第 40 卷第 5 期
2012 年 5 月

同 济 大 学 学 报(自 然 科 学 版)
JOURNAL OF TONGJI UNIVERSITY(NATURAL SCIENCE)

Vol. 40 No. 5
May 2012

文章编号：0253-374X(2012)05-0768-04　　DOI:10.3969/j.issn.0253-374x.2012.05.021

全局优化方法在最优控制中的应用

刘国华[1,2]，朱经浩[1]

(1. 同济大学 数学系，上海 200092；2. 上海理工大学 理学院，上海 200093)

摘要：利用球约束下的全局优化的 Canonical 对偶方法得到了一类最优控制问题的离散解. 首先经过一系列数学处理得到与原问题相应的球约束下的全局优化问题，然后利用 Canonical 正则空间上的微分系统方法寻找全局最优解. 最后应用该方法求解两个例子.

关键词：最优控制；全局优化；Canonical 对偶理论；离散解

中图分类号：O 232　　**文献标识码**：A

Solution to Optimal Control Problems by Global Optimization

LIU Guohua[1,2], *ZHU Jinghao*[1]

(1. Department of Mathematics, Tongji University, Shanghai 200092, China; 2. College of Science, University of Sanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China)

Abstract: This paper concerns the discrete solution to an optimal control problem by canonical duality theory on the global optimization over a box. With the discrete formulation by mathematical methods, the optimal control problem is converted into the global optimization. A discrete solution is presented to the optimal control problem by using the differential system on the canonical multiplier space. Two examples are illustrated.

Key words: optimal control; global optimization; Canonical duality theory; discrete solution

1　一个关于非凸目标函数的最优控制问题

本文主要研究下列最优控制问题(P)：

$$\min Q(\boldsymbol{x}(1))$$
$$\text{s.t. } \dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u},$$
$$\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0, \quad -1 \leqslant \boldsymbol{u} \leqslant 1, \quad t \in [0,1],$$

其中 $Q(\boldsymbol{x})$是一个二阶连续可微的非凸函数. 这里，状态变量 $\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n$，控制变量 $\boldsymbol{u}\in\mathbf{R}^1$，系数矩阵 $\boldsymbol{A}\in\mathbf{R}^{n\times n}$，$\boldsymbol{B}\in\mathbf{R}^{n\times 1}$，而 $\boldsymbol{x}_0\in\mathbf{R}^n$ 为初始状态. 问题(P)常作为数学模型出现在科学技术各领域的理论和应用问题中. 由经典最优控制理论[1]可知，问题(P)是一类奇异最优控制问题，寻求最优控制的解析表达式是困难的. 传统的处理方法是应用优化的方法，例如牛顿法，罚函数法，或序列二次规划法进行迭代逼近. 但是在理论上都有收敛性和判别解的全局性等问题困扰数学工作者和科技人员. 近年来，由非凸力学发展而来的 Canonical 对偶理论[2]较为成功地在非凸全局优化中得到应用. 同时，动力系统和微分方程理论的应用使得 Canonical 对偶方法在数学层面不断完善[3-4]. 本文对问题(P)进行离散化，再应用文献[3]中的方法求解问题(P)的最优控制的离散解.

2　球约束下的非凸全局优化问题

对于球约束下的非凸全局优化问题：

$$\min Q(\boldsymbol{x}), \quad \text{s.t. } \boldsymbol{x}\in D,$$

其中 $D=\{\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n \mid -1\leqslant x_i\leqslant 1, i=1,2,\cdots,n\}$. 当 $Q(\boldsymbol{x})$是一个非凸二次函数时，Gao 等[2]利用 Canonical 对偶方法直接给出问题的全局最优解. 而当 $Q(\boldsymbol{x})$为 $\mathbf{R}^n$ 上一般的二阶连续可微的非凸函数时，Zhu 等[3-4]通过构建一个微分系统，研究球约束的优化问题的 Canonical 对偶函数，推广和完善了 Gao 等[2]的结论. 本文主要利用文献[3]中的以下结果.

定理 1[3]　设 $Q(\boldsymbol{x})$为 D 上二阶连续可微的非凸函数，如果存在正实数 $\hat{\rho}_i(i=1,2,\cdots,n)$，以及 $\hat{\boldsymbol{x}}=(\hat{x}_1,\hat{x}_2,\cdots,\hat{x}_n)^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^n$，满足：

收稿日期：2011－03－24
基金项目：国家自然科学基金项目(10671145)
第一作者：刘国华(1974—)，女，讲师，博士生，主要研究方向为最优控制. E-mail:liugh265@163.com
通讯作者：朱经浩(1949—)，男，教授，理学博士，博士生导师，主要研究方向为最优控制和数学规划. E-mail:jinghaok@online.sh.cn

$$\begin{cases}\nabla Q(\hat{\boldsymbol{x}})+\mathrm{diag}(\hat{\rho}_1,\hat{\rho}_2,\cdots,\hat{\rho}_n)\hat{\boldsymbol{x}}=0\\ \hat{x}_i^2=1,\quad i=1,2,\cdots,n\end{cases}\tag{1}$$

并且对于任意的 $\boldsymbol{x}\in D$ 恒有 $\nabla^2 Q(\boldsymbol{x})+\mathrm{diag}(\hat{\rho}_1,\hat{\rho}_2,\cdots,\hat{\rho}_n)>0$，则 $\hat{\boldsymbol{x}}$ 为 $Q(\boldsymbol{x})$ 在 D 上的最小值点.

引理 1[5]　设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 为 n 阶实对称方阵，如果 $a_{ii}>\sum\limits_{i\neq j}|a_{ij}|\ (i=1,2,\cdots,n)$，则 $\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵.

本文在以下第 3 节应用定理 1 和引理 1 给出了问题(P)的一类离散求解方法. 在第 4 节，利用这种离散化方法分别详细求解了一类具有二次目标和一类具有非二次目标的线性系统的最优控制问题.

3　最优控制问题的离散化

不妨假定 $\boldsymbol{x}_0=0$，问题(P)中的线性定常系统相应于给定的容许控制 $\boldsymbol{u}(t)$ 的轨道 $\boldsymbol{x}(t)$ 在终端时刻 $t=1$ 时的状态为

$$\boldsymbol{x}(1)=\int_0^1 \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(1-s)}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(s)\mathrm{d}s.$$

以下对线性定常系统进行离散化处理. 先把时间区间[0,1]作 L 等分，即插入分点使得：

$$0=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_L=1,\quad t_k=k\theta,$$
$$\theta=L^{-1},\quad k=0,1,\cdots,L-1.$$

记

$\boldsymbol{b}_k=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(1-k\theta)}\boldsymbol{B},\boldsymbol{u}_k=\boldsymbol{u}(t_k)$. 在时间间隔 $[t_k,t_{k+1})$ 上取 $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(1-t)}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t)=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(1-t_k)}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t_k)=\boldsymbol{b}_k\boldsymbol{u}_k$，考虑终端时刻 $t=1$ 时的状态的离散表达式[6]

$$\sum_{k=0}^{L-1}\int_{t_k}^{t_{k+1}}\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(1-s)}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(s)\mathrm{d}s\approx\sum_{k=0}^{L-1}\theta\boldsymbol{b}_k\boldsymbol{u}_k.$$

从而，原问题(P)经离散化后转化为以下球约束下的非凸全局优化问题：

$$(\mathrm{P1})\ \min Q\Big(\sum_{k=0}^{L-1}\theta\boldsymbol{b}_k\boldsymbol{u}_k\Big)$$
$$\mathrm{s.\,t.}\ -1\leqslant\boldsymbol{u}_k\leqslant 1.$$

为了求解优化问题(P1)，引进新变量

$$\boldsymbol{u}=(u_0,u_1,\cdots,u_{L-1})^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{x}=\sum_{k=0}^{L-1}\theta\boldsymbol{b}_k\boldsymbol{u}_k=\theta\boldsymbol{b}_0\boldsymbol{u}_0+\theta\boldsymbol{b}_1\boldsymbol{u}_1+\cdots+\theta\boldsymbol{b}_{L-1}\boldsymbol{u}_{L-1}.$$

定义

$$P(\boldsymbol{u})=Q(\boldsymbol{x})=Q\Big(\sum_{k=0}^{L-1}\theta\boldsymbol{b}_k\boldsymbol{u}_k\Big).$$

经计算可得

$$\nabla P(\boldsymbol{u})=\theta\begin{pmatrix}\boldsymbol{b}_0^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{b}_1^{\mathrm{T}}\\ \vdots\\ \boldsymbol{b}_{L-1}^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}\nabla Q(\boldsymbol{x}),$$

$$\nabla^2 P(\boldsymbol{u})=\theta^2\begin{pmatrix}\boldsymbol{b}_0^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{b}_1^{\mathrm{T}}\\ \vdots\\ \boldsymbol{b}_{L-1}^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}\nabla^2 Q(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{b}_0\quad\boldsymbol{b}_1\quad\cdots\quad\boldsymbol{b}_{L-1}).\tag{2}$$

对于问题(P1)，条件式(1)有如下形式：

$$\begin{cases}\nabla P(\boldsymbol{u})+\mathrm{diag}(\rho_0,\rho_1,\cdots,\rho_{L-1})\boldsymbol{u}=0,\\ u_k^2=1,\quad\rho_k>0.\end{cases}\tag{3}$$

设实数 w_k，满足

$$w_k=\rho_k u_k,\quad u_k^2=1,\quad\rho_k>0.$$

易见 $w_k\neq 0$，又由于 $\rho_k>0$，因此，

$$\rho_k=\frac{|w_k|}{|u_k|}=|w_k|,\quad u_k=\frac{w_k}{\rho_k}=\frac{w_k}{|w_k|}.\tag{4}$$

由式(4)知，当 $\rho_k>0$，u_k 满足条件式(3)时，

$$\boldsymbol{x}=\sum_{k=0}^{L-1}\theta\boldsymbol{b}_k u_k=\sum_{k=0}^{L-1}\theta\boldsymbol{b}_k\frac{w_k}{|w_k|}.$$

这样，对于问题(P1)，条件式(3)即为如下关系式：

$$\begin{pmatrix}\theta\boldsymbol{b}_0^{\mathrm{T}}\\ \theta\boldsymbol{b}_1^{\mathrm{T}}\\ \vdots\\ \theta\boldsymbol{b}_{L-1}^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}\nabla Q(\boldsymbol{x})+\begin{pmatrix}\rho_0 u_0\\ \rho_1 u_1\\ \vdots\\ \rho_{L-1}u_{L-1}\end{pmatrix}=0,$$
$$u_k^2=1,\quad\rho_k>0,\tag{5}$$

即 w_k 满足方程

$$\theta\boldsymbol{b}_k^{\mathrm{T}}\nabla Q\Big(\sum_{k=0}^{L-1}\theta\boldsymbol{b}_k\frac{w_k}{|w_k|}\Big)+w_k=0.\tag{6}$$

于是，

$$|w_k|=\left|\theta\boldsymbol{b}_k^{\mathrm{T}}\nabla Q\Big(\sum_{k=0}^{L-1}\theta\boldsymbol{b}_k\frac{w_k}{|w_k|}\Big)\right|.$$

故要求满足关系式(5)，对于每个 $k=0,1,\cdots,L-1$，只要取正实数

$$\rho_k=|w_k|=\theta\left|\boldsymbol{b}_k^{\mathrm{T}}\nabla Q\Big(\theta\sum_{k=0}^{L-1}\boldsymbol{b}_k\frac{w_k}{|w_k|}\Big)\right|=$$
$$\frac{1}{L}\left|\boldsymbol{b}_k^{\mathrm{T}}\nabla Q\Big(\frac{1}{L}\sum_{k=0}^{L-1}\boldsymbol{b}_k\frac{w_k}{|w_k|}\Big)\right|.$$

于是，为了利用定理 1，只需要验证是否有：对于 $\forall u\in\{u_k^2\leqslant 1,k=0,1,\cdots,L-1\}$ 有

$$\nabla^2 P(\boldsymbol{u})+\mathrm{diag}(\rho_0,\rho_1,\cdots,\rho_{L-1})>0.$$

而由式(2)可知，

$$\nabla^2 P(\boldsymbol{u})+\mathrm{diag}(\rho_0,\rho_1,\cdots,\rho_{L-1})=$$

$$\theta^2\begin{pmatrix}\boldsymbol{b}_0^{\mathrm T}\\ \boldsymbol{b}_1^{\mathrm T}\\ \vdots\\ \boldsymbol{b}_{L-1}^{\mathrm T}\end{pmatrix}\nabla^2 Q(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{b}_0\quad \boldsymbol{b}_1\quad\cdots\quad \boldsymbol{b}_{L-1})+$$

$$\theta\mathrm{diag}\Big(\Big|\boldsymbol{b}_0^{\mathrm T}\,\nabla Q\Big(\frac{1}{L}\sum_{k=0}^{L-1}\boldsymbol{b}_k\,\frac{w_k}{|w_k|}\Big)\Big|,\cdots,$$

$$\Big|\boldsymbol{b}_{L-1}^{\mathrm T}\,\nabla Q\Big(\frac{1}{L}\sum_{k=0}^{L-1}\boldsymbol{b}_k\,\frac{w_k}{|w_k|}\Big)\Big|\Big)$$

所以，如果对于任意 $\boldsymbol{u}\in\{u_k^2\leqslant 1,k=0,1,\cdots,L-1\}$，以下不等式成立(注意到 $\theta=1/L$)

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{b}_0^{\mathrm T}\\ \boldsymbol{b}_1^{\mathrm T}\\ \vdots\\ \boldsymbol{b}_{L-1}^{\mathrm T}\end{pmatrix}\nabla^2 Q\Big(\frac{1}{L}\sum_{k=0}^{L-1}\boldsymbol{b}_k u_k\Big)(\boldsymbol{b}_0\quad \boldsymbol{b}_1\quad\cdots\quad \boldsymbol{b}_{L-1})+$$

$$\mathrm{diag}\Big(L\Big|\boldsymbol{b}_0^{\mathrm T}\,\nabla Q\Big(\frac{1}{L}\sum_{k=0}^{L-1}\boldsymbol{b}_k\,\frac{w_k}{|w_k|}\Big)\Big|,\cdots,$$

$$L\Big|\boldsymbol{b}_{L-1}^{\mathrm T}\,\nabla Q\Big(\frac{1}{L}\sum_{k=0}^{L-1}\boldsymbol{b}_k\,\frac{w_k}{|w_k|}\Big)\Big|\Big)>0.\quad(7)$$

则由定理1可知

$$(u_0,u_1,\cdots,u_{L-1})^{\mathrm T}=\Big(\frac{w_0}{|w_0|},\frac{w_1}{|w_1|},\cdots,\frac{w_{L-1}}{|w_{L-1}|}\Big)^{\mathrm T}$$

为优化问题(P1)的全局最小值点. 这样，求解优化问题(P1)的全局最小值点就转化为由式(7)决定 w_k 的符号 $\mathrm{sgn}\,w_k$. 下面通过实例演示利用这一过程求解优化问题(P1)的全局最小值点，从而得到原问题(P)的离散解.

4 最优控制问题的离散解的例子

例1 对于 $\mathbf{R}^1$ 上的二次多项式 $Q(x)=-\frac{1}{2}x^2-2x$，考虑最优控制问题：

$$\text{(P1)}\quad \min Q(x(1))$$
$$\text{s. t. } \dot{x}=x+\Big(t-\frac{1}{2}\Big)u,$$
$$x(0)=0,-1\leqslant u\leqslant 1,t\in[0,1].$$

第3节中的离散化方法可实施如下：对于给定奇整数 L，有

$$\theta=\frac{1}{L},\quad b_k=\mathrm{e}^{1-k\theta}\Big(\frac{k}{L}-\frac{1}{2}\Big),$$

对于非零实数 $w_k\neq 0$，令

$$x_L=\theta\Big(\mathrm{e}\Big(\frac{0}{L}-\frac{1}{2}\Big)\frac{w_0}{|w_0|}+\mathrm{e}^{1-\theta}\Big(\frac{1}{L}-\frac{1}{2}\Big)\frac{w_1}{|w_1|}+\cdots+\mathrm{e}^{1-(L-1)\theta}\Big(\frac{L-1}{L}-\frac{1}{2}\Big)\frac{w_{L-1}}{|w_{L-1}|}\Big),$$

可得到

$$x_L\in\Big[\frac{-\theta}{2(1-\mathrm{e}^{-\theta})}(e-1),\frac{\theta}{2(1-\mathrm{e}^{-\theta})}(e-1)\Big]\to\Big[\frac{1-\mathrm{e}}{2},\frac{\mathrm{e}-1}{2}\Big],\quad L\to+\infty.$$

因为 $Q'(x)=-x-2$，当 L 充分大时，有 $Q'(x_L)<0$. 要求式(6)满足，就有

$$w_k=-\theta Q'(x_L)b_k=(2+x_L)\theta b_k=\begin{cases}<0, & k<\Big[\dfrac{L}{2}\Big]\\ >0, & k>\Big[\dfrac{L}{2}\Big]\end{cases}$$

又因为当 L 足够大,且 $j=0,\cdots,L-1$ 时,

$$Q''(x)\equiv-1,\tag{8}$$

$$|b_j|=\mathrm{e}^{1-j\theta}\Big|\Big(\frac{j}{L}-\frac{1}{2}\Big)\Big|>0,\tag{9}$$

$$\frac{1}{L}\sum_{j=0}^{L-1}|b_k|\leqslant\frac{\theta(\mathrm{e}-1)}{2(1-\mathrm{e}^{-\theta})}<\frac{3}{5}(\mathrm{e}-1),\tag{10}$$

$$|Q'(x_L)|>2-\frac{1}{2}(\mathrm{e}-1)>\frac{3}{5}(\mathrm{e}-1).\tag{11}$$

所以，当 L 充分大时，由式(8)～式(11)知，对于 $k=0,1,\cdots,L-1$，有

$$L|Q'(x_L)b_k|>\sum_{j=0}^{L-1}|b_kb_j|=|Q''(x)|\sum_{j=0}^{L-1}|b_kb_j|.\tag{12}$$

由式(12)及引理1知，当 L 充分大时，对于

$$\forall x\in\Big[\frac{-\theta}{2(1-\mathrm{e}^{-\theta})}(\mathrm{e}-1),\frac{\theta}{2(1-\mathrm{e}^{-\theta})}(\mathrm{e}-1)\Big]$$

满足

$$Q''(x)(b_0\quad b_1\quad\cdots\quad b_{L-1})^{\mathrm T}(b_0\quad b_1\quad\cdots\quad b_{L-1})+L\mathrm{diag}(|b_0Q'(x_L)|,\cdots,|b_{L-1}Q'(x_L)|)>0.$$

因此，当 L 充分大时，得到原最优问题(P_1)的离散解

$$u_k=\mathrm{sgn}\,w_k=\begin{cases}-1, & k<\Big[\dfrac{L}{2}\Big]\\ 1, & k>\Big[\dfrac{L}{2}\Big]\end{cases}.$$

例2 对于 R^1 上的多项式 $Q(x)=-\frac{1}{12}x^4-x^2+8x$，利用第3节中给出的离散化方法，求下述问题(P2)的最优解：

$$\min Q(x(1))$$
$$\text{s. t. } \dot{x}=x+u$$
$$x(0)=0,-1\leqslant u\leqslant 1,t\in[0,1].$$

对于给定正整数 L，第3节中对应的

$$b_k=\mathrm{e}^{1-t_k}=\mathrm{e}^{1-k\theta}>0.$$

对于非零实数 $w_k \neq 0$，令

$$x_L = \theta\left(e \frac{w_0}{|w_0|} + e^{1-\theta} \frac{w_1}{|w_1|} + \cdots + e^{1-(L-1)\theta} \frac{w_{L-1}}{|w_{L-1}|}\right)$$

则

$$x_L \in \left[\frac{-\theta}{1-e^{-\theta}}(e-1), \frac{\theta}{1-e^{-\theta}}(e-1)\right] \to [1-e, e-1], \quad L \to +\infty.$$

又因为 $Q''(x) = -x^2 - 2 < 0$，故 $Q'(x) = -\frac{1}{3}x^3 - 2x + 8$ 单调递减，从而当 L 足够大时，

$$Q(x_L) = -\frac{1}{3}x_L^3 - 2x_L + 8 > 8 - \frac{8}{3} - 4 = \frac{4}{3} > 0.$$

要求式(6)满足，就有

$$w_k = -Q'(x_L) b_k \theta = \left(\frac{1}{3}x_L^3 + 2x_L - 8\right) b_k \theta < 0.$$

从而

$$x_L = -\theta(e + e^{1-\theta} + \cdots + e^{1-(L-1)\theta}) = \frac{-\theta}{1-e^{-\theta}}(e-1) \to 1-e, \quad L \to +\infty.$$

此时，因为

$$b_j = e^{1-j\theta} > 0, \quad j = 0, 1, \cdots, L-1, \quad (13)$$

$$\frac{1}{L}\sum_{j=0}^{L-1} b_j = \frac{\theta(e-1)}{1-e^{-\theta}} \to e-1, \quad L \to +\infty, \quad (14)$$

$$|Q'(1-e)| = \frac{1}{3}(e-1)^3 + 2(e-1) + 8 > (e-1)^3 + 2(e-1) = (e-1)|Q''(e-1)|. \quad (15)$$

由式(15)知，

$$|Q'(1-e)| > (e-1) \cdot \max_{x \in [1-e, e-1]} |Q''(x)|. \quad (16)$$

利用式(13)～式(16)，可知，在 L 充分大时，任意的

$$x \in \left[\frac{-\theta}{1-e^{-\theta}}(e-1), \frac{\theta}{1-e^{-\theta}}(e-1)\right],$$

所有的 $k = 0, 1, \cdots, L-1$，有

$$L|Q'(x_L) b_k| > |Q''(x)| \sum_{j=0}^{L-1} |b_k b_j|. \quad (17)$$

根据引理 1 及式(17)知，当 L 充分大时，对于 $\forall x \in \left[\frac{-\theta}{1-e^{-\theta}}(e-1), \frac{\theta}{1-e^{-\theta}}(e-1)\right]$满足

$$Q''(x)(b_0 \quad b_1 \quad \cdots \quad b_{L-1})^{\mathrm{T}}(b_0 \quad b_1 \quad \cdots \quad b_{L-1}) + \mathrm{diag}(L|b_0 Q'(x_L)|, \cdots, L|b_{L-1} Q'(x_L)|) > 0.$$

因此，当 L 充分大时，优化问题(P2)的最优离散解为

$$u_k = \mathrm{sgn}\, w_k = -1, \quad k = 0, 1, \cdots, L-1.$$

参考文献:

[1] Sontag E D. Mathematical control theory [M]. New York: Springer, 1998.

[2] GAO David Yang. Canonical duality theory and solutions to constrained nonconvex quadratic programming [J]. J Global Optimization, 2004(29): 377.

[3] ZHU Jinghao, WANG Chao, GAO David Yang. Global optimization over a box via canonical dual function[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2011(235):1141.

[4] ZHU Jinghua, TAO Shiming, GAO David Yang. A study on concave optimization via canonical dual function[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2009(224):459.

[5] 陈景良,陈向晖. 特殊矩阵[M]. 北京: 清华大学出版社, 2001.
CHEN Jingliang, CHEN Xianghui. Special matrix[M]. Beijing: Tsinghua University Press 2001.

[6] ZHU Jinghao, ZOU Zhiqiang. An approximation to discrete optimal feedback controls [J]. International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, 2003(47): 2989.