

具有任意梯度分布函数的梯度板的三维热弹性

刘五祥

(同济大学 航空航天与力学学院, 上海 200092)

摘要: 研究任意梯度分布函数的功能梯度板的三维热弹性问题. 从正交各项异性功能梯度材料板热弹性力学的基本方程出发, 假设材料参数沿板厚方向的梯度分布函数是任意的, 基于状态空间法, 获得了板在上下表面作用热/机荷载时的 Peano-Baker 级数解. 通过数值算例, 研究了级数解的收敛性以及不同的材料梯度分布对板位移、应力和温度场的影响.

关键词: 功能梯度板; 三维热弹性; Peano-Baker 级数; 状态空间法

中图分类号: O345

文献标识码: A

Three-dimensional Thermoelastic Analysis on Functionally Graded Plates with Arbitrary Graded Distribution Functions

LIU Wuxiang

(College of Aerospace Engineering and Applied Mechanics, Tongji University, Shanghai 200092, China)

Abstract: A three-dimensional thermoelastic analysis on functionally graded plates with arbitrary graded distributions is conducted. From the basic equation of thermoelasticity for the orthotropic functionally graded material plates, assuming the distribution functions of the plate thickness are arbitrary, the Peano-Baker series solution is obtained when the plate is subject to thermal and mechanical loads on its top and bottom surface based on the state space method. Through numerical examples, the convergence of the present series solution is investigated; the effects of different material gradient distributions on displacement, stress and temperature of the plate are also discussed in detail.

Key words: functionally graded plate; three-dimensional thermoelasticity; Peano-Baker series; state space method

功能梯度材料(FGM)是一种近期发展的新型复合材料,其材料特性是位置坐标的函数,通常由两

种或多种介质材料沿空间某一方向或几个方向按不同组分进行复合,形成材料功能的梯度分布,从而满足不同部位对材料使用性能的不同要求;同时,由于该种材料及其结构中个组分呈连续变化,不存在明显的界面及性能的突变,因此具有优于一般层叠型功能梯度材料的特性. 这种将性能各异的材料按照设计要求在结构内部非均匀连续合成的新型材料将功能材料的研制带入了材料设计的更高层次^[1].

功能梯度材料由于其特殊的材料特性,在航空航天、能源工业、电子工业、化学工业、光学工程和生物医学工程等重要领域得到了广泛的应用与发展. 因此,对其研究的学者和工程师也越来越多. Noda 和 Tsuji^[2]研究了材料特性与温度有关的功能梯度板的稳态热应力问题. Eslami 等人^[3]对于一维功能梯度空心厚球体的稳态热/机应力问题提出了一种通解. Shao 和 Ma^[4]在施加机械荷载和线性增加的边界温度的条件下,对功能梯度空心圆柱进行了热/力耦合分析. Reddy 和 Chin^[5]求解了热荷载作用下,功能梯度轴对称圆柱体的热传导和热弹性方程. Bayat 等人^[6]在假设材料参数沿板厚方向变化时,对于轴对称弯曲并施加稳态热荷载的功能梯度圆盘,利用一阶剪切变形和 von Kármán 理论,提出了一组新的适用于小变形和大变形的平衡方程. Ruhi 等人^[7]对于有限长度功能梯度厚壁圆筒,导出了半解析的热弹性解. Kordkheili 和 Naghdabadi^[8]在平面应力情况下,提出了轴对称功能梯度圆盘和圆环的半解析热弹性解. 伍晓红和沈亚鹏^[9]利用幂级数展开法,假定材料参数沿板厚方向为线性分布时,对有限长矩形压电功能梯度板的自由振动问题进行了分析. 陈伟球等人^[10]基于分层模型,利用状态空间法对矩形厚板进行了三维热弹性分析. 虽然研究功能梯度材料的学者很多,但大多是采用特定的材料分布形式,不足以反映实际的材料属性,而对于任意梯

收稿日期: 2010-11-24

基金项目: 国家自然科学基金青年基金(11102136)

作者简介: 刘五祥(1976—),男,讲师,工学博士,主要研究方向为新型材料的力学行为. E-mail: wxliu@tongji.edu.cn

度分布的情况,也有相关的研究工作^[1,11-12],但其数学推导和求解过程比较复杂,不易应用。

提出了一种新的求解方法,获得了三维功能梯度弹性板的 Peano-Baker 级数解。通过算例,验证了此级数解的正确性,同时也分析了材料参数沿板厚方向为正弦函数分布时,不同的材料梯度参数对板结构响应的影响。利用该方法,作者已对三维功能梯度板进行了求解和分析^[13],获得了较好的结果。本文考虑热/机耦合,对功能梯度板结构进行更深入的研究。

1 问题的描述与基本方程

图1为一均匀厚度为 h 的正交各向异性功能梯度矩形板。引入笛卡尔坐标系 $\{x_i\}$ ($i=1,2,3$),假设板的上下表面未变形时分别位于平面 $x_3=h$ 和 $x_3=0$,在 x_1 和 x_2 方向的边长分别为 a 和 b 。

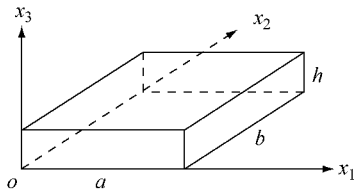


图1 矩形板示意图

Fig.1 A schematic of the rectangular plate

在缺少体力和热产生的情况下,力学和热学平衡方程分别为

$$\sigma_{ij,j} = 0 \quad h_{i,i} = 0 \quad (1)$$

式中: σ_{ij} 是应力张量; h_i 为热流矢量。

各向异性热弹性材料的本构方程为

$$k_{11}^0 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_1^2} + k_{22}^0 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_2^2} + k_{33}^0 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_3^2} + k_{33}^0 \frac{F'(x_3)}{F(x_3)} \frac{\partial \theta}{\partial x_3} = 0 \quad (7)$$

式中: $k_{11}^0, k_{22}^0, k_{33}^0$ 是 $x_3=0$ 处的热传导系数; $F'(x_3) = dF(x_3)/dx_3$. 将 θ 展开成

$$\theta = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \theta_{nm}(x_3) \sin \frac{m\pi x_1}{a} \sin \frac{n\pi x_2}{b} \quad (8)$$

它自动满足 $x_1=0, a, x_2=0, b$ 处的热力学边界条件 $\theta=0$ 。

将式(8)代入式(7)可得

$$\theta_{nm}''(x_3) + \frac{F'(x_3)}{F(x_3)} \theta_{nm}'(x_3) - \left(\frac{m^2 \pi^2}{a^2} \frac{k_{11}^0}{k_{33}^0} + \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \frac{k_{22}^0}{k_{33}^0} \right) \theta_{nm}(x_3) = 0 \quad (9)$$

式中: $\theta_{nm}' = d\theta/dx_3$; $\theta_{nm}'' = d^2\theta/dx_3^2$ 。

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl} \epsilon_{kl} - \beta_{ij} \theta \quad h_i = -k_{ij} \theta_{,j} \quad (2)$$

式中: θ 为温度增量; ϵ_{kl} 为应变张量; 材料参数 c_{ijkl}, β_{ij} 和 k_{ij} 分别为弹性常数, 热模量和热传导系数。假设上述所有材料参数均沿厚度方向按同一函数规律变化, 即

$$K = F(x_3) K^0 \quad (3)$$

式中: K 代表各种材料常数; K^0 是相应材料常数在 $x_3=0$ 处的值; $F(x_3)$ 是关于厚度坐标 x_3 的任意函数, 且有 $F(0)=1$ 。

对于一个四边简支恒温的矩形板, 其四边的边界条件为

$$\begin{aligned} \sigma_{11} = u_2 = u_3 = \theta = 0 \quad x_1 = 0 \text{ 和 } a \text{ 处} \\ \sigma_{22} = u_1 = u_3 = \theta = 0 \quad x_2 = 0 \text{ 和 } b \text{ 处} \end{aligned} \quad (4)$$

上下表面的边界条件为

在 $x_3=0$ (下表面) 处

$$\begin{aligned} \sigma_{13} = X^-(x_1, x_2) \quad \sigma_{23} = Y^-(x_1, x_2) \\ \sigma_{33} = Z^-(x_1, x_2) \quad \theta = \theta^-(x_1, x_2) \end{aligned} \quad (5)$$

在 $x_3=h$ (上表面) 处

$$\begin{aligned} \sigma_{13} = X^+(x_1, x_2) \quad \sigma_{23} = Y^+(x_1, x_2) \\ \sigma_{33} = Z^+(x_1, x_2) \quad \theta = \theta^+(x_1, x_2) \end{aligned} \quad (6)$$

根据热学平衡方程 $h_{i,i}=0$ 和本构方程 $h_i = -k_{ij} \theta_{,j}$, 可由热学边界条件单独求出温度场 θ , 再联立 $\sigma_{ij,j}=0, \sigma_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl} - \beta_{ij} \theta$, 在力学边界条件下, 就可确定板中的位移场和力场。

2 温度场的求解

由于热传导系数符合式(3)的函数规律变化, 因此 $h_{i,i}=0$ 和 $h_i = -k_{ij} \theta_{,j}$ 可改写为

利用状态空间法, 式(9)可以化为式(10)来求解

$$\frac{d\mathbf{N}_{nm}}{dx_3} = \mathbf{A}_{nm} \mathbf{N}_{nm} \quad (10)$$

这里 $\mathbf{N}_{nm} = [\theta_{nm} \quad \theta_{nm}']^T$

$$\mathbf{A}_{nm} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{k_{11}^0}{k_{33}^0} \frac{m^2 \pi^2}{a^2} + \frac{k_{22}^0}{k_{33}^0} \frac{n^2 \pi^2}{b^2} & -\frac{F'(x_3)}{F(x_3)} \end{bmatrix}$$

矩阵微分方程(10)的通解为^[14]

$$\mathbf{N}_{nm}(x_3) = \mathbf{P}(x_3) \mathbf{N}_{nm}(0) \quad (11)$$

式中, $\mathbf{P}(x_3)$ 为变系数矩阵方程(10)的转移矩阵, 可以写成关于矩阵 \mathbf{A}_{nm} 的 Peano-Baker 级数形式^[15], 即

$$\mathbf{P}(x_3) = \mathbf{I} + \int_0^{x_3} \mathbf{A}_{nm}(\tau) d\tau + \int_0^{x_3} \mathbf{A}_{nm}(\tau_1) d\tau_1 \int_0^{\tau_1} \mathbf{A}_{nm}(\tau_2) d\tau_2 + \int_0^{x_3} \mathbf{A}_{nm}(\tau_1) d\tau_1 \int_0^{\tau_1} \mathbf{A}_{nm}(\tau_2) d\tau_2 \int_0^{\tau_2} \mathbf{A}_{nm}(\tau_3) d\tau_3 + \dots \quad (12)$$

式中, \mathbf{I} 是与 \mathbf{A}_{nm} 相同维数的单位矩阵. 注意: Peano-Baker 级数中的多重可积分矩阵 \mathbf{A}_{nm} 的各元素在各自的积分区间的闭区间上是有界的. 下面应力-位移场的求解与此相同.

由式(11)知道, 只要求得 $\mathbf{N}_{nm}(0), \mathbf{N}_{nm}(x_3)$ 就确定了. 由热力学边界条件(5)和(6), 可以得到

$$\theta_{nm}(h) = \theta_{nm}^+ \quad \theta_{nm}(0) = \theta_{nm}^- \quad (13)$$

由式(11)可以得到

$$\mathbf{N}_{nm}(h) = \mathbf{P}(h)\mathbf{N}_{nm}(0) \quad (14)$$

将式(13)代入式(14)即可以求得 $\theta'_{nm}(h)$ 和 $\theta'_{nm}(0)$, 至此, 就求得了 $\mathbf{N}_{nm}(0)$. 由于式(10)的解是式(11) $\mathbf{N}_{nm}(x_3)$ 的第一个分量, 从而式(10)的解为

$$\theta_{nm}(x_3) = [1 \quad 0] \times \mathbf{N}_{nm}(x_3) = [1 \quad 0] \times \mathbf{P}(x_3) \times \mathbf{N}_{nm}(0) \quad (15)$$

将式(15)代入式(8), 温度场就完全确定了.

3 应力-位移场的求解

由式 $b_{ij,j} = 0, b_{ij} = c_{ijkl}\varepsilon_{kl} - \beta_{ij}\theta$, 消去 $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}$

可得

$$\frac{\partial}{\partial x_3} \begin{bmatrix} \mathbf{II} \\ \mathbf{\Gamma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{A} \\ \mathbf{B} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{II} \\ \mathbf{\Gamma} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{H} \end{bmatrix} \theta \quad (16)$$

这里

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \sigma_{33} \end{bmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \begin{bmatrix} U_{nm}(x_3) \cos(m\pi x/a) \sin(n\pi y/b) \\ V_{nm}(x_3) \sin(m\pi x/a) \cos(n\pi y/b) \\ F(x_3) Z_{nm}(x_3) \sin(m\pi x/a) \sin(n\pi y/b) \end{bmatrix} \quad (17)$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \\ u_3 \end{bmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \begin{bmatrix} F(x_3) X_{nm}(x_3) \cos(m\pi x/a) \sin(n\pi y/b) \\ F(x_3) Y_{nm}(x_3) \sin(m\pi x/a) \cos(n\pi y/b) \\ W_{nm}(x_3) \sin(m\pi x/a) \sin(n\pi y/b) \end{bmatrix} \quad (18)$$

显然, 式(18)自动满足四边简支的边界条件(4). 将式(17), (18)和(8)代入式(16), 可得

$$\frac{\partial \mathbf{M}_{nm}}{\partial x_3} = \mathbf{K}_{nm} \mathbf{M}_{nm} + \mathbf{\Psi}_{nm} \theta_{nm} \quad (19)$$

这里

$$\mathbf{K}_{nm} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{nm}^1 & \mathbf{K}_{nm}^3 \\ \mathbf{K}_{nm}^4 & \mathbf{K}_{nm}^2 \end{bmatrix} \quad (20)$$

$$\mathbf{M}_{nm} = [U_{nm} \quad V_{nm} \quad Z_{nm} \quad X_{nm} \quad Y_{nm} \quad W_{nm}]^T$$

$$\mathbf{\Psi}_{nm} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \gamma_1^0 \frac{m\pi}{a} & \gamma_2^0 \frac{n\pi}{b} & \gamma_3^0 \end{bmatrix}^T$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} c_{1313}^{-1} & 0 & -\partial_1 \\ 0 & c_{2323}^{-1} & -\partial_2 \\ -\partial_1 & -\partial_2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} k_3 \partial_1^2 - c_{1212} \partial_2^2 & k_4 \partial_1 \partial_2 & -k_2 \partial_1 \\ k_4 \partial_1 \partial_2 & k_5 \partial_2^2 - c_{1212} \partial_1^2 & -k_1 \partial_2 \\ -k_2 \partial_1 & -k_1 \partial_2 & c_{3333}^{-1} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{II} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad \mathbf{\Gamma} = \begin{bmatrix} \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \\ u_3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} \gamma_1 \partial_1 \\ \gamma_2 \partial_2 \\ \gamma_3 \end{bmatrix}$$

式中

$$\partial_1 = \frac{\partial}{\partial x_1} \quad \partial_2 = \frac{\partial}{\partial x_2} \quad \partial_1^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2},$$

$$\partial_2^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \quad \partial_1 \partial_2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2}$$

$$k_1 = \frac{c_{2233}}{c_{3333}} \quad k_2 = \frac{c_{1133}}{c_{3333}}$$

$$k_3 = k_2 c_{1133} - c_{1111}$$

$$k_4 = k_2 c_{2233} - c_{1212} - c_{1122}$$

$$k_5 = k_1 c_{2233} - c_{1122} \quad \gamma_1 = \beta_{11} - k_2 \beta_{33}$$

$$\gamma_2 = \beta_{22} - k_1 \beta_{33} \quad \gamma_3 = \frac{\beta_{33}}{c_{3333}}$$

将各状态量按如下的双三角级数展开, 即

$$\mathbf{K}_{nm}^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{F'(x_3)}{F(x_3)} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{nm}^2 = \begin{bmatrix} -\frac{F'(x_3)}{F(x_3)} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{F'(x_3)}{F(x_3)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{nm}^3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{c_{1313}^0} & 0 & -\frac{m\pi}{a} \\ 0 & \frac{1}{c_{2323}^0} & -\frac{n\pi}{b} \\ \frac{m\pi}{a} & \frac{n\pi}{b} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{nm}^4 = \begin{bmatrix} -\left(k_3^0 \frac{m^2 \pi^2}{a^2} - c_{1212}^0 \frac{n^2 \pi^2}{b^2}\right) & -k_4^0 \frac{m\pi}{a} \frac{n\pi}{b} & -k_2^0 \frac{m\pi}{a} \\ -k_4^0 \frac{m\pi}{a} \frac{n\pi}{b} & -\left(k_5^0 \frac{n^2 \pi^2}{b^2} - c_{1212}^0 \frac{m^2 \pi^2}{a^2}\right) & -k_1^0 \frac{n\pi}{b} \\ k_2^0 \frac{m\pi}{a} & k_1^0 \frac{n\pi}{b} & \frac{1}{c_{3333}^0} \end{bmatrix}$$

式中

$$F'(x_3) = dF(x_3)/dx_3$$

$$k_1^0 = \frac{c_{2233}^0}{c_{3333}^0} \quad k_2^0 = \frac{c_{1133}^0}{c_{3333}^0}$$

$$k_3^0 = k_2 c_{1133}^0 - c_{1111}^0$$

$$k_4^0 = k_2^0 c_{2233}^0 - c_{1212}^0 - c_{1122}^0$$

$$k_5^0 = k_1^0 c_{2233}^0 - c_{1122}^0 \quad \gamma_1^0 = \beta_{11}^0 - k_2^0 \beta_{33}^0$$

$$\gamma_2^0 = \beta_{22}^0 - k_1^0 \beta_{33}^0 \quad \gamma_3^0 = \frac{\beta_{33}^0}{c_{3333}^0}$$

可以看出 \mathbf{K}_{nm} 是坐标 x_3 的函数, 上标为 0 的参数表示 $x_3=0$ 处的值. 因此, 式(19)是一阶线性变系数的非齐次矩阵微分方程, 它的通解为^[14]:

$$\mathbf{M}_{nm}(x_3) = \Phi(x_3, 0)\mathbf{M}_{nm}(0) + \int_0^{x_3} \Phi(x_3, \tau)\Psi_{nm}(\tau)\theta_{nm}(\tau)d\tau \quad (21)$$

式中, $\Phi(x_3, \tau)$ 为相应的齐次变系数状态方程的转移矩阵, 可写成关于矩阵 \mathbf{K}_{nm} 的 Peano-Baker 级数形式^[15], 即

$$\Phi(x_3, \tau) = \mathbf{I} + \int_{\tau}^{x_3} \mathbf{K}_{nm}(\tau)d\tau + \int_{\tau}^{x_3} \mathbf{K}_{nm}(\tau_1)d\tau_1 \int_{\tau}^{\tau_1} \mathbf{K}_{nm}(\tau_2)d\tau_2 + \int_{\tau}^{x_3} \mathbf{K}_{nm}(\tau_1)d\tau_1 \int_{\tau}^{\tau_1} \mathbf{K}_{nm}(\tau_2)d\tau_2 \int_{\tau}^{\tau_2} \mathbf{K}_{nm}(\tau_3)d\tau_3 + \dots \quad (22)$$

设 $\Delta(x_3) = \int_0^{x_3} \Phi(x_3, \tau)\Psi_{nm}(\tau)\theta_{nm}(\tau)d\tau$, 并将板厚值 h 代入式(21)中的未知量 x_3 , 则该式可以改写为

$$\mathbf{M}_{nm}(h) = \Phi(h, 0)\mathbf{M}_{nm}(0) + \Delta(h) \quad (23)$$

因此, 只要求得 $\mathbf{M}_{nm}(0)$, 便可以确定 $\mathbf{M}_{nm}(x_3)$.

将式(17)~(18)代入边界条件式(5)~(6), 并考虑将(5)、(6)中的 6 个力学边界条件作双三角级数展开, 可以得到 $X_{nm}(0), Y_{nm}(0), Z_{nm}(0)$ 和 $X_{nm}(h), Y_{nm}(h), Z_{nm}(h)$, 然后将这些值代入式(23)即可确定 $U_{nm}(0), V_{nm}(0), W_{nm}(0)$ 和 $W_{nm}(h), V_{nm}(h), U_{nm}(h)$. 至此, $\mathbf{M}_{nm}(0)$ 便求得了, 于是状态方程(19)的通解 $\mathbf{M}_{nm}(x_3)$ 已完全确定, 从而就可以求出功能梯度矩形弯曲板任意位置处的位移场和力场.

4 算例与分析

4.1 算例 1

$$T^+(x_1, x_2) = T_0 \sin(\pi x_1/a) \sin(\pi x_2/b) \text{ (取 } T_0 = 1 \text{ K)}$$

$$X^-(x_1, x_2) = X^+(x_1, x_2) = Y^-(x_1, x_2) = Y^+(x_1, x_2) = Z^-(x_1, x_2) = Z^+(x_1, x_2) =$$

$$\theta^-(x_1, x_2) = 0$$

为了验证本文级数解的正确性, 首先假设材料参数沿板厚方向为指数分布, 即

考虑一四边简支、温度恒定的正交各向异性热弹性功能梯度矩形板 ($a=b=1 \text{ m}, h/a=0.1$). 其材料常数在 $x_3=0$ 处的值取为文献[16]的相应数据, 即

$$c_{1111}^0 = c_{2222}^0 = 74.1 \text{ GPa}, \quad c_{3333}^0 = 39.3 \text{ GPa},$$

$$c_{1122}^0 = c_{2211}^0 = 45.2 \text{ GPa},$$

$$c_{1133}^0 = c_{3311}^0 = c_{2233}^0 = c_{3322}^0 = 39.3 \text{ GPa},$$

$$c_{2323}^0 = c_{1313}^0 = 13.2 \text{ GPa}, \quad c_{1212}^0 = 14.5 \text{ GPa},$$

$$\beta_{11}^0 = \beta_{22}^0 = 0.621 \times 10^6 \text{ N} \cdot \text{Km}^{-2},$$

$$\beta_{33}^0 = 0.551 \times 10^6 \text{ N} \cdot \text{Km}^{-2},$$

$$k_{11}^0/k_{33}^0 = k_{22}^0/k_{33}^0 = 2/3$$

由于施加机械荷载的的求解较简单, 这里只考虑热荷载作用的情况:

上表面作用正弦分布的温度增量, 下表面无温度变化且上下表面自由, 即

$$F(x_3) = e^{\alpha^* x_3/h}$$

式中, h 是板厚. 根据文献^[16]的方法可求得该问题的精确解. 表 1 给出了点 $(x_1/a = 0.25, x_2/b = 0.25, x_3/h = 0.25)$ 处, $\alpha = 1$ 时, 热荷载作用下精确解和本文级数解的比较.

从表 1 可以看出, 随着式(12)和(22)中, Peano-Baker 级数所取项数 N 的增加, 本文解能够很快收敛于精确解. 当 $N = 8$ 时, 与精确解的相对误差小于 5% (已满足一般工程的计算精度); 当 $N = 12$ 时, 本

文解已接近于精确解. 这表明本文所得到的 Peano-Baker 级数解具有良好的收敛性, 只要取较少的几项就可以满足计算精度的要求 (在后面的计算中取 $N = 8$).

4.2 算例 2

假设所有的材料参数沿板厚方向为如下的正弦函数分布:

$$F(x_3) = 1 + (\alpha - 1) \sin((x_3/h) \cdot (\pi/2))$$

表 1 本文解和精确解的比较

Tab.1 Comparison between the solution of this study and exact solution

物理量	精确解	$N=4$	$N=6$	$N=8$	$N=10$	$N=12$
$u_1/\times 10^{-7}$ m	-2.843 9	-3.853 4	-2.408 2	-2.830 5	-2.840 1	-2.843 9
$u_3/\times 10^{-6}$ m	2.496 7	1.177 6	2.984 7	2.511 5	2.496 9	2.496 7
$\sigma_{11}/\times 10^4$ Pa	-3.479 2	0.647 1	-4.881 7	-3.522 6	-3.493 2	-3.479 3
$\sigma_{33}/\times 10^2$ Pa	-1.167 4	-5.149 4	0.400 9	-1.119 2	-1.165 9	-1.167 4
$\sigma_{12}/\times 10^4$ Pa	-3.315 4	-4.492 2	-2.807 4	-3.299 8	-3.312 6	-3.315 4
$\sigma_{13}/\times 10^3$ Pa	-1.062 4	-5.970	0.820 6	-1.004 5	-1.061 1	-1.062 4
$\theta/\times 10^{-1}$ K	2.780 0	2.609 7	2.771 9	2.779 8	2.780 0	2.780 0

式中: α 是材料的梯度参数, 反映材料性质梯度变化的程度; h 是板的厚度.

图 2 给出了与算例 1 相同热荷载作用下, 当材

料梯度参数 $\alpha = 1/2, 1, 2$ 时, 板内 $x_1/a = 0.25, x_2/b = 0.25$ 处, 各场量沿板厚 x_3 方向的分布.

从图 2 可以看到: 板内的离面应力和面内应力

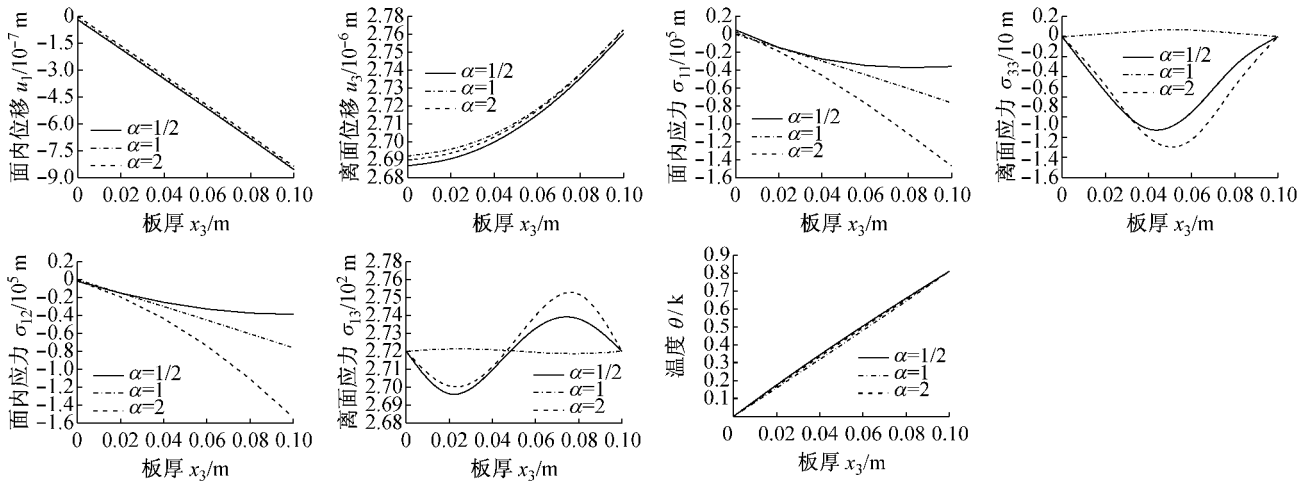


图 2 各物理量沿板厚方向的变化

Fig.2 Variation of physical quantities with coordinate x_3

相比是小量, 这与经典薄板理论所采用的 Kirchhoff 假设是一致的; 材料沿板厚为梯度分布 ($\alpha \neq 1$) 时, 温度荷载所引起的板内离面应力, 比均匀分布 ($\alpha = 1$) 所引起的离面应力大; 热荷载对不同材料梯度参数下的位移场和温度场的分布影响很小, 而对应力场的影响很大. 因此在功能梯度材料热弹性板的设计和制作过程中, 应充分考虑热弹性功能梯度材料的特点, 设计和制作出符合实际工程需求的梯度材料.

5 结语

提出了正交各向异性热弹性功能梯度板三维弯曲问题的 Peano-Baker 级数求解方法. 数值结果表明 Peano-Baker 级数解具有很好的收敛性. 本文方法具有理论推导简单、计算效率高等优点, 且适用于材料参数沿板厚方向任意梯度变化的情况.

参考文献:

- [1] 程红梅, 曹志远. 具有不同功能梯度分布函数的板件的三维分析[J]. 应用力学学报, 2006, 23:516.
CHENG Hongmei, CAO Ziyuan. Three-dimensional analysis to functionally graded plates with different graded distribution functions[J]. Chinese Journal of Applied Mechanics. 2006, 23: 516.
- [2] Noda N, Tsuji T. Steady thermal stresses in a plate of functionally gradient material with temperature-dependent properties[J]. Trans Jpn Soc Mech Eng Ser A, 1991, 57:625.
- [3] Eslami M R, Babaei M H, Poultangari R. Thermal and mechanical stresses in a functionally graded thick sphere[J]. Int J Press Vess Piping, 2005, 82:522.
- [4] Shao Z S, Ma G W. Thermo-mechanical stresses in functionally graded circular hollow cylinder with linearly increasing boundary temperature[J]. Compos Struct, 2008, 83(3):259.
- [5] Reddy J N, Chin C D. Thermomechanical analysis of functionally graded cylinders and plates[J]. J Therm Stresses, 1998, 21(6):593.
- [6] Bayat M, Saleem M, Sahari B B, et al. Thermo elastic analysis of functionally graded rotating disk with small and large deflections[J]. Thin-Walled Struct, 2007, 45:677.
- [7] Ruhi M, Angoshtari A, Naghdabadi R. Thermo elastic analysis of thick-walled finite-length cylinders of functionally graded materials[J]. J Therm Stresses, 2005, 28:391.
- [8] Kordkheili S A H, Naghdabadi R. Thermoelastic analysis of a functionally graded rotating disk[J]. Compos Struct, 2007, 79(4):508.
- [9] 伍晓红, 沈亚鹏. 压电功能梯度板自由振动的三维解[J]. 固体力学学报, 2003, 24(1):75.
WU Xiaohong, SHEN Yapeng. Three-dimensional solution for the free vibration of functionally gradient piezoelectric plates [J]. Acta Mechanica Solida Sinica. 2003, 24(1):75.
- [10] 陈伟球, 边祖光, 丁皓江. 功能梯度矩形厚板的三维热弹性分析[J]. 力学季刊, 2002, 23(4):443.
CHEN Weiqiu, BIAN Zuguang, DING Haojiang. Three-dimensional thermoelastic analysis of functionally graded rectangular thick plates[J]. Chinese Quarterly of Mechanics. 2002, 23(4):443.
- [11] Wang B L, Noda N. Thermal loaded functionally graded materials with embedded defects [J]. Journal of Thermal Stresses, 2003, 26(1):25.
- [12] ZHANG Chun, ZHONG Zheng. Three-dimensional analysis of functionally graded plate based on the haar wavelet method[J]. Acta Mechanica Solid Sinica, 2007, 20(2): 95.
- [13] LIU Wuxiang, ZHONG Zheng. Three-dimensional analysis of simply supported functionally graded plate with arbitrary distributed elastic modulus [J]. Tsinghua Science and Technology, 2009, 14(S2): 58.
- [14] 黄有度, 狄成恩, 朱士信. 矩阵论及其应用[M]. 合肥: 中国科学技术大学出版社, 1995.
HUANG Youdu, DI Cheng'en, Zhu Shixin. Theory of matrix with application [M]. Hefei: University of Science and Technology of China Press, 1995.
- [15] Dacunha J J. Transition matrix and generalized matrix exponential via the Peano-Baker series[J]. J Difference Equ Appl, 2005, 11 (15):1245.
- [16] 仲政, 尚尔涛. 功能梯度热释电材料矩形板的三维精确分析[J]. 力学学报, 2003, 35(5):542.
ZHONG Zheng, SHANG Ertao. Three dimensional exact analysis of functionally gradient piezothermoelectric material rectangular plate [J]. Acta Mechanica Sinica, 2003, 35(5): 542.