文章编号：0253-374X(2012)03-0491-04 DOI:10.3969/j.issn.0253-374x.2012.03.027

Finsler流形上取值于向量丛的调和形式

贺 群，吴方方
(同济大学 应用数学系，上海 200092)

摘要：通过定义Finsler流形上取值于向量丛 p－形式的整体内积和射影球丛纤维上的积分，得到相应的余微分算子. 进而定义Finsler流形上取值于向量丛 p－形式的Laplace算子，并证明它是自共轭的椭圆算子. 最后证明当目标流形是黎曼流形时，调和映射和取值于拉回切丛的调和1－形式之间的等价关系.

关键词：调和映射；余微分算子；Laplace算子；取值于向量丛的调和形式
中图分类号：O 186.16 **文献标识码**：A

Harmonic Forms with Values in Vector Bundle over Finsler Manifolds

HE Qun, *WU Fangfang*
(Department of Mathematics, Tongji University, Shanghai 200092, China)

Abstract: By defining the global inner product of p-forms with values in the vector bundle over a Finsler manifold and the integral on fibers of a projective sphere bundle, the corresponding codifferential operator is obtained. Then we define the Laplace operator of p-forms valued in the vector bundle over a Finsler manifold and prove that it is elliptic and self-conjugate. Particularly, when the target manifold is Riemannian, the equivalence between a harmonic map and a harmonic 1-form with values in the pull back tangent bundle is derived.

Key words: harmonic maps; codifferential operator; Laplace operator; harmonic forms with values in the vector bundle

整体微分几何和几何分析是现代数学的重要分支，调和映射理论又是整体微分几何和几何分析中的热门研究领域之一，不仅与偏微分方程、随机过程、李群与李代数、多复变函数等数学学科紧密相连，而且在理论物理、材料科学、经济学中都有广泛的应用. 调和映射是黎曼流形或者Finsler流形之间光滑映射能量泛函的临界点. 经过国内外几何学者相当长时期的努力，黎曼流形间的调和映射已经形成了完整的理论体系；而对于Finsler流形间的调和映射，由于原有方法已不适用，加之计算的复杂性，进展相对缓慢. 文献[1－2]给出了有关Finsler流形间调和映射的开创性成果.

Finsler流形的许多性质不仅与点有关，也与方向有关，所以对于其调和形式的研究，关键就是如何定义余微分算子及Laplace算子. 文献[3]运用Busemann-Hausdorff体积形式，定义了Finsler流形上的平均值Laplace算子，证明了平均值Laplace算子为零与能量泛函临界点的等价关系. 文献[4]则运用Holmes-Thompson体积形式，定义了Finsler流形上的Laplace算子，引入了调和函数的概念，证明了调和函数的确是能量泛函的临界点.

笔者运用Holmes-Thompson体积形式，通过定义Finsler流形上取值于向量丛的 p-形式的整体内积和射影球丛纤维上的积分，得到了相应的余微分算子的具体表达式. 类似文献[5]中黎曼流形上取值于向量丛 p-形式的Laplace算子的定义方式，定义了Finsler流形上取值于向量丛 p-形式的Laplace算子，并证明它是自共轭的椭圆算子. 最后证明当目标流形 $\widetilde{M}$ 是黎曼流形时，调和映射 ϕ 和取值于拉回切丛 $\phi^* T\widetilde{M}$ 的调和1-形式 $\mathrm{d}\phi$ 的等价关系.

1 预备知识

设 M 是 n 维光滑流形，$\pi: TM \to M$ 为自然投影. M 上的Finsler度量是一个函数 $F: TM \to [0,\infty)$，满足下列性质：① F 在 $TM\backslash 0$ 上是光滑的；② 对于任

收稿日期：2010－12－24
基金项目：国家自然科学基金(10971239)；上海市自然科学基金(09ZR1433000)
第一作者：贺 群(1962—)，女，教授，博士生导师，理学博士，主要研究方向为整体微分几何. E-mail: hequn@tongji.edu.cn
通讯作者：吴方方(1987—)，女，硕士生，主要研究方向为整体微分几何. E-mail: songijk@126.com

意 $\lambda>0$，$F(x,\lambda y)=\lambda F(x,y)$；③ 诱导的二阶张量 $\boldsymbol{g}$ 是正定的，其中

$$\boldsymbol{g}:=g_{ij}(x,y)\mathrm{d}x^i\otimes\mathrm{d}x^j,\ g_{ij}:=\frac{1}{2}[F^2]_{y^iy^j} \tag{1}$$

除特别声明外，本文使用下列指标：

$$1\leqslant i,j,\cdots\leqslant n;\quad 1\leqslant a,b,\cdots\leqslant n-1;$$
$$\bar{a}=n+a;\quad 1\leqslant\alpha,\beta,\cdots\leqslant m$$

投影 $\pi:SM\to M$ 给出了 π 在流形 SM 上的拉回切丛 π^*TM，它也是 $TM\backslash 0$ 上的拉回切丛，其对偶丛为 π^*T^*M. 在 π^*T^*M 中，存在1个整体截面 $\omega=[F]_{y^i}\mathrm{d}x^i$，称为 Hilbert 形式；它的对偶向量场是 $\boldsymbol{l}=l^i\dfrac{\partial}{\partial x^i}$，$l^i=\dfrac{y^i}{F}$，称为特异场.

设 $TM\backslash 0$ 的局部坐标为(x^i,y^i)，定义

$$\left.\begin{aligned}\delta y^i&=\frac{1}{F}(\mathrm{d}y^i+N^i_j\mathrm{d}x^j)\\ \frac{\delta}{\delta x^i}&=\frac{\partial}{\partial x^i}-N^k_i\frac{\partial}{\partial y^k}\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

其中，$N^i_j=(1/2)[G^i]_{y^j}=\gamma^i_{jk}y^k-(1/F)A^i_{jk}\gamma^k_{pq}y^py^q$，$\gamma^i_{jk}$是关于 g_{ij} 的第二类形式 Christoffel 符号，$G^i=\gamma^i_{jk}y^jy^k$是测地系数. $T(TM\backslash 0)$存在两组标架场：$\left\{\dfrac{\partial}{\partial x^i},\dfrac{\partial}{\partial y^i}\right\}$和$\left\{\dfrac{\delta}{\delta x^i},F\dfrac{\partial}{\partial y^i}\right\}$. 其对偶标架场分别为$\{\mathrm{d}x^i,\mathrm{d}y^i\}$和$\{\mathrm{d}x^i,\delta y^i\}$. $\boldsymbol{C}_{ijk}=\dfrac{1}{4}[F^2]_{y^iy^jy^k}$，$\boldsymbol{A}_{ijk}=FC_{ijk}$，均称为 Cartan 张量.

设 $e_i=p^j_i\dfrac{\partial}{\partial x^j}$是 π^*TM 上关于度量 $\boldsymbol{g}$ 的局部幺正标架场，它在 π^*T^*M 上的对偶余标架场是 $\omega^j=v^j_k\mathrm{d}x^k$，其中 $\omega^n=\omega$. 令 $\omega^{n+i}=v^i_j\delta y^j$，注意到 $\omega^{2n}=[F]_{y^i}\delta y^i=\mathrm{d}(\log F)$对偶于径向向量 $y^i\dfrac{\partial}{\partial y^i}$，因而在 SM 上消失. $\{\omega^i,\omega^{n+i}\}$构成了 $T^*(TM\backslash 0)$上关于 Sasaki 型度量

$$g_{ij}\mathrm{d}x^i\otimes\mathrm{d}x^j+g_{ij}\delta y^i\otimes\delta y^j \tag{3}$$

的一组幺正基. 上述构造在变换 $y\to\lambda y(\lambda>0)$下是不变的. 所以，以上诸量(除了 F)在 SM 上有意义. $TM\backslash 0$上的 Sasaki 型度量在 SM 上的拉回度量 $\hat{\boldsymbol{g}}$ 是一个 Riemann 度量

$$\hat{\boldsymbol{g}}=\delta_{ij}\omega^i\otimes\omega^j+\delta_{ab}\omega^{\bar{a}}\otimes\omega^{\bar{b}} \tag{4}$$

SM 关于 $\hat{\boldsymbol{g}}$ 的体积元可表示为

$$\mathrm{d}V_{SM}=\omega^1\wedge\cdots\omega^n\wedge\omega^{n+1}\wedge\cdots\omega^{2n-1}=\Omega\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}\tau \tag{5}$$

其中

$$\Omega:=\det(g_{ij}/F),\quad \mathrm{d}x=\mathrm{d}x^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^n$$

$$\mathrm{d}\tau:=\sum_{i=1}^n(-1)^{i-1}y^i\mathrm{d}y^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}\hat{y}^i\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}y^n$$

n 维 Finsler 流形(M,F)的体积形式定义为

$$\mathrm{d}V_M:=\sigma(x)\mathrm{d}x,\quad \sigma(x):=\frac{1}{c_{n-1}}\int_{S_xM}\Omega\mathrm{d}\tau \tag{6}$$

其中，c_{n-1}表示$(n-1)$维单位 Euclidean 球面 S^{n-1}的体积.

在 π^*TM 上存在唯一的 Chern 联络∇，使得$\nabla\dfrac{\partial}{\partial x^j}=\omega^i_j\dfrac{\partial}{\partial x^i}$，$\omega^i_j=\Gamma^i_{jk}\mathrm{d}x^k$. 其中

$$\Gamma^i_{jk}=\frac{1}{2}g^{il}\left(\frac{\delta g_{kl}}{\delta x^j}+\frac{\delta g_{jl}}{\delta x^k}-\frac{\delta g_{jk}}{\delta x^l}\right)$$

称为联络系数. π^*TM 上的另一个无挠联络——Berwald 联络${}^b\nabla$定义为

$$\left.\begin{aligned}{}^b\nabla&=\nabla+\dot{A}\\ B^i_{jk}&=\Gamma^i_{jk}+\dot{A}^i_{jk}\\ {}^b\omega^i_j&=B^i_{jk}\mathrm{d}x^k\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

其中，“·”表示沿着 Hilbert 形式的共变导数. 显然，有$\nabla_l={}^b\nabla_l$.

记黎曼流形$(SM,\hat{\boldsymbol{g}})$的 Levi-Civita 联络为 D，则$(SM,\hat{\boldsymbol{g}})$上微分形式 ψ 的散度是

$$\mathrm{div}_{\hat{g}}\psi=\sum_A(D_{e_A}\psi)(e_A)$$

D_{e_A}是沿 e_A 的共变导数. 特别地，取 $\psi=\psi_i\mathrm{d}x^i$，则[1]

$$\mathrm{div}_{\hat{g}}\psi=\mathrm{tr}\,{}^b\nabla\psi=g^{ij}(\psi_{i|j}-\psi_i\dot{\eta}_j)=g^{ij}\psi_{i,j} \tag{8}$$

其中

$$\dot{\eta}_j=\dot{A}^k_{kj}$$
$$\psi_{i|j}=\frac{\delta\psi_i}{\delta x^j}-\psi_k\Gamma^k_{ij}$$

“,”和“|”分别表示关于 Berwald 联络 ${}^b\nabla$ 和 Chern 联络∇的水平共变导数.

设 $\phi:(M,F)\to(\tilde{M},\tilde{F})$是一个非退化光滑映射，$\phi_t:(M,F)\to(\tilde{M},\tilde{F})$，$t\in(-\varepsilon,\varepsilon)$是 ϕ 的一个光滑变分，满足 $\phi_0=\phi$，$\phi_t|_{\partial M}=\phi|_{\partial M}$. 则 ϕ 的能量泛函可以写成[6]

$$E(\phi)=\frac{1}{c_{n-1}}\int_{SM}\frac{1}{2}g^{ij}\tilde{\boldsymbol{g}}_{\alpha\beta}\phi^\alpha_i\phi^\beta_j\mathrm{d}V_{SM} \tag{9}$$

能量泛函的第一变分公式可以写成[6-7]

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E(\phi_t)\big|_{t=0}=-n\int_M\mu_\phi(\boldsymbol{V})\mathrm{d}V_M \tag{10}$$

其中，$\boldsymbol{V}:=\dfrac{\partial\phi_t}{\partial t}\Big|_{t=0}\in\Gamma(\phi^*T\tilde{M})$，是变分向量场

$$\mu_\phi(\boldsymbol{V}) = \frac{1}{n\, c_{n-1}\sigma}\int_{S_xM} < \tau(\phi),\quad \boldsymbol{V} >_{\tilde g} \Omega \mathrm{d}\tau \qquad (11)$$

其中[2]

$$\begin{aligned}\tau^\alpha(\phi) = {} & g^{ij}\{\phi^\alpha_{ij} - \phi^\alpha_k B^k_{ij} + \widetilde{B}^\alpha_{\beta\gamma}\phi^\beta_i\phi^\gamma_j\} + \\ & 4y^k g^{ij}\widetilde{C}^\alpha_{\beta\gamma}\phi^\gamma_i\{\phi^\beta_{jk} - \phi^\beta_l\Gamma^l_{jk} + \widetilde{\Gamma}^\beta_{\sigma\tau}\phi^\sigma_j\phi^\tau_k\} + \\ & y^k y^l g^{ij}\widetilde{C}^\alpha_{\beta\gamma\sigma}\phi^\gamma_i\phi^\sigma_j\{\phi^\beta_{kl} - \phi^\beta_h\Gamma^h_{kl} + \widetilde{\Gamma}^\beta_{uv}\phi^u_k\phi^v_l\} \qquad (12)\end{aligned}$$

其中:$\tau(\phi)$和 μ_ϕ 分别称为 ϕ 的张力场和张力形式;ϕ 是调和映射,当且仅当 $\mu_\phi=0$.

2　余微分算子

考虑取值于向量丛的 p-形式. 设(M,F)是紧致无边的 n 维 Finsler 流形,$\xi:E\to M$ 是一个向量丛,$\tilde{g}$ 和$\widetilde{\nabla}$分别是向量丛 E 上的度量和联络. 设 $\boldsymbol{E}_\alpha$ 是E 的局部标架场,$\tilde{\omega}^\beta_\alpha$ 是$\widetilde{\nabla}$在该标架下的的联络形式. 设 ϕ,$\psi\in\Gamma(\wedge^p T^* M\otimes E)$,它们在 SM 上的提升仍记为 ϕ,ψ.

$$\begin{aligned}\phi = {} & \frac{1}{p!}\phi^\alpha_{i_1 i_2\cdots i_p}\mathrm{d}x^{i_1}\wedge \mathrm{d}x^{i_2}\wedge\cdots\wedge \mathrm{d}x^{i_p}\otimes\boldsymbol{E}_\alpha := \\ & \frac{1}{p!}\phi^\alpha_I \mathrm{d}x^I\otimes\boldsymbol{E}_\alpha\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\psi = {} & \frac{1}{p!}\psi^\beta_{j_1 j_2\cdots j_p}\mathrm{d}x^{j_1}\wedge \mathrm{d}x^{j_2}\wedge\cdots\wedge \mathrm{d}x^{j_p}\otimes\boldsymbol{E}_\beta := \\ & \frac{1}{p!}\psi^\beta_J \mathrm{d}x^J\otimes\boldsymbol{E}_\beta\end{aligned}$$

令 $G^{IJ} := g^{i_1 j_1}\cdots g^{i_p j_p}$,$\overline{G}^{IJ} = \frac{1}{G}\int_{S_xM} G^{IJ}\Omega\mathrm{d}\tau$,$G:=\int_{S_xM}\Omega\mathrm{d}\tau$. 与文献[4]类似,定义 ϕ 和 ψ 的整体内积为

$$\begin{aligned}(\phi,\psi) = {} & \frac{1}{c_{n-1}}\int_{SM}\langle\phi,\psi\rangle \mathrm{d}V_{SM} = \\ & \frac{1}{p!}\cdot\frac{1}{c_{n-1}}\int_{SM}\phi^\alpha_{i_1 i_2\cdots i_p}\psi^\beta_{j_1 j_2\cdots j_p}g^{i_1 j_1}\cdots g^{i_p j_p}\tilde{g}_{\alpha\beta}\Omega\mathrm{d}\tau = \\ & \frac{1}{p!}\cdot\frac{1}{c_{n-1}}\int_M \mathrm{d}x\int_{S_xM}\phi^\alpha_I\psi^\beta_J G^{IJ}\tilde{g}_{\alpha\beta}\Omega\mathrm{d}\tau = \\ & \frac{1}{p!}\int_M \phi^\alpha_I\overline{G}^{IJ}\psi^\beta_J\psi^\beta_J\tilde{g}_{\alpha\beta}\mathrm{d}V_M \qquad (13)\end{aligned}$$

对于 $\phi\in\Gamma(\wedge^p T^* M\otimes E)$,定义外微分算子 $\mathrm{d}:\Gamma(\wedge^p T^* M\otimes E)\to\Gamma(\wedge^{p+1}T^* M\otimes E)$,使得

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\phi = {} & \frac{1}{p!}\cdot\frac{\partial}{\partial x^i}(\phi^\alpha_I)\mathrm{d}x^i\wedge\mathrm{d}x^I\otimes\boldsymbol{E}_\alpha + \\ & \frac{1}{p!}\phi^\alpha_I\tilde{\omega}^\beta_\alpha\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)\mathrm{d}x^i\wedge\mathrm{d}x^I\otimes\boldsymbol{E}_\beta = \\ & \frac{1}{p!}\phi^\alpha_{I|i}\,\mathrm{d}x^i\wedge\mathrm{d}x^I\otimes\boldsymbol{E}_\alpha \qquad (14)\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}\phi^\alpha_{I|i} = \phi^\alpha_{i_1 i_2\cdots i_p|i} = {} & \frac{\delta\,\phi^\alpha_{i_1 i_2\cdots i_p}}{\delta x^i} - \\ & \sum_{s=1}^p\phi^\alpha_{i_1\cdots i_{s-1}j i_{s+1}\cdots i_p}\Gamma^j_{i_s i} + \phi^\beta_{i_1 i_2\cdots i_p}\tilde{\omega}^\alpha_\beta\left(\frac{\delta}{\delta x^i}\right)\end{aligned}$$

其中,Γ^i_{kl}是 Chern 联络的联络系数. 与文献[4]类似,可以定义余微分算子 $\mathrm{d}^*:\Gamma(\wedge^{p+1}T^* M\otimes E)\to\Gamma(\wedge^p T^* M\otimes E)$,使得对任何 $\phi\in(\wedge^p T^* M\otimes E)$,$\psi\in(\wedge^{p+1}T^* M\otimes E)$都有$(\mathrm{d}\phi,\psi)=(\phi,\mathrm{d}^*\psi)$. 由式(13),(14)可知

$$\begin{aligned}(\mathrm{d}\phi,\psi) = {} & \frac{1}{(p+1)!}\cdot\frac{1}{c_{n-1}}\int_{SM}(p+1)\cdot \\ & \phi^\alpha_{I|i}\psi^\beta_{jJ}\,g^{ij}G^{IJ}\tilde{g}_{\alpha\beta}\mathrm{d}V_{SM} \qquad (15)\end{aligned}$$

令 $\theta_j := \phi^\alpha_I\psi^\beta_{jJ}G^{IJ}\tilde{g}_{\alpha\beta}$,则由式(8)

$$\begin{aligned}\mathrm{div}\,\theta = {} & g^{ij}(\phi^\alpha_{I|i}\psi^\beta_{jJ}g_{\alpha\beta}G^{IJ} + \phi^\alpha_I\psi^\beta_{jJ|i}G^{IJ}\tilde{g}_{\alpha\beta} + \\ & \phi^\alpha_I\psi^\beta_{jJ}G^{IJ}\tilde{g}_{\alpha\beta|i} - \theta_j\dot{\eta}_i)\end{aligned}$$

其中

$$\tilde{g}_{\alpha\beta|i} = \frac{\delta\tilde{g}_{\alpha\beta}}{\delta x^i} - \tilde{g}_{\gamma\beta}\tilde{\omega}^\gamma_\alpha\left(\frac{\delta}{\delta x^i}\right) - \tilde{g}_{\alpha\gamma}\tilde{\omega}^\gamma_\beta\left(\frac{\delta}{\delta x^i}\right)$$

所以

$$\begin{aligned}(\phi,\mathrm{d}^*\psi) = (\mathrm{d}\phi,\psi) = {} & \\ & \frac{1}{(p+1)!}\cdot\frac{1}{c_{n-1}}\int_{SM}(p+1)(\mathrm{div}\,\theta + g^{ij}\theta_j\dot{\eta}_i - \\ & \phi^\alpha_I\psi^\beta_{jJ|i}g^{ij}G^{IJ}\tilde{g}_{\alpha\beta} - \phi^\alpha_I\psi^\beta_{jJ}\,g^{ij}\,G^{IJ}\tilde{g}_{\alpha\beta|i})\mathrm{d}V_{SM} = \\ & \frac{1}{p!}\cdot\frac{1}{c_{n-1}}\int_M\mathrm{d}x\int_{S_xM}g^{ij}\,\phi^\alpha_I(\psi^\beta_{jJ}\,\tilde{g}_{\alpha\beta}\,\dot{\eta}_i - \\ & \psi^\beta_{jJ|i}\tilde{g}_{\alpha\beta} - \psi^\beta_{jJ}\,\tilde{g}_{\alpha\beta|i})G^{IJ}\Omega\mathrm{d}\tau\end{aligned}$$

因为 p—形式 ϕ 也可看作是 n^p 维向量,显然,

$$\langle\phi,\phi\rangle = \overline{G}^{IJ}\phi_I\phi_J = \frac{1}{G}\int_{S_xM}G^{IJ}\phi_I\phi_J\Omega\mathrm{d}\tau$$

给出了 n^p 维向量空间$(T^0_p)_xM$ 上一个正定的度量. 事实上,$\overline{G}^{IJ}$ 可以看作是一个 n^p 阶正定矩阵,它的逆矩阵一定存在,不妨记为 $\overline{G}_{IJ}$. 从而有

$$\begin{aligned}(\phi,\mathrm{d}^*\psi) = {} & \frac{1}{p!}\cdot\frac{1}{G}\int_M\phi^\alpha_I\,\overline{G}^{IL}\tilde{g}_{\alpha\beta}\Big\{\overline{G}_{LK}\int_{S_xM}g^{ij}(\psi^\beta_{jJ}\dot{\eta}_i - \\ & \psi^\beta_{jJ|i} - \psi^\sigma_{jJ}\tilde{g}_{\sigma\gamma|i}\tilde{g}^{\gamma\beta})G^{JK}\Omega\mathrm{d}\tau\Big\}\mathrm{d}V_M\end{aligned}$$

由 ϕ 的任意性可知

$$\begin{aligned}\mathrm{d}^*\psi = {} & \frac{1}{p!}\cdot\frac{\overline{G}_{KI}}{G}\int_{S_xM}g^{ij}(\psi^\beta_{jJ}\dot{\eta}_i - \psi^\beta_{jJ|i} - \\ & \psi^\sigma_{jJ}\,g_{\sigma\gamma|i}\tilde{g}^{\gamma\beta})G^{KJ}\Omega\mathrm{d}\tau\mathrm{d}x^I\otimes\boldsymbol{E}_\beta \qquad (16)\end{aligned}$$

特别地,当 $\psi=\psi^\alpha_i\mathrm{d}x^i\otimes\boldsymbol{E}_\alpha$ 是 Finsler 流形 M 上的 E-值 1-形式时,

$$\mathrm{d}^*\psi = \frac{1}{G}\int_{S_xM}g^{ij}(\psi^\alpha_i\,\dot{\eta}_j - \psi^\alpha_{i|j} - \psi^\beta_i\,\tilde{g}_{\beta\gamma|j}\tilde{g}^{\alpha\gamma})\Omega\mathrm{d}\tau\otimes\boldsymbol{E}_\alpha \qquad (17)$$

3 取值于向量丛的调和 p-形式

类似于文献[5]中黎曼流形上取值于向量丛 p-形式的 Laplace 算子的定义方式,有

定义1 取值于向量丛 E 的 p-形式的 Laplace 算子 $\Delta:\Gamma(\wedge^p T^* M\otimes E)\rightarrow\Gamma(\wedge^p T^* M\otimes E)$ 定义为 $\Delta=\mathrm{d}\circ\mathrm{d}^*+\mathrm{d}^*\circ\mathrm{d}$. 对于 $\phi\in\Gamma(\wedge^p T^* M\otimes E)$,如果 $\Delta\phi=0$,则称 ϕ 是 E-值调和 p-形式.

命题1 当 M 是紧致无边的 Finsler 流形时,Δ 是一个自共轭的椭圆算子. 当且仅当 $\mathrm{d}\phi=0$,$\mathrm{d}^*\phi=0$ 时,ϕ 是调和的.

证明

$$
\begin{aligned}
(\Delta\phi,\psi) &= \frac{1}{c_{n-1}}\int_{SM}\langle\Delta\phi,\psi\rangle\mathrm{d}V_{SM} = \\
&\frac{1}{c_{n-1}}\int_{SM}\langle(\mathrm{d}\circ\mathrm{d}^*+\mathrm{d}^*\circ\mathrm{d})\phi,\psi\rangle\mathrm{d}V_{SM} = \\
&\frac{1}{c_{n-1}}\int_{SM}\langle\mathrm{d}\phi,\mathrm{d}\psi\rangle\mathrm{d}V_{SM} + \\
&\frac{1}{c_{n-1}}\int_{SM}\langle\mathrm{d}^*\phi,\mathrm{d}^*\psi\rangle\mathrm{d}V_{SM} = \\
&(\mathrm{d}\phi,\mathrm{d}\psi)+(\mathrm{d}^*\phi,\mathrm{d}^*\psi)=(\phi,\Delta\psi)
\end{aligned}
$$

显然,当且仅当 $\mathrm{d}\phi=0$,$\mathrm{d}^*\phi=0$ 时,ϕ 是 E-值调和 p-形式. 证毕.

设 $\phi:(M,F)\rightarrow(\widetilde{M},\widetilde{\boldsymbol{g}})$ 是一个光滑映射,$(\widetilde{M},\widetilde{\boldsymbol{g}})$ 为黎曼流形,取 $E=\phi^* T\widetilde{M}$,则 $\mathrm{d}\phi\in\Gamma(\wedge^1 T^* M\otimes E)$. 对任意 $X,Y\in\Gamma(\pi^* TM)$,有

$$\mathrm{d}(\mathrm{d}\phi)(X,Y)=(\nabla_X\mathrm{d}\phi)Y-(\nabla_Y\mathrm{d}\phi)X=0$$

另一方面,由于 $\widetilde{g}_{\alpha\beta|k}=2\widetilde{A}_{\alpha\beta\gamma}\phi^{\gamma}_{k|i}l^i=0$,由式(12),(17)可得

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}^*(\mathrm{d}\phi) &= -\frac{1}{G}\Big(\int_{S_xM}g^{ij}(\phi^{\alpha}_{i|j}-\phi^{\alpha}_{i}\dot{\eta}_j+ \\
&\phi^{\beta}_{i}g_{\beta\gamma|i}\widetilde{g}^{\alpha\gamma})\Omega\mathrm{d}\tau\Big)\frac{\partial}{\partial\widetilde{x}^{\alpha}} = \\
&\frac{1}{G}\Big(\int_{S_xM}g^{ij}\phi^{\alpha}_{i,j}\Omega\mathrm{d}\tau\Big)\frac{\partial}{\partial\widetilde{x}^{\alpha}} = \\
&-\frac{1}{G}\Big(\int_{S_xM}\tau^{\alpha}(\phi)\Omega\mathrm{d}\tau\Big)\frac{\partial}{\partial\widetilde{x}^{\alpha}} \qquad (18)
\end{aligned}
$$

由式(11),(18)得到——

定理1 设 ϕ 是从紧致无边的 Finsler 流形到黎曼流形的光滑映射,则 ϕ 是调和映射,当且仅当 $\mathrm{d}\phi$ 是取值于拉回切丛 $\phi^* T\widetilde{M}$ 的调和 1-形式.

参考文献:

[1] Mo X H. Harmonic maps from Finsler manifolds[J]. Illinois J Math, 2001, 45: 1331.

[2] Shen Y B, Zhang Y. The second variation of harmonic maps between Finsler manifolds[J]. Science in China: Ser A, 2004, 47: 39.

[3] Centore P. Finsler Laplacians and minimal-energy maps[J]. Inter J Math, 2000, 11:1.

[4] 张剑锋. Finsler流形上的调和函数[J]. 浙江大学学报:理学版, 2010, 37(3): 269.
ZHANG Jianfeng. The harmonic function on the Finsler manifolds[J]. J of Zhejiang University: Science Edition. 2010, 37(3): 269.

[5] 忻元龙. 调和映照[M]. 上海:上海科学技术出版社, 1995.
XIN Yuanlong. Harmonic maps[M]. Shanghai: Shanghai Science and Technology Press, 1995.

[6] He Q, Shen Y B. Some results on harmonic maps for Finsler manifolds[J]. Inter J Math, 2005, 16: 1017.

[7] He Q, Shen Y B. Some properties of harmonic maps for Finsler manifolds[J]. Houston J Math, 2007, 33: 683.