

# 单向复合材料矩形截面圆柱弹簧的自由振动

郝颖, 虞爱民

(同济大学 航空航天与力学学院, 上海 200092)

**摘要:** 把自然弯扭梁理论推广到材料为各向异性的情况, 并得到了单向复合材料矩形截面杆件的圣维南扭转翘曲函数的解析公式. 在此基础上, 进一步导出了单向复合材料非圆截面圆柱螺旋弹簧的运动微分方程, 它们由 14 个 1 阶偏微分方程组成. 方程中不仅考虑了转动惯量、轴向和剪切变形的影响, 而且首次考虑了簧丝横截面的翘曲变形对弹簧固有频率和振动模式的影响. 由于方程呈现出很强的刚性, 这里采用改进的 Riccati 传递矩阵法对弹簧的自由振动微分方程进行求解. 计算表明, 对于单向复合材料矩形截面圆柱螺旋弹簧, 翘曲变形对其自由振动特性具有重大的影响, 是必须考虑的重要因素. 最后, 研究了各种设计参数对此类弹簧固有频率的影响.

**关键词:** 各向异性; 矩形截面; 圆柱螺旋弹簧; 翘曲变形; 固有频率

**中图分类号:** O326; TU323

**文献标识码:** A

## Free Vibration of Unidirectional Composite Cylindrical Helical Springs with Rectangular Cross-section

HAO Ying, YU Aimin

(College of Aerospace Engineering and Applied Mechanics, Tongji University, Shanghai 200092, China)

**Abstract:** The naturally curved and twisted beam theory was applied to the beams for anisotropic materials, and an analytical expression for the warping function of Saint-Venant's torsion of unidirectional composite bars with rectangular cross-section was obtained. Then, the differential equations of motion for unidirectional composite cylindrical helical springs with noncircular cross-sections, which consist of 14 first order partial differential equations, were further derived. In the formulation, the warping effect upon natural frequencies and vibration mode shapes was first studied in addition to considering the rotary inertia, the shear and axial

deformation effects. Improved Riccati transfer matrix method was introduced to solve the free vibration differential equations of the springs which presented a strong rigidity. Calculation results show that, for unidirectional composite cylindrical helical springs with rectangular cross-section, the warping deformation has a significant influence on the free vibration characteristics of such springs, which should be considered in the free vibration analysis. Finally, the effects of various parameters on the natural frequencies of the springs were investigated.

**Key words:** anisotropy; rectangular cross-section; cylindrical helical spring; warping deformation; natural frequency

弹簧作为一种重要的机械零部件被广泛应用于生产和生活中的各个领域. 随着材料科学的发展, 在工程实际中逐渐开始使用复合材料来制备弹簧. 但目前复合材料在弹簧制造领域的应用还非常有限, 通常只是用来加工板簧, 而对于应用范围最广的螺旋弹簧的研发极少<sup>[1]</sup>, 所以必须对复合材料圆柱螺旋弹簧的振动特性进行深入的研究. 目前只有很少的文献<sup>[2-8]</sup>涉及到此类问题. 其中最重要的工作就是 Yildirm<sup>[2]</sup>在文献<sup>[9]</sup>的基础上导出了各向异性材料空间曲杆的运动微分方程, 但方程中没有考虑横截面翘曲变形的影响. 之后 Yildirm<sup>[3]</sup>应用 1 阶剪切变形理论和传递矩阵法对簧丝截面为圆形的单向复合材料圆柱螺旋弹簧的自由振动问题进行了研究, 分析中考虑了轴向、剪切变形和转动惯量的影响. Yildirm 等<sup>[4-5]</sup>又以传递矩阵法对层合板构成的复合材料圆柱螺旋弹簧的自由振动问题进行了系统的分析. Temel 等<sup>[6]</sup>基于 Timoshenko 梁理论采用拉普拉斯逆变换以及余函数法首次研究了由层合板构成的复合材料圆柱螺旋弹簧的强迫振动问题. Callm<sup>[7]</sup>研

收稿日期: 2011-10-28

基金项目: 国家自然科学基金 (10572105); 上海市重点学科建设项目 (B302)

第一作者: 郝颖 (1979—), 女, 博士生, 主要研究方向为空间曲梁的动力学、力学问题的有限元求解. E-mail: baohao517112@tom.com

通讯作者: 虞爱民 (1948—), 男, 教授, 博士生导师, 理学学士, 主要研究方向为先进复合材料与结构、工程结构与工程材料力学.

E-mail: aimin.yu@163.com

究了各向同性-正交各向异性材料、弹性-粘弹性材料构成的圆柱螺旋弹簧在时变载荷激励下的动力响应。Çallm<sup>[8]</sup>又研究了非均匀复合材料梁的自由和强迫振动问题。由于上述研究涉及的均为簧丝截面为圆形的圆柱螺旋弹簧,因而无需考虑翘曲变形对自由振动特性的影响。

目前在工程中使用最多的是圆形截面和矩形截面的圆柱螺旋弹簧,文献[10-11]已经研究了各向同性材料非圆截面圆柱螺旋弹簧的自由振动问题,计算表明,翘曲效应对非圆截面各向同性圆柱螺旋弹簧的固有频率有着重大的影响,在它们的动力分析中必须加以考虑。鉴于目前对复合材料非圆截面圆柱螺旋弹簧理论研究工作的缺乏和均未考虑翘曲效应的情况,本文首先建立了包括翘曲效应的各向异性自然弯扭梁理论,基于文献[12]所建立的翘曲模式又得到了单向复合材料矩形截面杆件圣维南扭转翘曲函数的解析表达式。在此基础上,进一步导出了单向复合材料非圆截面圆柱螺旋弹簧的运动微分方程,由 14 个 1 阶偏微分方程组成。方程中不仅考虑了各种经典效应的影响,而且首次考虑了簧丝截面翘曲变形的影响。在增加了广义翘曲坐标和广义翘曲力矩 2 个自由度后,方程呈现出很强的刚性,因此文献[13]的方法已不再适用。本文采用文献[14-15]中改进的 Riccati 传递矩阵法来对弹簧的运动微分方程进行求解。

## 1 考虑翘曲效应的各向异性自然弯扭梁理论

### 1.1 几何关系和广义胡克定律

设各向异性自然弯扭梁横截面形心的轨迹是 1 根连续的空间曲线,曲线  $l$  的切线、主法线和次法线单位矢量分别用  $\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$  表示。为了考虑梁的初始扭曲,引入直角坐标系  $x_1\xi\eta$ ,如图 1 所示。 $x_1$  轴与曲线的切线  $\mathbf{t}$  重合, $\xi$  轴与曲线主法线  $\mathbf{n}$  之间的夹角记为  $\theta$ ,是弧坐标  $s$  的函数。用  $\mathbf{i}_\xi$  和  $\mathbf{i}_\eta$  表示  $O\xi$  和  $O\eta$  方向的单位矢量,则<sup>[16]</sup>

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{t}' \\ \mathbf{i}'_\xi \\ \mathbf{i}'_\eta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_\eta & -k_\xi \\ -k_\eta & 0 & k_s \\ k_\xi & -k_s & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{i}_\xi \\ \mathbf{i}_\eta \end{Bmatrix} \quad (1)$$

式中:上标撇号表示对弧坐标  $s$  的微分。 $k_\xi = k_1 \sin\theta$ ,  $k_\eta = k_1 \cos\theta$ ,  $k_s = k_2 + \theta'$ ,  $k_1, k_2$  分别为曲线的曲率和扭率。

线弹性复合材料的广义胡克定律定义如下:

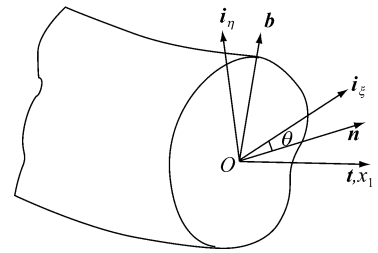


图 1 各向异性自然弯扭梁的几何关系

Fig.1 Geometry of naturally curved and twisted beams for anisotropic materials

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ e_5 \\ e_6 \end{Bmatrix} \quad (2)$$

式中: $\sigma_1 = \sigma_s, \sigma_2 = \sigma_\xi, \sigma_3 = \sigma_\eta, \sigma_4 = \tau_{\xi\eta}, \sigma_5 = \tau_{s\eta}, \sigma_6 = \tau_{s\xi}$ ,  $e_1 = e_{ss}, e_2 = e_{\xi\xi}, e_3 = e_{\eta\eta}, e_4 = 2e_{\xi\eta}, e_5 = 2e_{s\eta}, e_6 = 2e_{s\xi}$ ,  $\sigma_s, \sigma_\xi, \sigma_\eta, \tau_{\xi\eta}, \tau_{s\eta}$  和  $\tau_{s\xi}$  分别为杆件内任意一点的 3 个正应力和 3 个切应力; $C_{ij}$  为刚度系数,  $i=1, 2, \dots, 6$ ,  $j=1, 2, \dots, 6$ ;  $e_{ss}, e_{\xi\xi}$  和  $e_{\eta\eta}$  分别为相应方向的线应变,  $2e_{\xi\eta}, 2e_{s\eta}$  和  $2e_{s\xi}$  分别为 3 个坐标平面内的工程切应变。根据经典层合板理论<sup>[17]</sup>,应力  $\sigma_i$  与应变  $e_j$  的关系可以简写为

$$\sigma_i = Q_{ij} e_j, \quad i, j = 1, 5, 6 \quad (3)$$

式中,系数  $Q_{ij}$  的表达式参见文献[2]。

### 1.2 广义应力-应变方程

对于单向复合材料,经计算可得  $Q_{15} = Q_{51} = Q_{16} = Q_{61} = Q_{56} = Q_{65} = 0$ 。如果假设  $\xi, \eta$  轴为横截面的形心主轴且不考虑杆件的初始扭曲,则有惯性积  $I_{23} = 0, k_\xi = 0$ 。根据文献[16]并利用式(3),梁的内力和内力矩可以表示为

$$\begin{cases} Q_s = \iint_A \sigma_1 d\xi d\eta = \iint_A Q_{11} e_1 d\xi d\eta = \iint_A Q_{11} \{ \epsilon_s + \eta \omega_\xi - \xi \omega_\eta + \varphi \alpha' + k_s [ (\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}) \eta - (\frac{\partial \varphi}{\partial \eta}) \xi ] \alpha \} \cdot d\xi d\eta = A_{11} \epsilon_s + Q_{11} D_1 \alpha' + k_s Q_{11} D_4 \alpha \\ Q_\xi = \iint_A \sigma_6 d\xi d\eta = \iint_A Q_{66} e_6 d\xi d\eta = \iint_A Q_{66} (G_\xi \epsilon_\xi - G_\xi \varphi_\eta - \eta \omega_s + \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \alpha + k_\eta \varphi \alpha) d\xi d\eta = A_{66} G_\xi \epsilon_\xi - A_{66} G_\xi \varphi_\eta + Q_{66} D_5 \alpha + k_\eta Q_{66} D_1 \alpha \\ Q_\eta = \iint_A \sigma_5 d\xi d\eta = \iint_A Q_{55} e_5 d\xi d\eta = \iint_A Q_{55} (G_\eta \epsilon_\eta + G_\eta \varphi_\xi + \xi \omega_s + \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \alpha) d\xi d\eta = A_{55} G_\eta \epsilon_\eta + A_{55} G_\eta \varphi_\xi + Q_{55} D_6 \alpha \end{cases} \quad (4)$$

式中:  $A$  为横截面面积;  $A_{11} = \iint_A Q_{11} d\xi d\eta$ ;  $A_{55} = \iint_A Q_{55} d\xi d\eta$ ;  $A_{66} = \iint_A Q_{66} d\xi d\eta$ ;  $D_1 = \iint_A \varphi d\xi d\eta$ ;  $D_4 = \iint_A [(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi})\eta - (\frac{\partial \varphi}{\partial \eta})\xi] d\xi d\eta$ ;  $D_5 = \iint_A \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} d\xi d\eta$ ;  $D_6 = \iint_A \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} d\xi d\eta$ ;  $\epsilon_s, \epsilon_\xi$  和  $\epsilon_\eta$  为杆轴上一点沿 3 个方向的线应变;  $\omega_s, \omega_\xi$  和  $\omega_\eta$  为杆轴单位长度的 3 个相对转角;  $\varphi$  为圣维南扭转翘曲函数;  $\alpha$  为广义翘曲坐标;  $G_\xi$  和  $G_\eta$  为截面的剪切形状因子.

$$\begin{cases} M_s = \iint_A (\sigma_5 \xi - \sigma_6 \eta) d\xi d\eta = \iint_A [Q_{55} \xi (e_5) - Q_{66} \eta (e_6)] d\xi d\eta = \iint_A Q_{55} \xi (G_\eta \epsilon_\eta + G_\eta \varphi_\xi + \xi \omega_s + \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \alpha) d\xi d\eta - \iint_A Q_{66} \eta (G_\xi \epsilon_\xi - G_\xi \varphi_\eta - \eta \omega_s + \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \alpha + k_\eta \varphi \alpha) d\xi d\eta = Q_{55} I_3 \omega_s + Q_{66} I_2 \omega_s + Q_{55} D_7 \alpha - Q_{66} D_8 \alpha - k_\eta Q_{66} D_2 \alpha \\ M_\xi = \iint_A \sigma_1 \eta d\xi d\eta = \iint_A Q_{11} \eta e_1 d\xi d\eta = \iint_A Q_{11} \eta \cdot \{\epsilon_s + \eta \omega_\xi - \xi \omega_\eta + \varphi \alpha' + k_s [(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi})\eta - (\frac{\partial \varphi}{\partial \eta})\xi] \alpha\} d\xi d\eta = Q_{11} I_2 \omega_\xi + Q_{11} D_2 \alpha' + k_s Q_{11} D_9 \alpha \\ M_\eta = -\iint_A \sigma_1 \xi d\xi d\eta = -\iint_A Q_{11} \xi e_1 d\xi d\eta = -\iint_A Q_{11} \xi \{\epsilon_s + \eta \omega_\xi - \xi \omega_\eta + \varphi \alpha' + k_s [(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi})\eta - (\frac{\partial \varphi}{\partial \eta})\xi] \alpha\} d\xi d\eta = Q_{11} I_3 \omega_\eta - Q_{11} D_3 \alpha' - k_s Q_{11} D_{10} \alpha \end{cases} \quad (5)$$

式中:  $I_2 = \iint_A \eta^2 d\xi d\eta$ ;  $I_3 = \iint_A \xi^2 d\xi d\eta$ ;  $D_2 = \iint_A \eta \varphi d\xi d\eta$ ;  $D_3 = \iint_A \xi \varphi d\xi d\eta$ ;  $D_7 = \iint_A \xi \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} d\xi d\eta$ ;  $D_8 = \iint_A \eta \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} d\xi d\eta$ ;  $D_9 = \iint_A \eta [(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi})\eta - (\frac{\partial \varphi}{\partial \eta})\xi] d\xi d\eta$ ;  $D_{10} = \iint_A \xi [(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi})\eta - (\frac{\partial \varphi}{\partial \eta})\xi] d\xi d\eta$ .

引入广义翘曲力矩的概念,其定义为

$$T = \iint_A \sigma_1 \varphi d\xi d\eta = \iint_A Q_{11} \varphi e_1 d\xi d\eta = \iint_A Q_{11} \varphi \{\epsilon_s + \eta \omega_\xi - \xi \omega_\eta + \varphi \alpha' + k_s [(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi})\eta - (\frac{\partial \varphi}{\partial \eta})\xi] \alpha\} d\xi d\eta = Q_{11} D_1 \epsilon_s + Q_{11} D_2 \omega_\xi - Q_{11} D_3 \omega_\eta + Q_{11} D_{11} \alpha' + k_s Q_{11} D_{12} \alpha \quad (6)$$

式中:  $D_{11} = \iint_A \varphi^2 d\xi d\eta$ ;  $D_{12} = \iint_A \varphi [(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi})\eta - (\frac{\partial \varphi}{\partial \eta})\xi] d\xi d\eta$ .

如果代入上述线应变和相对转角的表达式<sup>[16]</sup>,则可以得到用 6 个位移函数  $u_s(s, t)$ ,  $u_\xi(s, t)$ ,  $u_\eta(s, t)$ ,  $\varphi_s(s, t)$ ,  $\varphi_\xi(s, t)$ ,  $\varphi_\eta(s, t)$  和  $\alpha(s, t)$  表示的本构方程,这里  $t$  为时间.

### 1.3 运动微分方程

自然弯扭梁在考虑翘曲效应情况下的运动微分方程可以改写为<sup>[16]</sup>

$$\begin{cases} Q'_s(s, t) = k_\eta Q_\xi(s, t) - p_s(s, t) + \rho A \ddot{u}_s(s, t) + \rho D_1 \ddot{\alpha}(s, t) \\ Q'_\xi(s, t) = k_s Q_\eta(s, t) - k_\eta Q_s(s, t) - p_\xi(s, t) + \rho A \ddot{u}_\xi(s, t) \\ Q'_\eta(s, t) = -k_s Q_\xi(s, t) - p_\eta(s, t) + \rho A \ddot{u}_\eta(s, t) \end{cases} \quad (7)$$

式中:  $\rho$  为材料密度;  $p_s, p_\xi, p_\eta$  分别为沿轴向和  $\xi, \eta$  方向单位长度的分布力.

$$\begin{cases} M'_s(s, t) = k_\eta M_\xi(s, t) - m_s(s, t) + \rho I_1 \ddot{\varphi}_s(s, t) \\ M'_\xi(s, t) = k_s M_\eta(s, t) - k_\eta M_s(s, t) + Q_\eta(s, t) - m_\xi(s, t) + \rho I_2 \ddot{\varphi}_\xi(s, t) + \rho D_2 \ddot{\alpha}(s, t) \\ M'_\eta(s, t) = -k_s M_\xi(s, t) - Q_\xi(s, t) - m_\eta(s, t) + \rho I_3 \ddot{\varphi}_\eta(s, t) - \rho D_3 \ddot{\alpha}(s, t) \end{cases} \quad (8)$$

式中:  $I_1 = I_2 + I_3$ ,  $m_s, m_\xi, m_\eta$  分别为绕轴线  $s$  和绕  $\xi, \eta$  轴单位长度的分布力矩. 广义翘曲力矩  $T(s, t)$  对弧坐标  $s$  的 1 阶导数则为

$$T'(s, t) = (\iint_A \sigma_1 \varphi d\xi d\eta)' = \iint_A \rho \varphi^2 d\xi d\eta \ddot{\alpha} + \iint_A \rho \varphi d\xi d\eta \cdot \eta \ddot{u}_s + \iint_A \rho \eta \varphi d\xi d\eta \ddot{\varphi}_\xi - \iint_A \rho \xi \varphi d\xi d\eta \ddot{\varphi}_\eta + k_s \iint_A [(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi})\eta + (\frac{\partial \varphi}{\partial \eta})\xi] \sigma_1 d\xi d\eta + \iint_A (\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \tau_6 + k_\eta \varphi \tau_6 + \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \tau_5) d\xi d\eta = \rho D_{11} \ddot{\alpha} + \rho D_1 \ddot{u}_s + \rho D_2 \ddot{\varphi}_\xi - \rho D_3 \ddot{\varphi}_\eta + k_s Q_{11} (D_4 \epsilon_s + D_9 \omega_\xi - D_{10} \omega_\eta + D_{12} \alpha' + k_s D_{13} \alpha) + Q_{66} (D_5 G_\xi \epsilon_\xi - D_5 G_\xi \varphi_\eta - D_8 \omega_s + D_{14} \alpha + k_\eta D_{15} \alpha) + k_\eta Q_{66} (D_1 G_\xi \epsilon_\xi - D_1 G_\xi \varphi_\eta - D_2 \omega_s + D_{15} \alpha + k_\eta D_{11} \alpha) + Q_{55} (D_6 G_\eta \epsilon_\eta + D_6 G_\eta \varphi_\xi + D_7 \omega_s + D_{16} \alpha) \quad (9)$$

式中:  $D_{13} = \iint_A [(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi})\eta - (\frac{\partial \varphi}{\partial \eta})\xi]^2 d\xi d\eta$ ;  $D_{14} = \iint_A (\frac{\partial \varphi}{\partial \xi})^2 d\xi d\eta$ ;  $D_{15} = \iint_A \varphi (\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}) d\xi d\eta$ ;  $D_{16} = \iint_A (\frac{\partial \varphi}{\partial \eta})^2 d\xi d\eta$ . 把式(4)、式(5)代入式(7)、式(8),然后把其中的线应变和相对转角和式(9)中的线应变和相对转角用 6 个位移函数代入,即可得到各向异性自然弯扭梁的运动微分方程,由 7 个 2 阶(关于弧坐标  $s$ )偏微分方程组成.

### 1.4 单向复合材料矩形截面杆件的扭转翘曲函数

注意到上述方程中有许多对翘曲函数求导或者求积的项, 为了考虑横截面的翘曲变形对圆柱螺旋弹簧振动频率的影响, 必须得到单向复合材料矩形截面杆件翘曲函数的解析表达式. 设单向复合材料矩形截面杆件如图 2 所示,  $2a, 2b$  分别表示矩形截面的宽度和高度. 记  $\alpha^2 = G_{x\xi}/G_{x\eta}$ ,  $\gamma_n = n\pi/2a$ ,  $c_n = 16a^2(-1)^{(n-1)/2}/n^2\pi^2$ ,  $n=1, 3, 5, \dots$ , 其中  $G_{x\xi}, G_{x\eta}$  分别为  $Ox\xi$  和  $Ox\eta$  平面内的剪切弹性模量. 根据文献 [12] 的扭转翘曲模式可以导出其翘曲函数为

$$\varphi(\xi, \eta) = \xi \eta - \sum_{n=1, 3, 5}^{\infty} \left( \frac{c_n e^{\alpha \gamma_n b}}{\alpha \gamma_n (1 + e^{2\alpha \gamma_n b})} e^{\alpha \gamma_n \eta} - \frac{c_n e^{\alpha \gamma_n b}}{\alpha \gamma_n (1 + e^{2\alpha \gamma_n b})} e^{-\alpha \gamma_n \eta} \right) \sin(\gamma_n \xi).$$

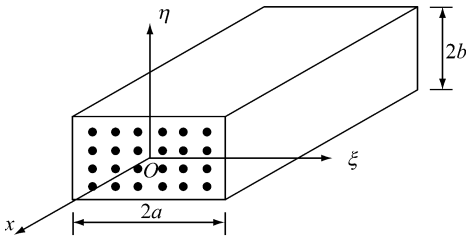


图 2 单向复合材料矩形截面杆件示意

Fig. 2 Schematic diagram of unidirectional composite bars with rectangular cross-section

## 2 单向复合材料矩形截面圆柱螺旋弹簧的运动微分方程

将式(4)~(6)中的线应变和相对转角用 6 个位移函数代入, 再对式(4)~(6)联立进行求解, 可以得到各位移函数和广义翘曲坐标对  $s$  的 1 阶导数的表达式, 然后将这个结果代入式(9), 最后组合式(7)、式(8)(令  $p_s(s, t) = p_\xi(s, t) = p_\eta(s, t) = m_s(s, t) = m_\xi(s, t) = m_\eta(s, t) = 0$ )、式(9)和 7 个 1 阶导数的表达式即可得到单向复合材料非圆截面圆柱螺旋弹簧的运动微分方程, 由 14 个 1 阶(关于弧坐标  $s$ )偏微分方程组成.

如图 3 所示, 圆柱螺旋弹簧的几何关系为  $h = R \tan \bar{\alpha}$ ,  $c = \sqrt{R^2 + h^2}$ ,  $k_s = h/c^2$ ,  $k_\eta = R/c^2$ ,  $ds = cd\beta$ , 式中:  $h$  为弹簧的节距,  $R$  为圆柱螺旋线的半径,  $\bar{\alpha}$  为螺旋角,  $d\beta$  为微角元素.

假设簧丝截面为矩形的圆柱螺旋弹簧作圆频率为  $\omega$  的简谐运动<sup>[10]</sup>, 则上述运动微分方程中许多和翘曲函数有关的积分项为零. 利用  $ds = cd\beta$ , 则上述

运动微分方程式可以简化为  $\frac{du_s(\beta)}{d\beta} = \cos \bar{\alpha} u_\xi(\beta) - \frac{D_4 \sin \bar{\alpha} Q_{11}}{A_{11}} \alpha(\beta) + \frac{c}{A_{11}} Q_s(\beta)$ ,  $\frac{du_\xi(\beta)}{d\beta} = -\cos \bar{\alpha} \cdot u_s(\beta) + \sin \bar{\alpha} u_\eta(\beta) + c\varphi_\eta(\beta) + \frac{c}{A_{66} G_\xi} Q_\xi(\beta)$ ,  $\frac{du_\eta(\beta)}{d\beta} = -\sin \bar{\alpha} u_\xi(\beta) - c\varphi_\xi(\beta) + \frac{c}{A_{55} G_\eta} Q_\eta(\beta)$ ,  $\frac{d\varphi_s(\beta)}{d\beta} = \cos \bar{\alpha} \varphi_\xi(\beta) + \frac{-D_7 Q_{55} c + D_8 Q_{66} c}{I_3 Q_{55} + I_2 Q_{66}} \alpha(\beta) + \frac{c}{I_3 Q_{55} + I_2 Q_{66}} \cdot M_s(\beta)$ ,  $\frac{d\varphi_\xi(\beta)}{d\beta} = -\cos \bar{\alpha} \varphi_s(\beta) + \sin \bar{\alpha} \varphi_\eta(\beta) + \frac{c}{I_2 Q_{11}} M_\xi(\beta)$ ,  $\frac{d\varphi_\eta(\beta)}{d\beta} = -\sin \bar{\alpha} \varphi_\xi(\beta) + \frac{c}{I_3 Q_{11}} M_\eta(\beta)$ ,  $\frac{d\alpha(\beta)}{d\beta} = \frac{c}{D_{11} Q_{11}} T(\beta)$ ,  $\frac{dQ_s(\beta)}{d\beta} = \cos \bar{\alpha} Q_\xi(\beta) - c\rho A \cdot \omega^2 u_s(\beta)$ ,  $\frac{dQ_\xi(\beta)}{d\beta} = -\cos \bar{\alpha} Q_s(\beta) + \sin \bar{\alpha} Q_\eta(\beta) - c\rho A \omega^2 u_\xi(\beta)$ ,  $\frac{dQ_\eta(\beta)}{d\beta} = -\sin \bar{\alpha} Q_\xi(\beta) - c\rho A \omega^2 u_\eta(\beta)$ ,  $\frac{dM_s(\beta)}{d\beta} = \cos \bar{\alpha} M_\xi(\beta) - c\rho I_1 \omega^2 \varphi_s(\beta)$ ,  $\frac{dM_\xi(\beta)}{d\beta} = -\cos \bar{\alpha} M_s(\beta) + \sin \bar{\alpha} M_\eta(\beta) + cQ_\eta(\beta) - c\rho I_2 \omega^2 \varphi_\xi(\beta)$ ,  $\frac{dM_\eta(\beta)}{d\beta} = -\sin \bar{\alpha} M_\xi(\beta) - cQ_\xi(\beta) - c\rho I_3 \omega^2 \varphi_\eta(\beta)$ ,  $\frac{dT(\beta)}{d\beta} = c[D_{13} k_s^2 Q_{11} + D_{16} Q_{55} + D_{14} Q_{66} + D_{11} k_\eta^2 Q_{66} - \rho D_{11} \omega^2 - \frac{k_s^2 Q_{11}^2 D_4}{A_{11}} - \frac{(D_7 Q_{55} - D_8 Q_{66})^2}{I_3 Q_{55} + I_2 Q_{66}}] \alpha(\beta) + \frac{\sin \bar{\alpha} Q_{11} D_4}{A_{11}} Q_s(\beta) + \frac{c D_7 Q_{55} - c D_8 Q_{66}}{I_3 Q_{55} + I_2 Q_{66}} M_s(\beta)$ .

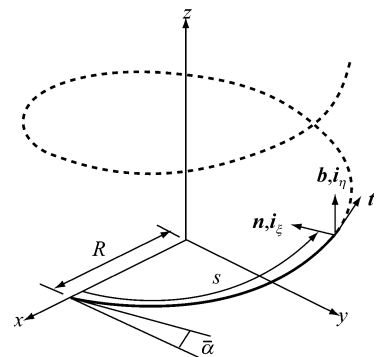


图 3 圆柱螺旋弹簧的几何关系

Fig. 3 Geometry of a typical cylindrical helical spring

在增加了广义翘曲坐标和广义翘曲力矩 2 个自由度后, 微分方程组呈现出很强的刚性, 因此文献 [13] 的方法已不再适用. 本文采用文献 [14] 和 [15] 中改进的 Riccati 传递矩阵法对方程组进行求解.

### 3 数值算例

设两端固支单向复合材料圆柱螺旋弹簧的材料 (T300/N5208) 和几何性质分别为:  $E_1 = 181.000$  GPa,  $E_2 = E_3 = 10.300$  GPa,  $G_{12} = G_{13} = 7.170$  GPa,  $G_{23} = 3.433$  GPa,  $\mu_{12} = 0.28$ ,  $\rho = 1600$  kg · m<sup>-3</sup>, 其中,  $E_1, E_2, E_3$  分别为材料在 1, 2, 3 弹性主方向上的弹性模量,  $G_{12}, G_{13}, G_{23}$  分别为 1-2, 1-3, 2-3 平面内的剪切弹性模量,  $\mu_{12}$  为单独在 2 方向作用正应力而无其他应力分量时 1 方向应变与 2 方向应变之比的负值, 称为泊松比. 矩形截面沿  $\xi$  方向的边长为  $2a$ , 沿  $\eta$  方向的边长为  $2b$ . 圆柱螺旋弹簧半径  $R$ , 有效圈数  $n$ , 螺旋角  $\bar{\alpha}$ ,  $G_{\xi} = G_{\eta} = 0.842$ .

#### 3.1 算例 1

取  $R = 5.0$  mm,  $n = 4$ ,  $\bar{\alpha} = 5^\circ$ ,  $2a = 1.0$  mm,  $2b = 0.4$  mm, 在该弹簧进行有限元分析时, 将其划分成 720 个 Solid46 实体层合单元. 表 1 综合了考虑与忽略翘曲影响得到的计算结果和有限元的结果.

正如表 1 所示, 翘曲变形对单向复合材料矩形截面圆柱螺旋弹簧的固有频率有着重大的影响. 可

以证明考虑翘曲后弹簧的扭转刚度降低, 所以求得的频率也随之减小. 不考虑翘曲变形时, 计算所得前 5 阶频率的平均误差为 35.76%~45.05%, 而考虑翘曲变形时, 计算所得平均误差为 1.32%~2.16%. 显然, 在考虑了翘曲效应后用本文方法得到的解和有限元结果吻合得很好.

表 1 翘曲变形对单向复合材料矩形截面圆柱螺旋弹簧固有频率的影响

Tab. 1 The warping effect on frequencies of unidirectional composite cylindrical helical springs with rectangular cross-section

频率阶次	有限元解	本文解			
		不考虑翘曲	不考虑翘曲的误差/%	考虑翘曲	考虑翘曲的误差/%
1	353.54	512.80	45.05	358.21	1.32
2	677.19	981.32	44.91	687.63	1.54
3	789.86	1117.87	41.53	805.74	2.01
4	883.95	1200.09	35.76	903.08	2.16
5	942.96	1357.22	43.93	958.56	1.65

#### 3.2 算例 2

令  $R = 5.0$  mm,  $n = 4$ ,  $\bar{\alpha} = 5^\circ$ , 表 2 给出了宽高比  $a/b$  对单向复合材料矩形截面圆柱螺旋弹簧固有频率的影响.

表 2 宽高比对固有频率的影响

Tab. 2 The effect of the aspect ratio on frequencies

频率阶次	Hz							
	$a/b=3/5$		$a/b=4/5$		$a/b=5/4$		$a/b=5/3$	
	有限元解	本文解	有限元解	本文解	有限元解	本文解	有限元解	本文解
1	491.85	493.21	576.83	564.26	598.98	596.11	495.38	492.17
2	948.63	950.35	1128.03	1087.43	1154.01	1149.30	953.21	948.56
3	1109.70	1091.80	1312.61	1261.22	1343.74	1335.79	1110.11	1107.48
4	1205.32	1176.69	1415.42	1379.85	1470.64	1466.25	1226.34	1229.04
5	1342.74	1332.57	1601.16	1527.69	1622.03	1611.31	1334.63	1327.90

#### 3.3 算例 3

令  $\bar{\alpha} = 5^\circ$ ,  $n = 4$ ,  $2a = 1.0$  mm,  $2b = 0.6$  mm. 表 3

给出了  $R$  对单向复合材料矩形截面圆柱螺旋弹簧固有频率的影响.

表 3 螺旋弹簧半径对固有频率的影响

Tab. 3 The effect of the radius of cylinder on frequencies

频率阶次	Hz									
	$R=4.0$ mm		$R=5.0$ mm		$R=6.0$ mm		$R=8.0$ mm		$R=10.0$ mm	
	有限元解	本文解	有限元解	本文解	有限元解	本文解	有限元解	本文解	有限元解	本文解
1	774.00	770.11	495.38	492.17	342.50	342.34	185.15	192.55	123.07	123.25
2	1489.83	1481.76	953.21	948.56	659.24	658.91	350.98	370.67	237.03	237.21
3	1731.61	1729.49	1110.14	1107.48	768.73	769.19	421.71	432.17	276.87	276.90
4	1911.79	1919.68	1226.29	1229.04	850.97	853.66	469.29	480.02	306.08	307.22
5	2084.67	2072.94	1334.57	1327.90	923.41	921.97	492.59	518.68	332.42	331.83

#### 3.4 算例 4

令  $R = 5.0$  mm,  $n = 4$ ,  $2a = 1.0$  mm,  $2b = 0.6$  mm, 表 4 考虑了  $\bar{\alpha}$  对单向复合材料矩形截面圆柱螺旋弹簧固有频率的影响.

#### 3.5 算例 5

令  $R = 5.0$  mm,  $\bar{\alpha} = 5^\circ$ ,  $2a = 1.0$  mm,  $2b = 0.6$

mm. 表 5 考虑了  $n$  对单向复合材料矩形截面圆柱螺旋弹簧固有频率的影响.

## 4 结论

在单向复合材料矩形截面圆柱螺旋弹簧的运动

表 4 螺旋角对固有频率的影响

Tab.4 The effect of helix pitch angle on frequencies

Hz

频率阶次	$\bar{\alpha}=4^\circ$		$\bar{\alpha}=5^\circ$		$\bar{\alpha}=6^\circ$		$\bar{\alpha}=8^\circ$		$\bar{\alpha}=10^\circ$	
	有限元解	本文解	有限元解	本文解	有限元解	本文解	有限元解	本文解	有限元解	本文解
1	496.68	494.46	495.38	492.17	492.28	491.33	480.46	486.34	477.49	480.91
2	955.46	951.27	953.21	948.56	946.72	944.61	836.41	929.55	820.30	847.15
3	1 156.08	1 152.17	1 110.14	1 107.48	1 053.27	1 055.88	918.50	947.88	823.73	857.67
4	1 291.66	1 289.58	1 226.32	1 229.04	1 142.89	1 155.75	979.04	1 009.48	923.50	936.17
5	1 348.43	1 342.55	1 334.56	1 327.90	1 316.53	1 316.45	1 266.64	1 282.31	1 250.03	1 253.62

表 5 有效圈数对固有频率的影响

Tab.5 The effect of helix coil number on frequencies

Hz

频率阶次	$n=2$		$n=4$		$n=6$		$n=8$	
	有限元解	本文解	有限元解	本文解	有限元解	本文解	有限元解	本文解
1	959.34	956.67	495.38	492.17	331.22	330.01	248.80	247.75
2	1 758.40	1 786.51	953.21	948.56	652.26	649.87	445.78	450.69
3	2 881.89	3 098.11	1 110.13	1 107.48	693.89	699.10	447.73	453.51
4	3 932.63	4 216.64	1 226.34	1 229.04	714.97	721.13	494.36	492.44
5	4 165.71	4 599.87	1 334.58	1 327.90	955.92	952.68	730.12	727.34

微分方程中首次考虑了翘曲变形的影响,数值结果表明:对于该弹簧而言,翘曲对其固有频率具有重大的影响,是必须考虑的重要因素。

(1)随着矩形截面面积增大,圆柱螺旋弹簧的固有频率也随之增大.当截面面积相同时,截面的不同放置方式对弹簧的频率几乎没有影响。

(2)随着有效圈数增加,单向复合材料矩形截面圆柱螺旋弹簧的第 2,3 阶频率变得越来越接近。

(3)随着螺旋角、有效圈数和圆柱螺旋线半径增大,单向复合材料矩形截面圆柱螺旋弹簧的长度增加,而系统的刚度减小,弹簧的固有频率随之减小.其中,螺旋角的变化对固有频率的影响最小。

参考文献:

[1] 隋刚, 范勇峥, 仲伟虹, 等. 复合材料圆柱螺旋弹簧的制造与实验研究[J]. 复合材料学报, 2001, 18(1): 46.  
SUI Gang, FAN Yongzheng, ZHONG Weihong, et al. Manufacture and experiment study of composite cylindrical spiral spring[J]. Acta Materiae Compositae Sinica, 2001, 18(1): 46.

[2] Yildirm V. Governing equations of initially twisted elastic space rods made of laminated composite materials[J]. International Journal of Engineering Sciences, 1999, 37(8): 1007.

[3] Yildirm V. Free vibration of uniaxial composite cylindrical helical springs with circular section[J]. Journal of Sound and Vibration, 2001, 239(2): 321.

[4] Yildirm V, Sancaktar E. Linear free vibration analysis of cross-ply laminated cylindrical helical springs [J]. International Journal of Mechanical Sciences, 2000, 42(6): 1153.

[5] Yildirm V. A numerical study on the free vibration of symmetric cross-ply laminated cylindrical helical springs[J]. Journal of Applied Mechanics, 1999, 66(4): 1040.

[6] Temel B, Çallm F F, Tütüncü N. Forced vibration of composite cylindrical helical rods[J]. International Journal of

Mechanical Sciences, 2005, 47(7): 998.

[7] Çallm F F. Dynamic analysis of viscoelastic, anisotropic curved spatial rod system[D]. Adana: University of Çukurova, 2003.

[8] Çallm F F. Free and forced vibrations of non-uniform composite beams[J]. Computers & Structures, 2009, 88(3): 413.

[9] Kiral E, Ertepinar A. Studies on elastic rods subject to diverse external agencies-Part III vibrational analysis of space rods[J]. Journal of Pure and Applied Science, 1974, 55.

[10] Yu A M, Hao Y. Free vibration analysis of cylindrical helical springs with noncircular cross-sections[J]. Journal of Sound and Vibration, 2011, 330(11): 2628.

[11] 郝颖, 虞爱民. 考虑翘曲效应的圆柱螺旋弹簧的振动分析[J]. 力学学报, 2011, 43(3): 561.  
HAO Ying, YU Aimin. Vibration analysis of cylindrical helical springs considering warping deformation effect[J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2011, 43(3): 561.

[12] Xu R Q, He J S, Chen W Q. Saint-Venant torsion of orthotropic bars with inhomogeneous rectangular cross section [J]. Computers & Structures, 2010, 92(6): 1449.

[13] Yildirim V, Ince N. Natural frequencies of helical springs of arbitrary shape[J]. Journal of Sound and Vibration, 1997, 204(2): 311.

[14] 刘保国. 一维不定参数结构系统的摄动 Riccati 传递矩阵方法及其应用[D]. 重庆: 重庆大学, 2002.  
LIU Baoguo. Perturbation Riccati transfer matrix method for one dimensional structure with parameter uncertainties and its applications[D]. Chongqing: Chongqing University, 2002.

[15] 王正. Riccati 传递矩阵法的奇点及其消除方法[J]. 振动与冲击, 1987, 2(22): 74.  
WANG Zheng. The singularity and its eliminating methods of Riccati transfer matrix method[J]. Journal of Vibration and Shock, 1987, 2(22): 74.

[16] 虞爱民, 瞿志豪. 自然弯曲与扭曲细长梁广义变分原理的研究[J]. 上海冶金专科学校学报, 1994, 15(3): 1.  
YU Aimin, QU Zhihao. The study of variational principle in naturally curved and twisted slender beams[J]. Journal of Shanghai Technical College of Metallurgy, 1994, 15(3): 1.

[17] 沈观林. 复合材料力学[M]. 北京: 清华大学出版社, 1994.  
SHEN Guanlin. Mechanics of composites [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 1994.