第 40 卷第 6 期
2012 年 6 月

同 济 大 学 学 报(自 然 科 学 版)
JOURNAL OF TONGJI UNIVERSITY(NATURAL SCIENCE)

Vol.40 No.6
Jun. 2012

文章编号：0253-374X(2012)06-0812-05　　DOI：10.3969/j.issn.0253-374x.2012.06.002

一种基于复数变量求偏导的随机有限元可靠度法

靳　慧[1,2]

(1. 东南大学 江苏省工程力学分析重点实验室，江苏 南京 210096；2. 重庆交通大学 桥梁结构工程重点实验室，重庆 400074)

摘要：提出一种基于复数变量求偏导的随机有限元可靠度法.将工程中的随机因素设置为复数变量，通过复数函数的泰勒级数展式得到一阶导数的近似计算式.这种求导方法效率高，精度高，应用简单方便，只需在复数空间进行有限元计算，无需对有限元方程进行偏导计算，便可求出响应量的偏导数，进而求得响应量的方差.在随机有限元一次二阶矩的迭代格式中，取复数空间有限元计算结果的实部作为响应量的值，这样在求可靠度系数的迭代过程中，无需再在实数空间进行计算.复数变量法大大简化了随机有限元(SFEM)和随机有限元可靠度(SFEMR)的计算和编程过程，为工程应用提供了一种现实可行的途径.

关键词：随机有限元；可靠度；复数变量；偏导数

中图分类号：TB311.2　　**文献标识码**：A

A Stochastic Finite Element Reliability Analysis Method Based on Complex-variable Derivative Technique

JIN Hui[1,2]

(1. Jiangsu Key Laboratory of Engineering Mechanics, Southeast University, Nanjing 210096, China; 2. Key Laboratory of Bridge-structure Engineering of the Ministry of Communication, Chongqing Jiaotong University, Chongqing 400074, China)

Abstract: A new approach is proposed for stochastic finite element method (SFEM) and reliability analysis by using a complex-variable technique. The random factors in engineering are defined as complex variables, the first derivative formulation can be obtained by the Taylor's series of a complex function. This derivative method is computationally very accurate, efficient, and very easily implemented. In SFEM, to get the variances of responses, it only needs to implement FEM in complex variables space, without a need of partial derivatives of FEM functions. In the iteration scheme of SFEM reliability analysis, the real parts of complex response is considered as the response value to simplify the process. The complex-variable method greatly simplifies SFEM and reliability program, providing a feasible approach for engineering application.

Key words: stochastic finite element; reliability; complex variable; derivative

随机有限元方法(SFEM)是计算随机力学的一个重要分支，是随机结构分析的有力工具. SFEM 能够处理工程中的结构随机问题，计算结构随机响应量的统计特征.近几十年来，国内外学者对随机有限元法进行了大量深入的研究[1-3]，提出了众多的求解方法，如 Monte-Carlo 随机有限元法，Taylor 展开随机有限元法(TSFEM)，摄动随机有限元法(PSFEM)，Neumann 展开随机有限元法(NSFEM)等，成功地解决了大量工程中的随机结构分析问题.

除了 Monte-Carlo 随机有限元法外，其他随机有限元法都是在传统的确定性有限元列式的基础上，进行推导演化，得出迭代式，以计算响应量对各随机变量的各阶偏导数，然后根据这些偏导数和泰勒级数展式计算出响应量的各阶统计特性.可见，偏导数的计算是随机有限元法的核心.

另外，随机有限元法的重要用途是和可靠度理论相结合进行结构可靠性分析，称为随机有限元可靠度法(SFEMR).在可靠度计算方法中，需要计算功能函数对各个随机变量的偏导数，而这种偏导数的计算往往又通过功能函数的表达式转化为结构随机响应量的偏导数计算.所以，响应量的偏导数计算直接影响 SFEM 和 SFEMR 的计算精度和效率.本文将复数变量求偏导法引入到 SFEM 和 SFEMR 中，提出一种快速、精确的求偏导方法，可大大简化 SFEM 和 SFEMR 计算过程，提高计算效率.

1　随机有限元法

一阶摄动法和一阶 Taylor 展开法的计算过程

收稿日期：2010-04-28
基金项目：国家自然科学基金(51108075)；江苏省自然科学基金(BK2011613)；住房和城乡建设部科技计划项目(2010-K2-7)
第一作者：靳　慧(1974—)，女，副教授，博士生导师，工学博士，主要研究方向为结构可靠度，结构疲劳损伤. Email：jinhui@seu.edu.cn

较为简单,适用于随机变量变异系数较小的情况.

1.1　摄动随机有限元法

摄动随机有限元法假设结构的某一个参数 Y 是随机扰动的,其扰动量可以用一个随机小参数 α 来表示[2],$Y=\bar{Y}(1+\alpha)$,$\bar{Y}$ 为 Y 的均值.

有限元控制方程为

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{v}=\boldsymbol{F} \tag{1}$$

式中:$\boldsymbol{K}$ 为总刚矩阵;$\boldsymbol{v}$ 为位移列阵;$\boldsymbol{F}$ 为等效节点载荷列阵.

当有限元离散网格确定以后,将刚度矩阵、载荷列阵和位移列阵在随机向量 $\boldsymbol{\alpha}(\alpha_i,\alpha_j,\cdots)$ 的均值处 Taylor 级数展开,并略去二阶以上项,有

$$\boldsymbol{K}=\boldsymbol{K}_0+\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{K}_i\boldsymbol{\alpha}_i \tag{2}$$

$$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}_0+\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i\boldsymbol{\alpha}_i \tag{3}$$

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_0+\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{v}_i\boldsymbol{\alpha}_i \tag{4}$$

式中:$\boldsymbol{K}_0$,$\boldsymbol{F}_0$,$\boldsymbol{v}_0$ 分别表示刚度矩阵、载荷列阵和位移列阵的均值矩阵,它们是确定性量;下标 i 表示对 α_i 求偏导数.将式(2),(3),(4)代入控制方程(1),运用中心摄动方法可以得到如下的递归方程组:

$$\boldsymbol{K}_0\boldsymbol{v}_0=\boldsymbol{F}_0,\quad \boldsymbol{K}_0\boldsymbol{v}_i=\boldsymbol{F}_i-\boldsymbol{K}_i\boldsymbol{v}_0 \tag{5}$$

由式(5)可以得出位移的均值 E 和协方差 Cov

$$E[\boldsymbol{v}]=\boldsymbol{v}_0 \tag{6}$$

$$\mathrm{Cov}(\boldsymbol{v},\ \boldsymbol{v}^{\mathrm{T}})=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\boldsymbol{v}_i\boldsymbol{v}_j\mathrm{Cov}(\alpha_i,\alpha_j) \tag{7}$$

1.2　Taylor 展开随机有限元法

该法的基本思路是将有限元格式中的控制变量在随机变量均值点处进行 Taylor 展开,经适当数学处理得出所需计算式[3].

有限元控制方程为 $\boldsymbol{K}\boldsymbol{v}=\boldsymbol{F}$,应力向量 $\boldsymbol{\sigma}$ 由下式计算:

$$\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}\boldsymbol{v} \tag{8}$$

式中:$\boldsymbol{D}$ 为弹性矩阵;$\boldsymbol{B}$ 为应变矩阵.

$\boldsymbol{X}=(X_1,X_2,\cdots,X_n)$为表示结构材料、几何、载荷等随机性质的随机向量.将应力 $\boldsymbol{\sigma}$ 在均值点 $\bar{\boldsymbol{X}}=(\bar{X}_1,\bar{X}_2,\cdots,\bar{X}_n)$处一阶 Taylor 展开,并在两边同时取均值,可得

$$\boldsymbol{\sigma}_0\approx\boldsymbol{\sigma}(\bar{\boldsymbol{X}})=\boldsymbol{D}_0\boldsymbol{B}_0\boldsymbol{v}_0 \tag{9}$$

式中:$\boldsymbol{D}_0$,$\boldsymbol{B}_0$ 分别表示弹性矩阵和应变矩阵的均值,而

$$\boldsymbol{v}_0=\boldsymbol{K}_0^{-1}\boldsymbol{F}_0 \tag{10}$$

以上两式与常规确定性有限元的计算完全相同.应力的方差 Var 可由下式计算:

$$\mathrm{Var}[\boldsymbol{\sigma}]\approx\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial\boldsymbol{\sigma}}{\partial X_i}\right)_{\boldsymbol{X}=\bar{\boldsymbol{X}}}\cdot\left(\frac{\partial\boldsymbol{\sigma}}{\partial X_j}\right)_{\boldsymbol{X}=\bar{\boldsymbol{X}}}\mathrm{Cov}(X_i,X_j) \tag{11}$$

1.3　随机有限元法中的偏导数计算

可以看出,SFEM 中结构位移和应力的均值计算等同于确定性有限元;方差计算式(7)和(11)的关键在于求解位移和应力对随机变量的偏导.对于线弹性结构,直接对有限元方程求偏导可得

$$\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial X_i}=\boldsymbol{K}^{-1}\left(\frac{\partial\boldsymbol{F}}{\partial X_i}-\frac{\partial\boldsymbol{K}}{\partial X_i}\boldsymbol{v}\right) \tag{12}$$

$$\frac{\partial\boldsymbol{\sigma}}{\partial X_i}=\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial X_i}\boldsymbol{B}\boldsymbol{v}^{\mathrm{e}}+\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}\frac{\partial\boldsymbol{v}^{\mathrm{e}}}{\partial X_i} \tag{13}$$

式中:$\boldsymbol{v}^{\mathrm{e}}$ 表示单元位移阵列.

这种直接求偏导法可得到解析解,但需要对有限元矩阵进行求导、求逆等多次运算,过程复杂.

另外一种简便求解偏导数的方法是有限差分法,函数 $f(x)$对变量 x 的偏导数由下式计算

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h} \tag{14}$$

式中:h 为微小扰动量.有限差分法虽然避免了对矩阵进行计算,只需求解函数值 f,但精度差,且对扰动量 h 的依赖性很强.

复数变量法是一种精度和效率都极高的偏导数求解方法,本文将此法运用到 SFEM 和 SFEMR 中.

2　复数变量求导法

复数变量求导法由 Lyness 和 Moler 于 1967 年提出[4],Vatsa V N 用于解 Navier-Stokes 流动方程的灵敏度偏导[5],Daniel Contreras Mundstock 等用在二维弹性的灵敏度估算问题中[6],Gao X W 用在非线性边界元的求解中[7].

将函数 $f(x)$的变量 x 替换为复数变量 $x+\mathrm{i}h$,h 为微小扰动量,$f(x+\mathrm{i}h)$可以展开为 Taylor 级数展式:

$$f(x+\mathrm{i}h)=f(x)+\mathrm{i}h\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}-\frac{h^2}{2}\frac{\mathrm{d}^2f}{\mathrm{d}x^2}-\mathrm{i}\frac{h^3}{6}\frac{\mathrm{d}^3f}{\mathrm{d}x^3}+\frac{h^4}{24}\frac{\mathrm{d}^4f}{\mathrm{d}x^4}+\cdots \tag{15}$$

一阶偏导数可以表示为

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{Im}(f(x+\mathrm{i}h))}{h}+O(h^2) \tag{16}$$

Im 表示复数的虚部,忽略高阶微小量 $O(h^2)$,则有

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{Im}(f(x+\mathrm{i}h))}{h} \tag{17}$$

式(17)即为复数变量法求一阶导数的计算式,和其

他方法相比，复数变量求导法有以下几个特点：

(1) 精度高. 由式(17)可见，在复数空间进行计算，一次导数计算时只需求一个复数函数值 $f(x+ih)$，不存在多个函数之间的运算误差，算例表明具有很高的精度.

(2) 扰动量 h 可取微小值. 在复数空间进行计算，高阶微小量 $O(h^2)$ 随微小扰动量 h 的减小而高次减小，h 取微小值时，偏导计算精度高. 有限差分法需要计算两个函数值 $f(x+h)$ 和 $f(x-h)$ 的差，当 h 取微小值，这两个函数值在一个数量级时，相减计算可能导致误差. 而复数变量求一次导数计算时只需求一个函数值，对扰动量 h 的依赖性低.

(3) 应用简单方便.

图1为平面桁架结构，载荷 $P_1=35\ 500$ N，$P_2=36\ 100$ N，弹性模量 $E=2.0\times10^{11}$ Pa，杆件横截面积 $A=0.003\ 20$ m^2. 求杆件最大应力值 $\sigma_{\max}$ 对随机变量 A，P_1 的偏导数. 有限元程序采用平面杆单元编制，由直接求偏导法求得解析解.

列出一段复数变量求偏导的 Matlab 程序，这段程序是算例1中计算桁架结构中的最大杆应力响应量 $Y_{\max}$ 对杆件横截面积 A 的偏导数 $\partial Y_{\max}/\partial A$.

$A=0.003\ 20$ m^2；%A 为桁架中所有杆件的横截面积

$P_1=35\ 500$ N；%P_1，P_2 为载荷值

$P_2=36\ 100$ N；

$E=2\times10^{11}$ Pa；%E 为弹性模量

$h=1\times10^{-6}$；%h 为扰动量

$A=A+h\mathrm{i}$；%设置 A 为复数变量

FEM 程序；%有限元程序计算 $Y_{\max}$

$\partial Y_{\max}/\partial A=\mathrm{Im}(Y_{\max})/h$；%计算 $\partial Y_{\max}/\partial A$

可以看出，复数变量法只需在 FEM 程序前通过语句 $A=A+h\mathrm{i}$ 设置 A 为复数变量，在 FEM 程序后只用一条语句 $\partial Y_{\max}/\partial A=\mathrm{Im}(Y_{\max})/h$ 取出 $Y_{\max}$ 的虚部，并根据式(17)计算偏导，其余的程序完全与实数空间的 FEM 程序相同，计算所耗机时与普通有限元程序运行机时并无差异. 与直接求偏导法相比，省去了矩阵的求逆和求导等运算，计算过程大大简化，并且程序编制极其简单，只需对实数空间的 FEM 程序进行简单的设置即可.

复数变量法和有限差分法的计算结果见表1.

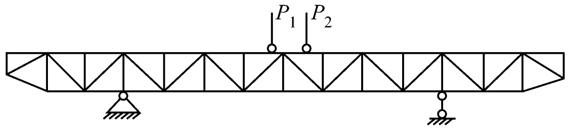

图1 平面桁架结构

Fig.1 Plane truss structure

表1 偏导数计算结果

Tab.1 Results of derivative

h	$(\partial\sigma_{\max}/\partial A)/10^{10}$		$(\partial\sigma_{\max}/\partial P_1)/10^2$	
	复数变量法	有限差分法	复数变量法	有限差分法
1.0×10^{-4}	−1.920 975 609 8	−1.924 731 182 8	8.593 750 000 0	8.593 743 294 5
1.0×10^{-6}	−1.922 851 374 7	−1.922 851 751 1	8.593 750 000 0	8.593 723 177 9
1.0×10^{-8}	−1.922 851 562 5	−1.922 851 601 1	8.593 750 000 0	8.657 574 653 6
1.0×10^{-10}	−1.922 851 562 5	−1.922 850 027 7	8.593 750 000 0	−0.745 058 059 7
1.0×10^{-12}	−1.922 851 562 5	−1.922 796 666 7	8.593 750 000 0	0
1.0×10^{-14}	−1.922 851 562 5	−1.968 964 934 3	8.593 750 000 0	0
1.0×10^{-16}	−1.922 851 562 5	−0.283 122 062 7	8.593 750 000 0	0
1.0×10^{-18}	−1.922 851 562 5	−511.109 828 950 0	8.593 750 000 0	0
1.0×10^{-20}	−1.922 851 562 5	0	8.593 750 000 0	0
1.0×10^{-22}	−1.922 851 562 5	0	8.593 750 000 0	0
1.0×10^{-24}	−1.922 851 562 5	0	8.593 750 000 0	0
1.0×10^{-26}	−1.922 851 562 5	0	8.593 750 000 0	0
1.0×10^{-28}	−1.922 851 562 5	0	8.593 750 000 0	0
1.0×10^{-30}	−1.922 851 562 5	0	8.593 750 000 0	0
1.0×10^{-32}	−1.922 851 562 5	0	8.593 750 000 0	0
1.0×10^{-34}	−1.922 851 562 5	0	8.593 750 000 0	0
解析解	−1.922 851 562 5		8.593 750 000 0	

由表1可见，计算 $\partial\sigma_{\max}/\partial A$ 时，只有 $h=1.0\times10^{-8}$ 时，有限差分法计算结果与解析解比较接近，而当 h 取其他值时，都会产生较大的误差；复数变量法在 h 取值足够小，小于 1.0×10^{-6} 时，都会得出很精确的结果. $\partial\sigma_{\max}/\partial P_1$ 的计算也有类似的结论.

3　随机有限元可靠度法

随机有限元法的重要用途是和可靠度理论相结合进行结构可靠性分析,目前使用最多的是随机有限元一次二阶矩法.

3.1　改进的一次二阶矩法

设结构构件功能函数为[8]

$$Z = g(X_1,\ X_2,\ \cdots,X_n) \tag{18}$$

式中:$X_i(i=1,2,\cdots,n)$为统计独立正态随机变量.

将功能函数在设计验算点 $x^*(x_1^*,\cdots,x_n^*)$作 Taylor 级数展开,仅保留线性项,有

$$Z \approx g(x_1^*,\cdots,x_n^*) + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial g}{\partial X_i}\right)_{x^*}(X_i - x_i^*) \tag{19}$$

可得 Z 的均值与方差为

$$\begin{cases} u_Z = g(x_1^*,\cdots,x_n^*) + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial g}{\partial X_i}\right)_{x^*}(u_{X_i} - x_i^*) \\ \sigma_Z = \left[\sum_{i=1}^{n}\left(\left(\frac{\partial g}{\partial X_i}\right)_{x^*}\sigma_{X_i}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \end{cases} \tag{20}$$

式中:u_{X_i}表示 X_i 的均值;σ_{X_i}表示 X_i 的方差.

可靠度系数 β 为

$$\beta = \frac{u_Z}{\sigma_Z} = \frac{g(x_1^*,\cdots,x_n^*) + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial g}{\partial X_i}\right)_{x^*}(u_{X_i} - x_i^*)}{\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\left(\frac{\partial g}{\partial X_i}\right)_{x^*}\sigma_{X_i}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}} \tag{21}$$

设计验算点坐标为

$$x_i^* = u_{X_i} + \beta\sigma_{X_i}\cos\theta_{X_i} \tag{22}$$

$$\cos\theta_{X_i} = \frac{-\left(\frac{\partial g}{\partial X_i}\right)_{x^*}\sigma_{X_i}}{\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\left(\frac{\partial g}{\partial X_i}\right)_{x^*}\sigma_{X_i}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}} \tag{23}$$

β 的求取只能采用迭代法,计算步骤为:

(1) 假定 x_i^*(一般可设 $x_i^* = u_{X_i}$).

(2) 求 $\cos\theta_{X_i}$,采用式(23).

(3) 求 β,采用式(21).

(4) 求新的 x_i^*,采用式(22).

(5) 以新的 x_i^* 重复步骤(2)～(4),直到前后两次算出的 β 值之差小于允许误差.

3.2　随机有限元一次二阶矩法

利用式(21),(23)计算可靠度指标 β 时,要用到功能函数的值 $g(x_1^*,\cdots,x_n^*)$和功能函数对随机变量的偏导数值 $\left(\frac{\partial g}{\partial X_i}\right)_{x^*}$. 功能函数 g 往往是结构响应量 s(位移,应力等)的函数 $g=f(s)$,所以求 g 的值和偏导数转化为求 s 的值和偏导数,即

$$g(x_1^*,\cdots,x_n^*) = f(s(x_1^*,\cdots,x_n^*)) \tag{24}$$

$$\left(\frac{\partial g}{\partial X_i}\right)_{x^*} = \left(\frac{\partial f}{\partial s_i}\right)_{x^*}\left(\frac{\partial s}{\partial X_i}\right)_{x^*} \tag{25}$$

响应量 s 的值和偏导可通过 SFEM 法求出,也就是将 SFEM 嵌入到一次二阶矩的迭代中,形成随机有限元一次二阶矩法,其迭代步骤为:

(1) 假定 x_i^*(一般可设 $x_i^* = u_{X_i}$).

(2) 由 SFEM 求 s 和$\partial s/\partial X$.

(3) 求 g 和$\partial g/\partial X$,采用式(24),(25).

(4) 求 $\cos\theta_{X_i}$,采用式(23).

(5) 求 β,采用式(21).

(6) 求新的 x_i^*,采用式(22).

(7) 以新的 x_i^* 重复步骤(2)～(6),直到前后两次算出的 β 值之差小于允许误差.

每迭代一次求解 β,就要解一次随机有限元,求解的关键是计算$\partial s/\partial X$,可采用复数偏导法.

4　复数变量求偏导 SFEMR 法

由式(15)所示的 $f(x+\mathrm{i}h)$的 Taylor 级数展式可得

$$f(x) = \mathrm{Re}(f(x+\mathrm{i}h)) + O(h^2) \tag{26}$$

忽略高阶微小量 $O(h^2)$,则有

$$f(x) = \mathrm{Re}(f(x+\mathrm{i}h)) \tag{27}$$

对于 FEM,在复数空间进行运算,可取复数计算结果的实部作为响应量的值,取复数计算结果的虚部计算响应量的偏导,无需再在实数空间进行计算.

在 3.2 节的随机有限元一次二阶矩法的迭代格式中,用复数空间的 FEM 取代 SFEM,迭代格式为:

(1) 假定 x_i^*(一般可设 $x_i^* = u_{X_i}$).

(2) 进行复数空间 FEM 计算. 取复数响应量的实部作为 s 的值,采用式(27);取复数响应量的虚部求解$\partial s/\partial X$ 的值,采用式(17).

(3) 求 g 和$\partial g/\partial X$,采用式(24),(25).

(4) 求 $\cos\theta_{X_i}$,采用式(23).

(5) 求 β,采用式(21).

(6) 求新的 x_i^*,采用式(22).

(7) 以新的 x_i^* 重复步骤(2)～(6),直到前后两次算出的 β 值之差小于允许误差.

和随机有限元一次二阶矩法相比,本节方法用复数空间的 FEM 计算代替了 SFEM 计算,其程序的编制只需普通的 FEM 程序,无需再编制 SFEM 程序,运算过程大大简化.

以算例1中的桁架结构为例,设 A,P_1,P_2 分别为复数变量且随机扰动,根据式(27)计算得到的最大杆件应力值 $\sigma_{\max}$ 和实数空间的有限元结果比较见表2.

设杆件强度为 $R=8.0\times10^7$ MPa,A,P_1,P_2 的变异系数为0.2,复数扰动量取 $h=10^{-30}$,计算危险点的强度可靠度.功能函数为 $g=R-\sigma_{\max}$.根据第4节的迭代步骤计算可靠度系数 β 和验算点的值,迭代过程如表3所示.

表2表明,在复数空间运用式(27)计算有限元响应量的值具有很高的精度.表3表明,在求解 β 的迭代过程中,只需在复数空间进行普通FEM计算,过程大大简化.

表2 最大杆件应力值 $\sigma_{\max}$ 计算结果

Tab.2 Results of the max stress $\sigma_{\max}$ in plane truss

h	$\sigma_{\max}/10^7$ MPa		
	A 复数扰动	P_1 复数扰动	P_2 复数扰动
1.0×10^{-4}	6.147 121 951 2	6.153 125 000 0	6.153 125 000 0
1.0×10^{-6}	6.153 124 399 1	6.153 125 000 0	6.153 125 000 0
1.0×10^{-8}	6.153 124 999 9	6.153 125 000 0	6.153 125 000 0
1.0×10^{-10}	6.153 125 000 0	6.153 125 000 0	6.153 125 000 0
1.0×10^{-12}	6.153 125 000 0	6.153 125 000 0	6.153 125 000 0
1.0×10^{-14}	6.153 125 000 0	6.153 125 000 0	6.153 125 000 0
1.0×10^{-16}	6.153 125 000 0	6.153 125 000 0	6.153 125 000 0
1.0×10^{-18}	6.153 125 000 0	6.153 125 000 0	6.153 125 000 0
1.0×10^{-20}	6.153 125 000 0	6.153 125 000 0	6.153 125 000 0
1.0×10^{-22}	6.153 125 000 0	6.153 125 000 0	6.153 125 000 0
1.0×10^{-24}	6.153 125 000 0	6.153 125 000 0	6.153 125 000 0
1.0×10^{-26}	6.153 125 000 0	6.153 125 000 0	6.153 125 000 0
1.0×10^{-28}	6.153 125 000 0	6.153 125 000 0	6.153 125 000 0
1.0×10^{-30}	6.153 125 000 0	6.153 125 000 0	6.153 125 000 0
1.0×10^{-32}	6.153 125 000 0	6.153 125 000 0	6.153 125 000 0
1.0×10^{-34}	6.153 125 000 0	6.153 125 000 0	6.153 125 000 0
实数空间解		6.153 125 000 0	

表3 求解 β 迭代过程

Tab.3 Iterative process for β

迭代次数	β	设计点		
		A^*/m^2	P_1^*/N	P_2^*/N
1	1.225 4	0.002 6	39 022	39 742
2	1.019 1	0.002 6	37 820	38 499
3	1.014 0	0.002 6	37 909	38 592
4	1.014 0	0.002 6	37 912	38 594
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
100	1.014 0	0.002 6	37 912	38 594

5 结论

复数变量求导法效率高,精度高,应用简单方便,只需在复数空间进行有限元计算,便可求出响应量的偏导数,用在随机有限元中,可求得响应量的方差.与直接求偏导法相比,省去了矩阵的求逆和求导等大量运算,计算过程大大简化.

在随机有限元一次二阶矩的迭代格式中,取复数空间有限元的计算结果的实部作为响应量的值,虚部用来求解响应量的偏导.这样在求 β 的迭代过程中,只需进行复数空间的有限元计算,无需再在实数空间进行计算.

随机有限元法可解决工程中的随机结构分析问题,是随机结构分析的有力工具.但其实现需要专门的程序,目前还没有商业软件可供利用.本文提出的复数变量法大大简化了SFEM和SFEMR的实现过程,为工程应用提供了一种现实可行的途径.

参考文献:

[1] 王建军,于长波,李其汉.工程中的随机有限元方法[J].应用力学学报,2009,26(2):297.
WANG Jianjun, YU Changbo, LI Qihan. Stochastic finite element methods in engineering[J]. Chinese Journal of Applied Mechanics, 2009,26(2):297.

[2] 陈虬,刘先斌.随机有限元法及其工程应用[M].成都:西南交通大学出版社,1993.
CHEN Qiu, LIU Xianbin. Stochastic finite element methods and its application [M]. Chengdu: Press of Southwest Jiaotong University, 1993.

[3] 刘宁.可靠度随机有限元法及其工程应用[M].北京:水利水电出版社,2001.
LIU Ning. Reliability stochastic finite element methods and its application to engineering[M]. China Water Power Press,2001.

[4] Lyness J N, Moler C B. Numerical differentiation of analytic functions[J]. SIAM Journal on Numerical Analysis,1967(4):202.

[5] Vatsa V N. Computation of sensitivity derivatives of Navier-Stokes equations using complex variables [J]. Advances in Engineering Software, 2000, 31: 655.

[6] Daniel Contreras Mundstock, Rogério José Marczak. Boundary element sensitivity evaluation for elasticity problems using complex variable method[J]. Struct Multidisc Optim, 2009, 38: 423.

[7] Gao X W, Liu D D, Chen P C. Internal stresses in inelastic BEM using complex-variable differentiation [J]. Computational Mechanics, 2002,28: 40.

[8] 张新培.建筑结构可靠度分析与设计[M].北京:科学出版社,2001.
ZHANG Xinpei. Reliability analysis and design of building strictures[M]. Beijing: Science Press, 2001.