

考虑交易对手违约的单名 LCDS 及其 CVA 计算

梁进¹, 王涛², 杨晓丽¹

(1. 同济大学 数学系, 上海 200092; 2. 兴业证券股份有限公司, 上海 200135)

摘要: 分析了贷款信用违约互换(LCDS)的主要风险并建立了其定价模型. 在约化方法框架下, 利用单因子反 CIR(Cox-Ingersoll-Ross)模型来刻画早偿和违约的负相关性和非负性, 并在此假定下得到定价公式的封闭解. 在此基础上考虑了交易对手可违约的单名 LCDS 的信用价值调整(CVA)的计算模型, 在模型中加入 LCDS 卖方即交易对手的违约强度, 并通过一个非线性偏微分方程对模型进行求解. 最后, 基于 CVA 计算模型和数值结果, 讨论了错位风险. 结果表明: 考虑交易对手违约的 LCDS 价格将低于普通 LCDS, 且价差(CVA)随 LCDS 合约期限、利率和参考贷款与交易对手违约相关性的增大而增大; 考虑交易对手违约的 LCDS 公平保费率也低于普通 LCDS; 当参考贷款与交易对手负相关时, CVA 的值随负相关程度的增大而减小.

关键词: 贷款信用违约互换(LCDS); 约化模型; 单因子反 CIR(Cox-Ingersoll-Ross)模型; 信用价值调整(CVA)计算; 错位风险

中图分类号: F830.9

文献标志码: A

Single Name LCDS and Related CVA Calculation Based on a Consideration of Counterparty Default

LIANG Jin¹, WANG Tao², YANG Xiaoli¹

(1. Department of Mathematics, Tongji University, Shanghai 200092, China; 2. Industrial Securities Co. Ltd., Shanghai 200135, China)

Abstract: A pricing model for loan-only credit default swap (LCDS) with negative correlation between prepayment and default is established in the reduced form framework. A closed form pricing formula is obtained by one factor inverse Cox-Ingersoll-Ross(CIR) model. Then, a calculation scheme for credit value adjustment (CVA) for LCDS is given, where the counterparty risk of the LCDS is considered, on the basis of the pricing formula. Moreover, a wrong way risk-related issue is discussed. The research indicates that the price of a

LCDS contract with counterparty credit risk (CCR) is lower than that without CCR, and the CVA increases with the termination of the LCDS, the interest rate and the correlation between the reference loan and the counterparty. The spread for an LCDS with CCR is lower than that of a normal LCDS. If the reference loan is negatively correlated with the counterparty, the CVA decreases with the absolute value of the correlation coefficient.

Key words: loan-only credit default swap (LCDS); reduced form framework; one factor inverse Cox-Ingersoll-Ross(CIR) model; credit value adjustment(CVA); wrong way risk

贷款信用违约互换(LCDS)是在传统信用违约互换(CDS)基础上发展而来的一种金融衍生产品. 一张 LCDS 合约涉及三方: 合约的售出者 A 方, 合约的购买者 B 方及贷款的发行者 C 方. 借款人 C 向银行 B 申请抵押贷款, B 面临 C 可能无法按时偿付本息的信用风险, 于是 B 与 A 签订一张 LCDS 合约, 参考债务为有抵押的贷款, A 为保护卖方, B 为保护买方. B 定期向 A 支付保费, 直至合约参考实体 C 发生信用事件. 在 C 发生信用事件时, B 相应的损失由 A 来承担. 由于贷款是可提前偿付的, 因此 C 亦可能提前偿还贷款而造成 LCDS 合约的提前终止, 此时 A 方无须赔偿. LCDS 担保的贷款不仅存在违约风险, 同时存在早偿风险. 这是 LCDS 和 CDS 最大的区别.

常用的 LCDS 定价框架一般有结构化方法和约化方法两种. 以往研究这一问题的文献中, 吴森等^[1]使用结构化方法, 定义参考贷款的违约边界, 并假设早偿率为常数, 考虑公司资产与抵押品价值的变化对 LCDS 进行定价, 并得出 LCDS 保费率的封闭解. Liang 等^[2-3]使用约化方法, 并用单因子模型刻画违

收稿日期: 2011-10-02

第一作者: 梁进(1958—), 女, 教授, 博士生导师, 理学博士, 主要研究方向为信用衍生产品定价及金融风险计算与控制.

E-mail: liang_jin@tongji.edu.cn

通讯作者: 杨晓丽(1988—), 女, 博士生, 主要研究方向为最优控制问题和 HJB 方程. E-mail: changyansummer@163.com

约强度,用 Top down 模型对一篮子 LCDS 产品进行定价,导出相应的偏微分方程并得到了显式解. Wang 等^[4-5]使用约化方法和单因子模型,在 Bottom up 模型框架下对一篮子 LCDS 进行定价,并使用反 CIR(Cox-Ingersoll-Ross)模型,刻画违约强度之间的负相关性.

大多数的场外衍生品交易都有交易对手的信用风险(counterparty credit risk, CCR),由此产生了交易对手估值调整(counterparty valuation adjustment, CVA).为了更好地理解 CVA 的内涵,介绍错位风险(wrong way risk),即风险暴露与交易对手信用质量负相关的一种风险.在学术界,许多学者都专注于 CCR 或 CVA 的研究,如文献[6-8].在前几年的金融风暴中,由于忽略交易对手风险而对信用产品的错误估价,以此所引起的错位风险起着相当大的作用.所以,对信用衍生产品的交易对手估值调整变得越来越重要.

本文从对早偿与违约的负相关性的建模入手,在约化方法的框架下,建立了单因子反 CIR 模型,对早偿与违约过程作了条件独立假设^[9],给出了单名 LCDS 定价的基本模型和一般定价公式.在此基础上,给出了考虑交易对手违约的单名 LCDS 的 CVA 值,得到了 CVA 的计算模型,其计算公式可由一个非线性偏微分方程的解来表达.最后,对错位风险作了一些讨论,举了一个规避错位风险的例子,并通过数值计算的结果得以验证.

1 LCDS 问题的研究

1.1 条件独立假设下的约化模型

定义概率空间 $(\Omega, \mathcal{G}_t, \{\mathcal{G}_i\}_{i \geq 0}, P)$.其中, $\mathcal{G} = \{\mathcal{G}_i\}_{i \geq 0}$ 表示市场中所有信息所构成的信息流, $\mathcal{G}_i = h_i^1 \vee h_i^2 \vee \mathcal{F}_i$, $\{\mathcal{F}_i\}_{i \geq 0}$ 包含了市场上所有可知信息, σ -域流 h_i^i 包括了所有观察早偿与违约的信息; P 是风险中性概率.假设 τ_1 表示标的贷款的早偿时间, τ_2 表示标的贷款的违约时间, τ_1 和 τ_2 是 \mathcal{G}_t -停时.设 $\lambda^{(1)}$ 是早偿强度过程, $\lambda^{(2)}$ 是违约强度过程,则由约化法定义可知:从 t 时刻开始,到 s 时刻不发生违约的概率和不发生早偿的概率分别为

$$P\{\tau_i > s \mid \mathcal{F}_t\} = E[e^{-\int_t^s \lambda_u^{(i)} du} \mid \mathcal{F}_t], \quad i = 1, 2 \quad (1)$$

如果已知了 \mathcal{F}_t 中的所有信息,则事件 $\{\tau_1 > s\}$ 与 $\{\tau_2 > s\}$ 是条件独立的,则有

$$P\{\tau_1 > s, \tau_2 > s \mid \mathcal{F}_t\} = E[e^{-\int_t^s (\lambda_u^{(1)} + \lambda_u^{(2)}) du} \mid \mathcal{F}_t],$$

对所有 $s > t$ (2)

假设 $P_t^{\text{cancel}}(s) (s \geq t)$ 表示站在 t 时刻一张 LCDS 合约在 s 时刻前早偿的概率, $P_t^{\text{default}}(s)$ 表示站在 t 时刻一张 LCDS 合约在 s 时刻前违约的概率,由于 LCDS 合约中的早偿和违约时间是互斥的,那么 $1 - P_t^{\text{cancel}}(s) - P_t^{\text{default}}(s) = P_t^{\text{survive}}(s)$ 表示一张 LCDS 合约在 s 时刻前的生存概率.则有

$$P_t^{\text{survive}}(s) = 1_{\{\tau > t\}} E[e^{-\int_t^s (\lambda_u^{(1)} + \lambda_u^{(2)}) du} \mid \mathcal{F}_t] \quad (3)$$

并且(见文献[1])

$$P_t^{\text{default}}(s) = 1_{\{\tau > t\}} E\left[\int_t^s \lambda_u^{(2)} e^{-\int_t^u (\lambda_v^{(1)} + \lambda_v^{(2)}) dv} du \mid \mathcal{F}_t\right],$$

$$P_t^{\text{cancel}}(s) = 1_{\{\tau > t\}} E\left[\int_t^s \lambda_u^{(1)} e^{-\int_t^u (\lambda_v^{(1)} + \lambda_v^{(2)}) dv} du \mid \mathcal{F}_t\right] \quad (4)$$

其中 $\tau = \min\{\tau_1, \tau_2\}$.下文中将简记条件期望 $E[\cdot \mid \mathcal{F}_t]$ 与 $E_t[\cdot]$.

1.2 单名 LCDS 定价公式

LCDS 的早偿与违约是互斥的,在到期日前,如果 LCDS 既没有违约也没有早偿,那么这张合约继续生存.当 LCDS 因为参考贷款被提前偿付而提前终止合约时,除了最后一期应缴保费(按比例缴付),没有其他的现金流发生.所以,LCDS 和标准的 CDS 一样,只有两个现金流,即买方的保费现金流和卖方的赔付现金流.一般而言保费是定期支付的,赔付是当违约发生时进行支付.当贷款被提前支付或者发生违约时,当期的部分保费将在下一个保费支付日进行支付.

对于买方来说,一张 LCDS 的价值等于赔付的现值与保费现值的差,即

$$V(\text{LCDS}) = E[\text{PV}(\text{赔付})] - E[\text{PV}(\text{保费})] \quad (5)$$

其中 $\text{PV}(\cdot)$ 表示对括号内现金流量求现值.

假设合约的到期日为 T ,在 t 时刻签订的合约的保费率为 S_t ,参考贷款的面值或公允价值为 F .假设保费支付日为 $t_1 < t_2 < \dots < t_M = T$,其中 M 就为总期数.令 Δt 表示相邻两次保费支付日的时间间隔.

根据式(1)~(5),保费的现值(设为 $\text{PV}_{\text{premium}}$)和赔付的现值(设为 $\text{PV}_{\text{protection}}$)分别为

$$\text{PV}_{\text{premium}} = 1_{\{\tau_1 > t\}} 1_{\{\tau_2 > t\}} S_t F \Delta t \sum_{t_i \geq t} \left\{ E_t \left[D(t_i, t) e^{-\int_t^{t_i} (\lambda_u^{(1)} + \lambda_u^{(2)}) du} \right] + \frac{1}{\Delta t} E_t \left[\int_{t \vee t_{i-1}}^{t_i} D(s, t) (s - t_{i-1}) (\lambda_s^{(1)} + \lambda_s^{(2)}) e^{-\int_t^s (\lambda_u^{(1)} + \lambda_u^{(2)}) du} ds \right] \right\} \quad (6)$$

$$PV_{\text{protection}} = 1_{\{t_1 > t\}} 1_{\{t_2 > t\}} F \cdot E_t \left[\int_t^T (1-R) D(s,t) \lambda_s^{(2)} e^{-\int_t^s (\lambda_u^{(1)} + \lambda_u^{(2)}) du} ds \right] \quad (7)$$

式中: R 是违约回收率; $D(s,t)$ 表示从 s 到 t 时刻的贴现因子, $D(s,t) = e^{-\int_t^s r_u du}$, 其中 r_t 为无风险利

$$S_t = \frac{E_t \left[\int_t^T (1-R) D(s,t) \lambda_s^{(2)} e^{-\int_t^s (\lambda_u^{(1)} + \lambda_u^{(2)}) du} ds \right]}{\sum_{t_i \geq t} \left\{ \Delta t E_t [D(t_i,t) e^{-\int_t^{t_i} (\lambda_u^{(1)} + \lambda_u^{(2)}) du}] + E_t \left[\int_{t \vee t_{i-1}}^{t_i} D(s,t) (s-t_{i-1}) (\lambda_s^{(1)} + \lambda_s^{(2)}) e^{-\int_t^s (\lambda_u^{(1)} + \lambda_u^{(2)}) du} ds \right] \right\}} \quad (9)$$

在下一章中,将假设利率为随机过程而回收率为常数,对 LCDS 的保费进行计算。

1.3 单因子反 CIR 模型及模型求解

为计算 LCDS 定价模型中的 $P_t^{\text{cancel}}(s)$, $P_t^{\text{default}}(s)$ 和 $P_t^{\text{survive}}(s)$, 需要对早偿强度过程 $\lambda_t^{(1)}$ 和违约强度过程 $\lambda_t^{(2)}$ 进行建模。

考虑违约率和早偿率通过一个公共因子而相关。利率作为一个重要的宏观经济影响因素,充当这个公共因子是适合的。一般情形下,当利率上升时,贷款的成本提高,贷款的违约率也相应提高,于是可以认为违约强度与利率呈正相关关系,而利率与早偿的关系比较复杂。但当利率与早偿率正相关时,可以认为早偿是一种特殊的回收率为 1 的违约,可以和违约同样处理,其对应 LCDS 保费率计算的模型与一般 CDS 合约相似。而当早偿率与利率负相关(如贷款为固定利率)的情形下,LCDS 的定价是个有趣的问题,而本文关心的就是这种情形下的 LCDS 定价问题。取利率 r_t 作为系统性的风险因子,而 $\beta_t^{(1)}$ 和 $\beta_t^{(2)}$ 则分别表示早偿和违约的特有因子即非系统性风险因子。此时,模型中的可知信息流即为 $\mathcal{F}_t = \sigma(r_s, \beta_s^{(1)}, \beta_s^{(2)}, s \leq t)$ 。进而,假设早偿与违约的负相关性用下面的模型来刻画:

$$\lambda_t^{(1)} = \frac{a_1}{r_t} + b_1 \beta_t^{(1)}, \quad \lambda_t^{(2)} = a_2 r_t + b_2 \beta_t^{(2)} \quad (10)$$

式中: a_i 和 b_i 都是非负常数,并且 $r_t, \beta_t^{(1)}$ 和 $\beta_t^{(2)}$ 是相互独立的随机过程。对于信用衍生品而言,信用事件发生的概率不可能为负,所以在该模型中,采用了反比例函数关系来刻画 $\lambda_t^{(1)}$ 和 $\lambda_t^{(2)}$ 的负相关性。这样如

$$E_t \left[\int_t^s \lambda_u^{(1)} e^{-\int_t^u (\lambda_v^{(1)} + \lambda_v^{(2)} + r_v) dv} du \right] = \int_t^s \left\{ E_t \left[\frac{a_1}{r_u} e^{-\int_t^u ((a_2+1)r_v + \frac{a_1}{r_v}) dv} \right] E_t \left[e^{-\int_t^u b_1 \beta_v^{(1)} dv} \right] E_t \left[e^{-\int_t^u b_2 \beta_v^{(2)} dv} \right] + E_t \left[b_1 \beta_u^{(1)} e^{-\int_t^u b_1 \beta_v^{(1)} dv} \right] E_t \left[e^{-\int_t^u ((a_2+1)r_v + \frac{a_1}{r_v}) dv} \right] E_t \left[e^{-\int_t^u b_2 \beta_v^{(2)} dv} \right] \right\} du \quad (14)$$

所以, $E_t \left[e^{-\int_t^s (\lambda_u^{(1)} + \lambda_u^{(2)} + r_u) du} \right]$ 和 $E_t \left[\int_t^s \lambda_u^{(1)} e^{-\int_t^u (\lambda_v^{(1)} + \lambda_v^{(2)} + r_v) dv} du \right]$ 的求解转化为求解如下两个基本类型的期望:

率。函数 1_A 为示性函数,定义如下:

$$1_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases} \quad (8)$$

令 $PV_{\text{premium}} = PV_{\text{protection}}$ 即可得名单 LCDS 的公平保费率为

果能保证 r_t 是正过程,那么就可以保证强度过程 $\lambda_t^{(1)}$ 和 $\lambda_t^{(2)}$ 是正随机过程。

假设瞬时无风险利率 r_t 和 $\beta_t^{(i)}$ ($i=1,2$) 满足 CIR 过程,即

$$dr_t = \kappa_0 (\theta_0 - r_t) dt + \sigma_0 \sqrt{r_t} dW_t^{(0)},$$

$$d\beta_t^{(i)} = \kappa_i (\theta_i - \beta_t^{(i)}) dt + \sigma_i \sqrt{\beta_t^{(i)}} dW_t^{(i)} \quad (11)$$

式中: $\kappa_0, \theta_0, \sigma_0$ 是正的常数, $2\kappa_0\theta_0 > \sigma_0^2$; $\kappa_i, \theta_i, \sigma_i$ 是正的常数, $2\kappa_i\theta_i > \sigma_i^2, i=1,2$ 。此时可以满足 $r_t, \beta_t^{(i)}$ ($i=1,2$) 的非负性。从而 $\lambda_t^{(1)}, \lambda_t^{(2)}$ 非负。 $W_t^{(0)}, W_t^{(1)}, W_t^{(2)}$ 是相互独立的标准布朗运动。

模型(10)中 $\lambda_t^{(1)}$ 含有 $1/r_t$ 项,其为 CIR 过程的倒数,满足反 CIR 过程,以此来刻画 $\lambda_t^{(1)}$ 与 r_t 的负相关性。由 Itô 公式, $\lambda_t^{(1)}$ 满足以下随机微分方程:

$$\frac{d\lambda_t^{(1)}}{\lambda_t^{(1)}} = [\kappa_0 - (\kappa_0\theta_0 - \sigma_0^2)\lambda_t^{(1)}] dt - \sigma_0 \sqrt{\lambda_t^{(1)}} dW_t^{(0)} \quad (12)$$

在 $\kappa_0\theta_0 > \sigma_0^2, \kappa_0 > 0, \theta_0 > 0$ 的条件下,原 CIR 过程 r_t 的均值回复性和恒正性自然满足。

建立了单因子反 CIR 模型后,便可以对定价公式(9)进行求解。求解的关键在于求类似于 $E_t \left[e^{-\int_t^s (\lambda_u^{(1)} + \lambda_u^{(2)} + r_u) du} \right]$ 和 $E_t \left[\int_t^s \lambda_u^{(1)} e^{-\int_t^u (\lambda_v^{(1)} + \lambda_v^{(2)} + r_v) dv} du \right]$ 的条件期望。

将模型(10)代入两个期望的表达式计算可得

$$E_t \left[e^{-\int_t^s (\lambda_u^{(1)} + \lambda_u^{(2)} + r_u) du} \right] = E_t \left[e^{-\int_t^s ((a_2+1)r_v + \frac{a_1}{r_v}) dv} \right] E_t \left[e^{-\int_t^s b_1 \beta_v^{(1)} dv} \right] E_t \left[e^{-\int_t^s b_2 \beta_v^{(2)} dv} \right] \quad (13)$$

$$(I) E_t \left[\beta_u^{(i)} e^{-\int_t^u b_i \beta_v^{(i)} dv} \right],$$

$$(II) E_t \left[r_u^\gamma e^{-\int_t^u (r_v + (a_2+1)r_v) dv} \right], \quad \gamma = -1, 0, 1 \quad (15)$$

形式(I)的期望不易直接进行求解。定义辅助函

数 $A_i(\beta^{(i)}, t; u, k, z) = E_t[e^{-\int_t^u k\beta_v^{(i)} dv + \varphi_u^{(i)}}]$, $i = 1, 2$, 则
 $\partial_z A_i(\beta^{(i)}, t; u, k, z) = E_t[\beta_u^{(i)} e^{-\int_t^u k\beta_v^{(i)} dv + \varphi_u^{(i)}}]$,
 $E_t[\beta_u^{(i)} e^{-\int_t^u b_1 \beta_v^{(i)} dv}] = \partial_z A_i(\beta^{(i)}, t; u, k, z) |_{z=0}$. 由
 Feynman-Kac 公式, 可以得到 $A_i(\beta^{(i)}, t; u, k, z)$ 是下
 面偏微分方程的 Cauchy 问题的解:

$$A_i(\beta^{(i)}, t; u, k, z) = \left[\frac{(\sigma_i^2 z - 2d_2)e^{-d_1(u-t)} + (2d_1 - \sigma_i^2 z)e^{-d_2(u-t)}}{(\sigma_i^2 z - 2d_2) + (2d_1 - \sigma_i^2 z)} \right] \frac{2\kappa_i \theta_i}{\sigma_i^2} e^{\frac{2\beta^{(i)}(\sigma_i^2 z - 2d_2)d_1 e^{-d_1(u-t)} + (2d_1 - \sigma_i^2 z)d_2 e^{-d_2(u-t)}}{(\sigma_i^2 z - 2d_2)e^{-d_1(u-t)} + (2d_1 - \sigma_i^2 z)e^{-d_2(u-t)}}$$
 (17)

其中 $d_1 = \frac{\kappa_i - \sqrt{\kappa_i^2 + 2k\sigma_i^2}}{2}$, $d_2 = \frac{\kappa_i + \sqrt{\kappa_i^2 + 2k\sigma_i^2}}{2}$.

$$\partial_z A_i = \left\{ \frac{-2\kappa_i \theta_i (e^{-d_1(u-t)} - e^{-d_2(u-t)})}{(\sigma_i^2 z - 2d_2)e^{-d_1(u-t)} + (2d_1 - \sigma_i^2 z)e^{-d_2(u-t)}} + \frac{\beta^{(i)} e^{-(d_1+d_2)(u-t)} (d_1 - d_2)^2}{[(\sigma_i^2 z - 2d_2)e^{-d_1(u-t)} + (2d_1 - \sigma_i^2 z)e^{-d_2(u-t)}]^2} \right\} \cdot \left[\frac{(\sigma_i^2 z - 2d_2)e^{-d_1(u-t)} + (2d_1 - \sigma_i^2 z)e^{-d_2(u-t)}}{(\sigma_i^2 z - 2d_2) + (2d_1 - \sigma_i^2 z)} \right] \frac{2\kappa_i \theta_i}{\sigma_i^2} e^{\frac{2\beta^{(i)}(\sigma_i^2 z - 2d_2)d_1 e^{-d_1(u-t)} + (2d_1 - \sigma_i^2 z)d_2 e^{-d_2(u-t)}}{(\sigma_i^2 z - 2d_2)e^{-d_1(u-t)} + (2d_1 - \sigma_i^2 z)e^{-d_2(u-t)}}$$
 (18)

再定义 $B(r, t; u, a, b, \gamma) = E_t[r_u^\gamma e^{-\int_t^u (a + \frac{b}{r_v}) dv}]$ ($i = 1, 2, \gamma = -1, 0, 1$) 以计算形式 (II) 的期望. 由 Feynman-Kac 公式, $B(r, t; u, a, b, \gamma)$ 满足以下偏微分方程的 Cauchy 问题:

$$\begin{cases} \frac{\partial A_i}{\partial t} + \kappa_i(\theta_i - \beta^{(i)}) \frac{\partial A_i}{\partial \beta^{(i)}} + \frac{\sigma_i^2}{2} \beta^{(i)} \frac{\partial^2 A_i}{\partial \beta^{(i)2}} - k\beta^{(i)} A_i = 0 \\ A_i(\beta^{(i)}, t; u, k, z) |_{t=u} = e^{\varphi_u^{(i)}} \end{cases}$$
 (16)

由文献[10]知上述偏微分方程有仿射形结构解如下:

同时能够得到 $\partial_z A_i(\beta^{(i)}, t; u, k, z)$ 的表达式为

$$\begin{cases} \frac{\partial B}{\partial t} + \kappa_0(\theta_0 - r) \frac{\partial B}{\partial r} + \frac{\sigma_0^2}{2} r \frac{\partial^2 B}{\partial r^2} - \left(ar + \frac{b}{r} \right) B = 0 \\ B(r, t; u, a, b, \gamma) |_{t=u} = r^\gamma \end{cases}$$
 (19)

该方程有合流超几何函数闭合解(见文献[11])如下:

$$B(r, t; u, a, b, \gamma) = e^{-\gamma_1 r} r^{\gamma_2} e^{-(\kappa_0 \theta_0 \gamma_1 + \kappa_0 \gamma_2 + \gamma_1 \gamma_2 \sigma_0^2)(u-t)} \cdot \left\{ \eta_{u-t}^{\gamma_1+1} (\eta_{u-t} - \nu_1)^{\nu_2 - \mu - \gamma - 1} \frac{\Gamma(\mu - \nu_2 + \gamma + 1)}{\Gamma(\mu + 1)} \exp[-\eta_{u-t} e^{-d(u-t)}] \Phi\left(\mu - \nu_2 + \gamma + 1, \mu + 1; \frac{\eta_{u-t} e^{-d(u-t)}}{\eta_{u-t} - \nu_1}\right) \right\}$$
 (20)

其中

$$\nu_1 = \frac{\sqrt{\kappa_0^2 + 2a\sigma_0^2} - \kappa_0}{\sigma_0^2},$$

$$\nu_2 = \frac{-\left(\kappa_0 \theta_0 - \frac{\sigma_0^2}{2}\right) + \sqrt{-\left(\kappa_0 \theta_0 - \frac{\sigma_0^2}{2}\right)^2 + 2b\sigma_0^2}}{\sigma_0^2}$$
 (21)

$$\eta_{u-t} = -\frac{2d}{\sigma_0^2 [e^{-d(u-t)} - 1]}, \mu = \frac{2c}{\sigma_0^2} - 1, d = \kappa_0 + \sigma_0^2 \nu_1$$
 (22)

$\Phi(\xi, \nu; z)$ 是合流超几何函数 (confluent hypergeometric function)

$$\Phi(\xi, \nu; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\xi)_k}{k! (\nu)_k} z^k,$$

$$(\xi)_k = \xi(\xi+1)\cdots(\xi+k-1), k > 0, (\xi)_0 = 1$$
 (23)

$\Gamma(x)$ 为伽玛函数

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} \frac{t^{x-1}}{e^t} dt, x > 0$$
 (24)

方程(16)和(19)的具体求解过程见文献[9].

由上述 $A_i(\beta^{(i)}, t; u, k, z)$, $\partial_z A_i(\beta^{(i)}, t; u, k, z)$ 和

$B(r, t; u, a, b, f)$ 的显式表达式, 定价公式(9)中的期望就能显式地表达出来, 从而可以得到单名 LCDS 定价的封闭解公式.

2 单名 LCDS 的 CVA 计算模型

类似于第 1 节, 定义概率空间 $(\Omega, \mathcal{G}_t, \{\mathcal{G}_t\}_{t \geq 0}, P)$, $\mathcal{G}_t = h_t^1 \vee h_t^2 \vee h_t^3 \vee \mathcal{F}_t$, 其中 h_t^3 包括了所有交易对手的违约信息, P 是风险中性概率. 假设 τ_1 表示标的贷款的早偿时间, τ_2 表示标的贷款的违约时间, τ_3 表示交易对手的违约时间, τ_1, τ_2 和 τ_3 是 \mathcal{G}_t -停时, 交易对手的违约强度为 $\lambda_i^{(3)}$.

继续沿用第 1 节中单名 LCDS 的符号假设. 假设 V 为考虑 CCR 的单名 LCDS 的价值, U 为不考虑 CCR 的单名 LCDS 的价值, R_1 为标的贷款发生违约时的回收率, 即当标的发生违约时, LCDS 卖方的赔付为 $F(1-R_1)$. 设 R_2 为交易对手 (LCDS 卖方) 发生违约时的回收率, 则 LCDS 卖方先于贷款违约或者早偿时, 买方的损失 (或收益) 为 $R_2 V^+ - V^-$. 考虑 CCR 的单名 LCDS 的现金流就是在不考虑 CCR 的

LCDS 现金流基础上加入 LCDS 卖方先于参考贷款违约的条款:当 LCDS 的卖方先于参考贷款发生违约时,买方的损失(或收益)为 $R_2V^+ - V^-$. 根据 1.3 节的模型, t 时刻,不含 CCR 的名单 LCDS 的价值为

$$U(t) = 1_{\{t > t\}} E_t \left\{ \int_t^T (1 - R_1) D(s, t) \lambda_s^{(2)} e^{-\int_t^s (\lambda_u^{(1)} + \lambda_u^{(2)}) du} ds - \sum_{t_i \geq t} \left[\Delta t S_t D(t_i, t) e^{-\int_t^{t_i} (\lambda_u^{(1)} + \lambda_u^{(2)}) du} + S_t \int_{t \vee t_{i-1}}^{t_i} D(s, t) (s - t_{i-1}) (\lambda_s^{(1)} + \lambda_s^{(2)}) e^{-\int_t^s (\lambda_u^{(1)} + \lambda_u^{(2)}) du} ds \right] \right\} \quad (25)$$

而含 CCR 的名单 LCDS 的价值为

$$V(t) = 1_{\{t > t\}} E_t \left\{ \int_t^T (1 - R_1) D(s, t) \lambda_s^{(2)} e^{-\int_t^s (\lambda_u^{(1)} + \lambda_u^{(2)} + \lambda_u^{(3)}) du} ds - \sum_{t_i \geq t} \left[\Delta t S_t D(t_i, t) e^{-\int_t^{t_i} (\lambda_u^{(1)} + \lambda_u^{(2)} + \lambda_u^{(3)}) du} + S_t \int_{t \vee t_{i-1}}^{t_i} D(s, t) (s - t_{i-1}) (\lambda_s^{(1)} + \lambda_s^{(2)}) e^{-\int_t^s (\lambda_u^{(1)} + \lambda_u^{(2)} + \lambda_u^{(3)}) du} ds \right] - \int_t^T (R_2V^+ - V^-) D(s, t) \lambda_s^{(3)} e^{-\int_t^s (\lambda_u^{(1)} + \lambda_u^{(2)} + \lambda_u^{(3)}) du} ds \right\} \quad (26)$$

其中一些符号假设与第 1.1~1.3 节类似. 那么名单 LCDS 的 CVA 在 t 时刻的估值即为 $CVA(t) = U(t) - V(t)$. 再利用单因子反 CIR 模型对 $\lambda_t^{(1)}, \lambda_t^{(2)}$ 和 $\lambda_t^{(3)}$ 建模得

$$\lambda_t^{(1)} = \frac{a_1}{r_t} + b_1 \beta_t^{(1)}, \lambda_t^{(2)} = a_2 r_t + b_2 \beta_t^{(2)}, \lambda_t^{(3)} = a_3 r_t + b_3 \beta_t^{(3)} \quad (27)$$

其中 a_i 和 b_i 均为非负常数. 假设公共因子 r_t 和特有因子 $\beta_t^{(i)} (i=1, 2, 3)$ 由 CIR 过程来驱动, 则

$$dr_t = \kappa_0 (\theta_0 - r_t) dt + \sigma_0 \sqrt{r_t} dW_t^{(0)}, d\beta_t^{(i)} = \kappa_i (\theta_i - \beta_t^{(i)}) dt + \sigma_i \sqrt{\beta_t^{(i)}} dW_t^{(i)} \quad (28)$$

其中 $\kappa_0, \theta_0, \sigma_0$ 是正的常数, $2\kappa_0\theta_0 > \sigma_0^2; \kappa_i, \theta_i, \sigma_i$ 是正的常数, $2\kappa_i\theta_i > \sigma_i^2, i=1, 2, 3; W_t^{(0)}, W_t^{(1)}, W_t^{(2)}, W_t^{(3)}$ 是相互独立的标准布朗运动.

式(25)在第 1.3 节中已经得到了封闭解. 将式(26)写成如下形式:

$$V(t) = W(t) + E_t \left[\int_t^T (R_2V^+ - V^-) \lambda_s^{(3)} e^{-\int_t^s (\lambda_u^{(1)} + \lambda_u^{(2)} + \lambda_u^{(3)} + r_u) du} ds \right] \quad (29)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial V'_{n+1}}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma_0^2 \frac{\partial^2 V'_{n+1}}{\partial r^2} + \kappa_0 (\theta_0 - r) \frac{\partial V'_{n+1}}{\partial r} + \sum_{i=1}^3 \left(\frac{1}{2} \sigma_i^2 \frac{\partial^2 V'_{n+1}}{\partial \beta_i^{(2)2}} + \kappa_i (\theta_i - r) \frac{\partial V'_{n+1}}{\partial \beta_i} \right) - (\lambda^{(1)}(r, \beta^{(1)}) + \lambda^{(2)}(r, \beta^{(2)}) + \lambda^{(3)}(r, \beta^{(3)}) + r) V' = -\lambda^{(3)}(r, \beta^{(3)}) (R_2V_n^+ - V_n^-) \\ V'_{n+1} |_{t=T} = 0 \end{cases} \quad (31)$$

其中 V'_n 是上一步迭代的结果. 文献[12]中给出了该迭代收敛性的证明.

3 数值分析

利用第 2 节最后提出的迭代方法对名单 LCDS 的 CVA 值进行计算, 并作数值分析. 在第 2 节的迭代格式中, 在每一步只需求解四维线性偏微分方程, 并将方程分解成若干个一维方程, 这些方程是有封

其中 $W(t)$ 可以用第 1.3 节的方法写成 $A_i(\beta^{(i)}, t; u, k, z), \partial_z A_i(\beta^{(i)}, t; u, k, z)$ 和 $B(r, t; u, a, b, \gamma)$ 的函数形式, 而后一部份期望利用 Feynman-Kac 公式后, 得到一个非线性偏微分方程

$$\begin{cases} \frac{\partial V'}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma_0^2 \frac{\partial^2 V'}{\partial r^2} + \kappa_0 (\theta_0 - r) \frac{\partial V'}{\partial r} + \sum_{i=1}^3 \left(\frac{1}{2} \sigma_i^2 \frac{\partial^2 V'}{\partial \beta_i^{(2)2}} + \kappa_i (\theta_i - r) \frac{\partial V'}{\partial \beta_i} \right) - (\lambda^{(1)}(r, \beta^{(1)}) + \lambda^{(2)}(r, \beta^{(2)}) + \lambda^{(3)}(r, \beta^{(3)}) + r) V' = -\lambda^{(3)}(r, \beta^{(3)}) (R_2V^+ - V^-) \\ V' |_{t=T} = 0 \end{cases} \quad (30)$$

其中 V' 是期望

$$E_t \left[\int_t^T (R_2V^+ - V^-) \lambda_s^{(3)} e^{-\int_t^s (\lambda_u^{(1)} + \lambda_u^{(2)} + \lambda_u^{(3)} + r_u) du} ds \right] \text{ 的解.}$$

式(30)是一个非线性偏微分方程的终值问题, 根据压缩映射原理, 将用迭代的方法对其进行数值求解. 首先假设第 i 步迭代的线性偏微分方程的解为 V'_i . 当 $i=0$ 时, V'_0 即为 $U - W$; 当 $i=n+1$ 时, V'_{n+1} 即为以下线性偏微分方程的解:

闭解的. 这样, 经过一定的迭代步数, 就能得到 $V'(t)$ 的解, 进而得到 $V(t)$ 的解. 基本参数取定如下(当该参数被设为定值时取以下值):

$T=5, R_1=0.8, R_2=0.8, \Delta t=0.25, S_t=0.02, a_1=0.015, b_1=10, a_2=3, b_2=2, a_3=3, b_3=2, \kappa_0=0.15, \theta_0=0.03, \sigma_0=0.05, \kappa_i=0.15, \theta_i=0.03, \sigma_i=0.05, r_0=0.03, \beta^{(i)}=0.03; i=1, 2, 3$. 其中, $a_i, b_i (i=1, 2, 3)$ 为式(27)违约和早偿强度模型中的相应参数; $\kappa_0, \theta_0, \sigma_0$ 为式(28)公共因子 r_t 模型中的参数; $\kappa_i, \theta_i, \sigma_i$

为式(28)特有因子 $\beta_i^{(j)}$ ($i=1,2,3$)模型中的参数. r_0 , $\beta_i^{(j)}$ ($i=1,2,3$)为公共因子和特有因子在初始时刻的值.

图 1 显示,迭代一次以后, $V(t)$ 的值与未进行迭代时 $V(t)$ 的值(不考虑交易对手风险的 LCDS 合约价值)相差较大,说明是否考虑交易对手风险对 LCDS 合约价值有较明显的影响;当迭代次数 $n \geq 3$ 时, $V(t)$ 几乎不发生变化,说明了迭代的收敛速度非常快.也就是说,利用本文的模型计算 LCDS 的 CVA 值有较高的效率.

图 2 显示了单名 LCDS 的 CVA 值与公共因子利率 r_t 和合约期限 T 的关系.单名 LCDS 的 CVA 值与合约期限正相关,且在 T 相对较小时 CVA 增长较快.这一点很容易理解,因为当合约期限较长时,交易对手违约的可能性增大,故 CVA 值相应增大.单名 LCDS 的 CVA 值与无风险利率亦正相关,利率增大时,表明整个市场正在收紧,违约风险进而加大,故 CVA 值也会增大;从图中也可看出,在利率较小时, CVA 变化速率较小,而当利率较大时, CVA 增加的速率加快.

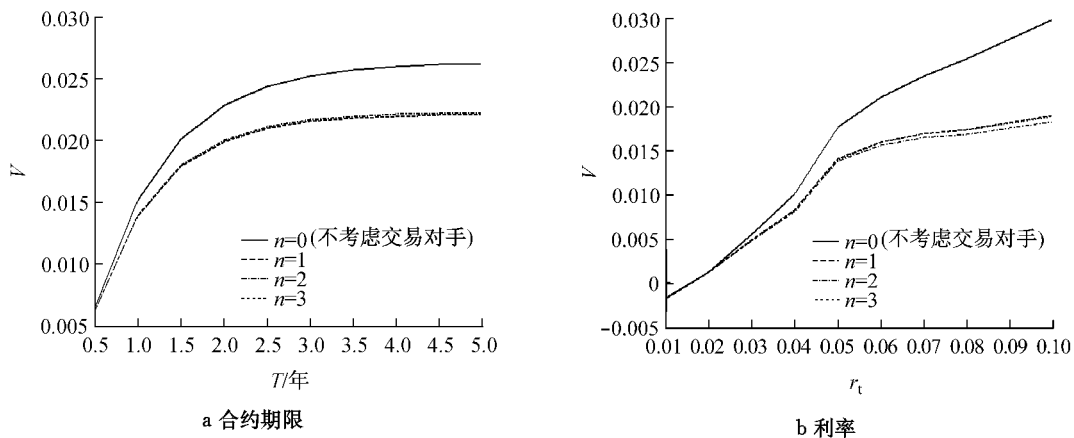


图 1 LCDS 合约价值与迭代次数的关系

Fig.1 Relationship between LCDS value and iteration times

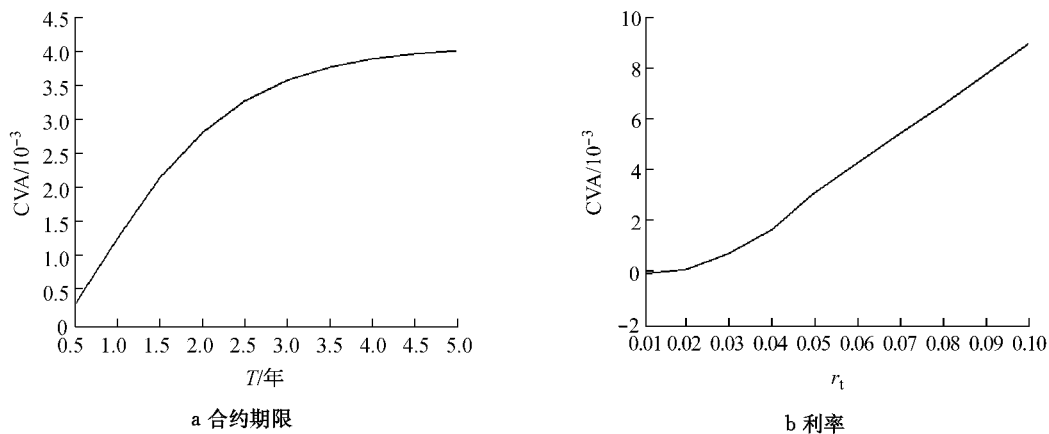


图 2 CVA 与合约期限以及利率的关系

Fig.2 Relationship among CVA, the contract term and the interest rate

以上是对保费费率已定的单名 LCDS 的 CVA 值的计算,并且建立的模型能够较为正确地反映单名 LCDS 的 CVA 值.同样也可以计算考虑 CCR 的单名 LCDS 的公平保费价格.下面的图 3 即为考虑 CCR 的单名 LCDS 的公平保费价格,从图中可以看出,由于考虑了交易对手违约,单名 LCDS 的价格将变低,并且价差随时间的增大而增大.

通过改变系统风险因子占违约强度的比例来研究违约相关性对单名 LCDS 的 CVA 值的影响.由于 CVA 主要是由交易对手违约而产生的,所以这里暂不讨论早偿相关性的影响.从表 1 中的结果可以看出,当系统风险因子的比例增大时,标的贷款和交易对手(合约卖方)的违约相关性增大,而 CVA 值也相应的增大.

表 1 违约(正)相关程度对 CVA 值的影响
Tab.1 Influence of the default correlation on CVA

| $a_3/(a_3+b_3)$ | 0/5 | 1/5 | 2/5 | 3/5 | 4/5 | 5/5 |
|-----------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| CVA | 0.000 033 7 | 0.000 256 7 | 0.000 469 3 | 0.000 668 5 | 0.000 862 0 | 0.001 046 8 |

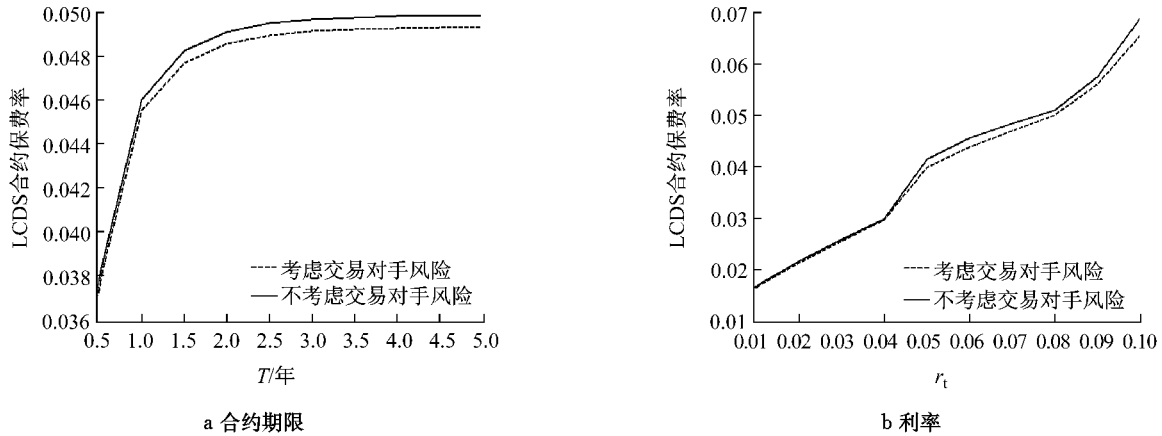


图 3 考虑 CCR 的单个 LCDS 公平保费率与合约期限和利率的关系

Fig.3 Relationship among the fair spread rate of LCDS with consideration of the CCR, the contract termination and the interest rate

4 对错位风险的讨论

本文开头提到,错位风险定义为风险暴露与交易对手信用质量负相关的一种风险.换句话说,保险方和被保险方受某个宏观经济变量的同向影响,当宏观经济因素变坏时,两方的违约可能同时增大,这一情形下,保险方很可能失去了对被保险方的保障作用.

从第 2 节的模型以及第 3 节的数值分析中不难看出,LCDS 标的贷款和交易对手(卖方)的违约是正相关的.当宏观经济因素(这里为利率)变得较差时,标的贷款和交易对手将同时受到不良影响,信用等级下降,违约的可能性也就同时增大.所以,由于参考贷款和交易对手关于系统风险因子的同向性而产生了错位风险,进而有较大的 CVA 值.可以说,正因为有了错位风险才会产生 CVA,两者是相互依存的.

现在考虑参考贷款与交易对手之间的违约是负相关的,即宏观利率因素对两者的影响是反向的.故对模型(27)式进行修改后得如下模型:

$$\lambda_t^{(1)} = \frac{a_1}{r_t} + b_1\beta_t^{(1)}, \lambda_t^{(2)} = a_2r_t + b_2\beta_t^{(2)},$$

$$\lambda_t^{(3)} = \frac{a_3}{r_t} + b_3\beta_t^{(3)} \quad (32)$$

其中 a_i 和 b_i 均为非负常数.这样, $\lambda_t^{(2)}$ 和 $\lambda_t^{(3)}$ 就是负相关的.下面再利用第 2 节的迭代模型,对该模型假设下的 LCDS 的 CVA 进行讨论.

取 $a_3=0.015, b_3=10$,其余参数与上一章相同. CVA 的值随 $a_2/(a_2+b_2)$ 取值变化而变化的趋势如图 4 所示.由式(32)建模知, $a_2/(a_2+b_2)$ 表示系统性风险因子占贷款违约强度的比例.当其他参数取定(为排除其他因素对结果可能的干扰,也取 a_2+b_2 为定值,即参考债券的违约强度整体上维持不变)时,这一比值越大,表示 $\lambda_t^{(2)}, \lambda_t^{(3)}$ 之间的负相关性越强.可以清楚地看到,此时 CVA 值随着相关性的增大反而减小.这是因为当增大系统性风险因子占贷款违

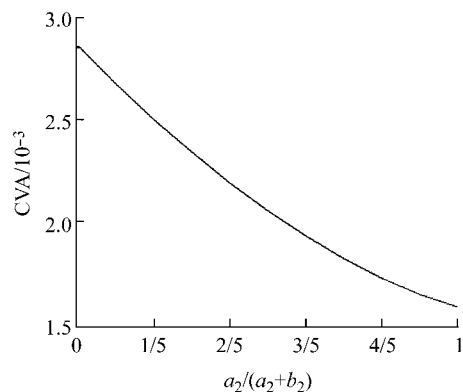


图 4 参考贷款与交易对手负相关时 CVA 的变化
Fig.4 Variation of the CVA value when the reference is negatively correlated with the counterparty

约强度的比例时,对于交易对手方来说,其违约的可能性反而降低,从而使得 CVA 值减小.实际上,这也是一种规避错位风险的有效方法,即选择保险卖方时,尽可能选择与参考贷款相异的经济个体.

5 结论

本文研究了含交易对手违约的单名 LCDS 的 CVA 值测算.在 LCDS 定价模型基础上,考虑了交易对手(即 LCDS 卖方)的违约强度过程.通过分析考虑交易对手违约 LCDS 的现金流,得到了 CVA 的计算模型,其计算公式可由一个非线性偏微分方程的解来表达.给出了一个收敛速度较快的迭代算法,从而可以计算单名 LCDS 的 CVA 值,并且作了一些数值结果的分析.最后,还对错位风险作了一些讨论,举了一个规避错位风险的例子,并通过数值计算的结果给出了验证.结果表明,考虑交易对手违约的 LCDS 公平价格和保费率低于普通 LCDS,而参考贷款与交易对手负相关时,CVA 的值随负相关程度增大而减小,有助于防范交易对手风险.

参考文献:

- [1] 吴森,梁进.抵押贷款信用违约互换的定价[J].高校应用数学学报,2011,26(3):269.
WU Sen, LIANG Jin. Valuation of mortgage loan CDS[J]. University Applied Mathematics Journal, 2011, 26(3): 269.
- [2] LIANG Jin, ZHOU Yujing. Valuation of a basket loan credit default swap[J]. International Journal of Financial Research, 2010,1: 21.
- [3] LIANG Jin, ZHOU Yujing. Valuation of a tranching loan credit default swap index[J]. Technology and Investment, 2011, 2(4): 240.
- [4] LIANG Jin, WANG Tao. Valuation of loan-only credit default swap with negatively correlated default and prepayment intensities [J]. International Journal of Computer Mathematics, 2012, 89(9): 1255.
- [5] WANG Tao, LIANG Jin, YANG Xiaoli. Pricing for a basket CDS and LCDS[J]. Modern Economy, 2012, 3(2): 171.
- [6] Pyjhtin M, Zhu S. A guide to modeling counterparty credit risk [J]. Global Association of Risk Professionals, 2009, 37: 16.
- [7] Redon C. Wrong way risk modeling[J]. Risk, 2006, 4: 90.
- [8] Lipton A, Sepp S. Credit value adjustment for credit default swaps via the structural default model[J]. The Journal of Credit Risk, 2009, 5(2): 123.
- [9] 王涛. LCDS 定价研究[D].上海:同济大学数学系,2011.
WANG Tao. Valuation of LCDS [D]. Shanghai: Department of Mathematics of Tongji University, 2011.
- [10] Duffie D, Filipovic D, Schachermayer W. Affine processes and applications in Finance[J]. The Annals of Applied Probability, 2003, 13(3): 984.
- [11] QIAN Xiaosong, JIANG Lishang, XU Chenglong, et al. Explicit formulas for pricing of mortgage-backed securities in a case of prepayment rate negatively correlated to interest rate [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2012, 393(2): 421.
- [12] 魏巍.含有对手信用风险的衍生品定价[D].上海:同济大学数学系,2012.
WEI Wei. Pricing of derivatives subject to counterparty credit risk [D]. Shanghai: Department of Mathematics of Tongji University, 2012.