层会改变上层土的应力分布,软弱层也可能是塑性区,临界荷载计算时应予以考虑。令基底与软弱下卧层顶面间的持力层厚度为 h ,最新的上海地基基础设计规范规定:当 $0.25 \leq h/d \leq 0.70$ 时,粘聚力和内摩擦角按 2 层土的平均值计算;只有当 $h/d > 0.70$ 时,可不考虑软弱下卧层的影响^[4]。

采用多层弹性体系的有关解答,按照相似的思路也可以得到相应的临界荷载数值;但由于变量增加很多,要得到简洁的计算公式、计算系数表达形式困难会非常大。

本文在推导圆形基础临界荷载公式时,为了方便与条形基础比较,采用了相同的理想化假定模式,例如:地基土 $K=1$,出现塑性区后仍然用弹性力学计算土中应力。由此带来的局限性《土力学》教科书中均有论述,本文不再复述。

参考文献:

- [1] 中华人民共和国建设部. GB50007—2002 建筑地基基础规范[S]. 北京:中国建筑工业出版社,2002.
Ministry of Construction of the People's Republic of China. GB 50007—2002 National standard of the peoples republic of china [S]. Beijing: China Architecture and Building Press,2002.
- [2] 上海市城乡建设交通委员会. DBJ08-11—1989 地基基础设计规范[S]. 上海:[s. n.],1989.
Shanghai Municipal Commission of City Development and Transport DBJ08-11—1989 Shanghai engineering code: foundation design code[S]. Shanghai: [s. n.], 1989.
- [3] Manjriker Gunaratne. The foundation engineering handbook [M]. Boca Raton: CRC Press,2006.
- [4] 上海市城乡建设交通委员会. DGJ08-11—2010 地基基础设计规范[S]. 上海:[s. n.],2010.
Shanghai Municipal Commission of City Development and Transport. DGJ08-11—2010 Foundation design code [S]. Shanghai:[s. n.],2010.
- [5] 温特科恩,方晓阳. 基础工程手册[M]. 钱鸿缙,叶书麟,译. 北京:中国建筑工业出版社,1983.
Winterkorn H F, Fang Asaiyang. The foundation engineering handbook [M]. Translated by QIAN Hongjin, YE Shulin. Beijing: China Architecture and Building Press,1983.
- [6] 黄绍铭,高大钊. 软土地基与地下工程[M]. 北京:中国建筑工业出版社,2005.
HUANG Shaoming, GAO Dazhao. Foundation and underground engineering in soft ground [M]. Beijing: China Architecture and Building Press, 2005.
- [7] 周中,傅鹤林,李亮. 圆形浅基础地基承载力的理论解[J]. 长沙铁道学院学报,2002,20(3):12.
ZHOU Zhong, FU Helin, LI Liang. Theoretical solution of bearing capacity of shallow circular foundation[J]. Journal of Changsha Railway University, 2002, 20(3):12.
- [8] 应永法,泮威风. 圆形基础板下地基强度与变形非线性性状研究[J]. 岩土力学,2002,23(2):250.
YING Yongfa, PAN Weifeng. Nonlinear finite element analysis of strength and settlement of soft soil foundation under circular plank[J]. Rock and Soil Mechanics, 2002, 23(2):250.
- [9] 顿志林,高家美. 弹性力学及其在岩土工程中的应用[M]. 北京:煤炭工业出版社,2003.
DUN Zhilin, GAO Jiamei. Elasticity and its application in geotechnical engineering [M]. Beijing: Coal Industry Press, 2003.
- [10] 高大钊. 土力学与基础工程[M]. 北京:中国建筑工业出版社,1998.
GAO Dazhao. Soil mechanics and foundation engineering[M]. Beijing: China Architecture and Building Press, 1998.
- [11] 袁凡凡,闫谢旺,孙万禾. 关于成层土地基极限承载力的计算方法[J]. 水利学报,2001,32(3):41.
YUAN Fanfan, YAN Shuwang, SUN Wanhe. Methods for estimating the ultimate bearing capacity of layered foundations [J]. Journal of Hydraulic Engineering, 2001,32(3):41.