第41卷第2期 同济大学学报(自然科学版) Vol. 41 No. 2
2013年2月 JOURNAL OF TONGJI UNIVERSITY(NATURAL SCIENCE) Feb. 2013

文章编号：0253-374X(2013)02-0293-06 DOI：10.3969/j.issn.0253-374x.2013.02.024

算子代数上的(α,β)-导子的空间实现性

陈全园[1,2]，方小春[1]
(1. 同济大学 数学系，上海 200092；2. 景德镇陶瓷学院 信息学院，江西 景德镇 333403)

摘要：研究算子代数上的(α,β)-导子的空间实现性. 设$\mathscr{A}$是$B(X)$的子代数，α和β是$B(X)$上的自同构，δ是从$\mathscr{A}$到$B(X)$的(α,β)-导子. 如果δ是传递的、自反的(α,β)-导子，则δ是拟空间实现的，也就是说，存在一个稠定义的闭线性算子T：$\mathrm{Dom}(T)\to X$，使得$\beta(A)(\mathrm{Dom}(T))\subseteq\mathrm{Dom}(T)$和$\delta(A)x=(T\beta(A)-\alpha(A)T)x(\forall A\in\mathscr{A},x\in\mathrm{Dom}(T))$成立. 如果$\delta$是传递的、自反的有界$(\alpha,\alpha)$-导子，而且$\mathscr{A}$的范数闭包$\bar{\mathscr{A}}$包含一个极小左理想，则$\delta$是空间实现的，而且其实现元是惟一的. 具体地说，存在$T\in B(X)$，使得$\delta(A)=T\alpha(A)-\alpha(A)T$对任意的$A\in\mathscr{A}$都成立，而且$\delta$的实现元$T$在相差一个常数因子的条件下是惟一的.

关键词：(α,β)-导子；空间实现性；拟空间实现性
中图分类号：O177.1 **文献标志码**：A

Spatiality of (α,β)-derivations of Operator Algebras in Banach Spaces

CHEN Quanyuan[1,2]，*FANG Xiaochun*[1]
(1. Department of Mathematics, Tongji University, Shanghai 200092, China; 2. College of Information Engineering, Jingdezhen Ceramic Institute, Jingdezhen 333403, China)

Abstract: The spatiality of (α,β)-derivations of operator algebras is discussed. Suppose that X is a Banach space, $\mathscr{A}$ is a subalgebra of $B(X)$ and α,β are automorphisms on $B(X)$, δ is an (α,β)-derivation from $\mathscr{A}$ into $B(X)$. It is shown that any reflexive transitive (α,β)-derivation is quasi-spatial, that is, there is a densely defined, closed operator T with domain $\mathrm{Dom}(T)$ such that $\beta(A)(\mathrm{Dom}(T))\subseteq\mathrm{Dom}(T)$ and $\delta(A)x=(T\beta(A)-\alpha(A)T)x$ for any $A\in\mathscr{A}$ and $x\in\mathrm{Dom}(T)$. If the norm closure $\bar{\mathscr{A}}$ of $\mathscr{A}$ contains a nonzero minimal left ideal, then a bounded reflexive transitive (α,β)-derivation δ from A into $B(X)$ is spatial and implemented uniquely, that is, there exists $T\in B(X)$ such that $\delta(A)=T\alpha(A)-\alpha(A)T$ for each $A\in\mathscr{A}$, and the implementation T of δ is unique only up to an additive constant.

Key words: (α,β)-derivation; spatiality; quasi-spatiality

1 问题的提出

设X是一个Banach空间(当基本空间X是Hilbert空间时，用H替换X)，$B(X)$是X上的有界线性算子全体，$\mathscr{A}$是$B(X)$的子代数. δ是从$\mathscr{A}$到$B(X)$的线性映射，如果存在$B(X)$上的自同构α和β，使得

$$\delta(AB)=\alpha(A)\delta(B)+\delta(A)\beta(B)\ (\forall A,B\in A) \quad (1)$$

则称δ是(α,β)-导子. 导子是(I,I)-导子，这里I是$\mathscr{A}$上的恒等映射. 如果存在$T\in B(X)$，使得

$$\delta(A)=T\beta(A)-\alpha(A)T\ (\forall A\in\mathscr{A}) \quad (2)$$

则称δ是空间实现的(α,β)-导子. 如果式(2)中的T不是有界算子，则称δ是拟空间实现的(α,β)-导子，也就是说，如果存在一个稠定义的闭线性算子T：$\mathrm{Dom}(T)\to X$使得

$$\beta(A)(\mathrm{Dom}(T))\subseteq\mathrm{Dom}(T),\delta(A)x=(T\beta(A)-\alpha(A)T)x\ (\forall A\in\mathscr{A},\ x\in\mathrm{Dom}(T)) \quad (3)$$

成立，则称δ是拟空间实现的(α,β)-导子，算子T为δ的实现元，记为$T\in\mathrm{Imp}(\delta)$，其中$\mathrm{Imp}(\delta)$是满足式(3)的稠定义的闭算子全体.

给定算子代数上的一个导子δ，对于自伴算子代数上的导子，空间实现性是比较经典的问题，Sakai证明了C^*-代数上的导子是空间实现的[1]；对于非自伴算子代数，套代数上的导子是空间实现的[2]，李鹏同等证明了原子Boolean子空间格代数到它的理想上的导子是拟空间实现的[3]，陆芳言给出了CDC代数上的导子是拟空间实现的充分必要条件[4]. R. Moore[5]讨论了CSL代数上的导子的拟空间实现性.

收稿日期：2011-12-16
基金项目：国家自然科学基金(11071188)；江西省自然科学基金(20122BAB201016)
第一作者：陈全园(1975—)，女，理学博士，主要研究方向为算子代数. E-mail：cqy0798@163.com
通讯作者：方小春(1966—)，男，教授，博士生导师，理学博士，主要研究方向为算子代数. E-mail：xfang@tongji.edu.cn

对于一般的算子代数，众所周知，$B(X)$上的导子是空间实现的[6]，标准算子代数上的导子是空间实现的[7]. 由于这两种算子代数都是传递的代数，因此有如下问题：

问题1 设 $\mathscr{A}$ 是 $B(X)$ 的子代数，δ 是从 $\mathscr{A}$ 到 $B(X)$ 上的自反的、传递的、有界导子. 是否一定存在 $T\in B(X)$ 使得 $\delta(A)=TA-AT$ 对于任意的 $A\in\mathscr{A}$ 都成立？δ 的实现元如果存在的话，实现元 T 在相差一个常数的情况下是否惟一？

当 X 是 Hilbert 空间时，问题1就是文献[8]中的问题2.12. 虽然这个问题还没有完全解决，E. Kissin 已经找到一些条件使得这样的导子是空间实现的，而且实现元在相差一个常数的情况下是惟一的(命题2.11[8]). 特别地，E. Kissin 证明了，如果 $\mathscr{A}$ 是 $B(H)$ 的传递子代数，$\bar{\mathscr{A}}$包含 $B(H)$ 中的所有紧算子理想，则从 $\mathscr{A}$ 到 $B(H)$ 上的传递的、自反的有界导子是空间实现的，而且实现元在相差一个常数的情况下是惟一的. 据笔者所知，目前还没有问题1的其他解答.

Wu Jing 等[9]证明了如果 $\mathscr{A}$ 是满足"在 Lat $\mathscr{A}$ 中，$0_+\neq 0$ 而且 $X_-\neq X$"的自反代数，则 $\mathscr{A}$ 上的 (α,β)-导子是空间实现的. 关于 (α,β)-导子的空间实现性的结论，目前很少有文献提到. 受文献[8-9]的启发，本文探讨 Banach 空间上算子代数的 (α,β)-导子的空间实现性，试图回答如下问题：

问题2 假设 $\mathscr{A}$ 是 $B(X)$ 的子代数，α 和 β 是 $B(X)$ 上的自同构，δ 是从 $\mathscr{A}$ 到 $B(X)$ 上的自反的、传递的、有界 (α,β)-导子. 是否一定存在 $T\in B(X)$ 使得 $\delta(A)=T\beta(A)-\alpha(A)T$ 对于任意的 $A\in\mathscr{A}$ 都成立？δ 的实现元如果存在的话，实现元 T 在相差一个常数的情况下是否惟一？

2 预备知识

本文设 X 是复 Banach 空间，X^* 是 X 的拓扑对偶空间，$\mathscr{F}(X)$ 表示 X 上的有限秩算子全体，$B(X)$ 表示 X 上的有界算子全体. 对于一个有界算子 $A\in B(X)$，Lat A 表示 A 的不变子空间格，A^* 表示 A 的伴随算子. 对于 $B(X)$ 的子代数 $\mathscr{A}$，Lat $\mathscr{A}=\{L:L$ 是 X 的闭子空间，而且 $AL\subseteq L$ 对于所有的 $A\in\mathscr{A}$ 都成立$\}$ 表示 $\mathscr{A}$ 的不变子空间格. 对于 X 的子空间集 $\mathscr{L}$

$$\text{Alg }\mathscr{L}=\{A:A\text{ 是 }X\text{ 上的有界线性算子，而且 }AL\subseteq L\text{ 对于所有的 }L\in\mathscr{L}\text{都成立}\}$$

算子代数 $\mathscr{A}$ 是传递的，如果 Lat $\mathscr{A}=\{\{0\},X\}$；$\mathscr{A}$ 是自反的，如果

$$\mathscr{A}=\text{Alg Lat }\mathscr{A}\text{，其中 Alg Lat }\mathscr{A}=\{T\in B(X):\text{Lat }\mathscr{A}\subset\text{Lat }T\} \tag{4}$$

如果 $0\neq x\in X$，$0\neq f\in X^*$，由表达式 $y\mapsto f(y)x(y\in X)$ 定义了在 X 上的一秩算子，记为 $x\otimes f$. 对于 X 上的(可能无界)算子 A，其定义域为 Dom(A)，如果 $x\in$ Dom(A)，$f\in$ Dom(A^*)，则 $A(x\otimes f)=Ax\otimes f$，$(x\otimes f)A=x\otimes(A^*f)$. 对于 $B(X)$ 的子代数 $\mathscr{A}$ 以及 X 上稠定义的闭线性算子 T：Dom$(T)\to X$，如果 $A(\text{Dom}(T))\subseteq\text{Dom}(T)$ 而且 $TA\xi=AT\xi$ 对于所有的 $A\in\mathscr{A}$ 以及 $\xi\in$ Dom(T) 都成立，则称 T 和 $\mathscr{A}$ 可交换.

对于一个代数 $\mathscr{A}$ 以及它的一个子集 $\mathscr{I}$，如果 $\mathscr{A}\mathscr{I}\subseteq\mathscr{I}$，则称 $\mathscr{I}$ 为 $\mathscr{A}$ 的左理想；如果 $\mathscr{I}\mathscr{A}\subseteq\mathscr{I}$，则称 $\mathscr{I}$ 为 $\mathscr{A}$ 的右理想；如果 $\mathscr{I}$ 既是 $\mathscr{A}$ 的左理想又是 $\mathscr{A}$ 的右理想，则称 $\mathscr{I}$ 为 $\mathscr{A}$ 的理想. $\mathscr{A}$ 的左理想 $\mathscr{I}$ 如果不真包含其他非零左理想，则称 $\mathscr{I}$ 是极小的. 类似地，有极小右理想的概念.

对于 (α,β)-导子 δ，如果映射 Dom$(\delta)\ni A\mapsto\delta(A)\in B(X)$ 按范数拓扑是有界的(闭的)，则称 δ 是有界的(闭的)；如果 $\alpha(\text{Dom}(\delta))$ 和 $\beta(\text{Dom}(\delta))$ 都是传递的算子代数，则称 δ 是传递的；如果

$$\mathscr{A}_{\delta(\alpha,\beta)}=\left\{\hat{A}=\begin{pmatrix}\alpha(A) & \delta(A)\\ 0 & \beta(A)\end{pmatrix}:A\in\text{Dom}(\delta)\right\} \tag{5}$$

是 $X\oplus X$ 上的自反算子代数，则称 δ 是自反的. 设 α 和 β 是 $B(X)$ 上的自同构，T 是 X 上稠定义的闭线性算子 T：Dom$(T)\to X$，可以定义 $\Delta_T^{(\alpha,\beta)}$ 为

$$\text{Dom}\left(\Delta_T^{(\alpha,\beta)}\right)=\{A\in B(X):\beta(A)(\text{Dom}(T))\subseteq\text{Dom}(T),\ T\beta(A)-\alpha(A)T\text{ 在 Dom}(T)\text{上有界}\}$$

$$\left(\Delta_T^{(\alpha,\beta)}\right)(A)=\text{Closure}(T\beta(A)-\alpha(A)T)\ \left(A\in\text{Dom}(\Delta_T^{(\alpha,\beta)})\right) \tag{6}$$

显然，$\Delta_T^{(\alpha,\beta)}$ 是一个 (α,β)-导子. 如果 T 是 X 上稠定义的闭线性算子，而且 T 是 (α,β)-导子 δ 的实现元($T\in$ Imp(δ))，则导子 $\Delta_T^{(\alpha,\beta)}$ 是导子 δ 的延拓. 事实上，若 $A\in$ Dom(δ)，则 $A\in$ Dom$(\Delta_T^{(\alpha,\beta)})$，而且由式(3)和(6)，有 $\Delta_T^{(\alpha,\beta)}(A)=\delta(A)$. 对于一族 (α,β)-导子 $\delta_\lambda(\lambda\in\Lambda)$，定义导子 $\delta_\Lambda=\bigcap_{\lambda\in\Lambda}\delta_\lambda$ 为

$$\text{Dom}(\delta_\Lambda)=\{A\in\bigcap_{\lambda\in\Lambda}\text{Dom}(\delta_\lambda):\delta_\lambda(A)\text{对于所有的 }\lambda\in\Lambda\text{ 一致}\},$$

$$\delta_\Lambda(A)=\delta_\lambda(A)\ (A\in\text{Dom}(\delta_\Lambda))\text{，其中 }\lambda\in\Lambda\text{ 为任一指标} \tag{7}$$

特别地

$$\delta_{\mathrm{Imp}(\delta)}^{(\alpha,\beta)}=\bigcap_{T\in\mathrm{Imp}(\delta)}\Delta_T^{(\alpha,\beta)} \tag{8}$$

显著,若δ是(α,β)-导子,而且$\mathrm{Imp}(\delta)\neq\varnothing$,则$\delta_{\mathrm{Imp}(\delta)}^{(\alpha,\beta)}$也是$(\alpha,\beta)$-导子,而且$\delta_{\mathrm{Imp}(\delta)}^{(\alpha,\beta)}$是$\delta$的延拓.若自同构$\alpha$和$\beta$是明确的,有时就直接用$\delta$(或$\Delta_T$)表示$\delta^{(\alpha,\beta)}$(或$\Delta_T^{(\alpha,\beta)}$).

命题1 设α是$B(X)$上的自同构,T是X上稠定义的闭线性算子,则$\Delta_T^{(\alpha,\alpha)}$是自反的、传递的$(\alpha,\alpha)$-导子.

事实上,易知,$\mathrm{Dom}(\Delta_T^{(\alpha,\alpha)})$是$B(X)$的子代数,而且$\Delta_T^{(\alpha,\alpha)}$是一个$(\alpha,\alpha)$-导子.

设$x\in\mathrm{Dom}(T)$,$h\in\mathrm{Dom}(T^*)$,由于α是$B(X)$上的自同构,所以存在惟一的$A_0\in B(X)$,使得$\alpha(A_0)=x\otimes h$,则对于任意的$z\in\mathrm{Dom}(T)$都有$\alpha(A_0)z=(x\otimes h)z=h(z)x\in\mathrm{Dom}(T)$成立,所以$\alpha(A_0)(\mathrm{Dom}(T))=(x\otimes h)(\mathrm{Dom}(T))\subseteq\mathrm{Dom}(T)$.由于$(T(x\otimes h)-(x\otimes h)T)(z)=(Tx\otimes h)z-(x\otimes T^*h)z$,$\|T(x\otimes h)-(x\otimes h)T\|\leqslant\|Tx\|\|h\|+\|x\|\|T^*h\|$,所以$T(x\otimes h)-(x\otimes h)T$在$\mathrm{Dom}(T)$上有界.由此推出,对于任意的$x\in\mathrm{Dom}(T)$以及$h\in\mathrm{Dom}(T^*)$,存在惟一的$A_0\in B(X)$,使得$\alpha(A_0)=x\otimes h$,这样的$A_0=\alpha^{-1}(x\otimes h)\in\mathrm{Dom}(\Delta_T)$.

如果$M\in\mathrm{Lat}(\mathrm{Dom}(\Delta_T^{(\alpha,\alpha)}))$,而且存在$x_0\in M$使得$x_0\neq0$,则存在惟一的$A_0\in B(X)$,使得$\alpha(A_0)=x\otimes h$,这时,对于任意的$x\in\mathrm{Dom}(T)$,$h\in\mathrm{Dom}(T^*)$,都有$\alpha(A_0)(x_0)=(x\otimes h)(x_0)=h(x_0)x\in M$成立.而由于$\mathrm{Dom}(T^*)$是稠密的,由Hahn-Banach延拓定理,存在$h_0\in\mathrm{Dom}(T^*)$,使得$h_0(x_0)\neq0$.所以$x\in\mathrm{Dom}(T)$蕴含$x\in M$,即$\mathrm{Dom}(T)\subseteq M$,$X=\overline{\mathrm{Dom}(T)}\subseteq\overline{M}=M$,这样得出$\alpha(\mathrm{Dom}(\Delta_T^{(\alpha,\alpha)}))$是传递的.

对于(α,α)-导子$\Delta_T^{(\alpha,\alpha)}$,由式(5),$\mathscr{A}_{\Delta_T^{(\alpha,\alpha)}}=\left\{\begin{bmatrix}\alpha(A) & \Delta_T^{(\alpha,\alpha)}(A)\\ 0 & \alpha(A)\end{bmatrix}:A\in\mathrm{Dom}(\Delta_T^{(\alpha,\alpha)})\right\}$.易知$X\oplus\{0\}\in\mathrm{Lat}(\mathscr{A}_{\Delta_T^{(\alpha,\alpha)}})$,$G(T+tI)=\left\{\begin{pmatrix}T(x)+tx\\ x\end{pmatrix}:x\in\mathrm{Dom}(T)\right\}\in\mathrm{Lat}(\mathscr{A}_{\Delta_T^{(\alpha,\alpha)}})$ $(\forall t\in\mathbf{C})$.假设$\boldsymbol{B}_2=\begin{bmatrix}B_{11} & B_{12}\\ B_{21} & B_{22}\end{bmatrix}\in B(X\oplus X)$而且$\boldsymbol{B}_2\in\mathrm{Alg\,Lat}(\mathscr{A}_{\Delta_T^{(\alpha,\alpha)}})$,即$\mathrm{Lat}(\mathscr{A}_{\Delta_T^{(\alpha,\alpha)}})\subseteq\mathrm{Lat}(\boldsymbol{B}_2)$.由于$X\oplus\{0\}\in\mathrm{Lat}(\mathscr{A}_{\Delta_T^{(\alpha,\alpha)}})\subseteq\mathrm{Lat}(\boldsymbol{B}_2)$,所以$\begin{bmatrix}B_{11} & B_{12}\\ B_{21} & B_{22}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x\\ 0\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}B_{11}x\\ B_{21}x\end{bmatrix}\in X\oplus\{0\}$ $(\forall x\in X)$,所以$B_{21}X=\{0\}$,$B_{21}=0$,$\boldsymbol{B}_2=\begin{bmatrix}B_{11} & B_{12}\\ 0 & B_{22}\end{bmatrix}$.由$G(T+tI)\in\mathrm{Lat}(\mathscr{A}_{\Delta_T^{(\alpha,\alpha)}})\subseteq\mathrm{Lat}(\boldsymbol{B}_2)$,得到$\begin{bmatrix}B_{11} & B_{12}\\ 0 & B_{22}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}T(x)+tx\\ x\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}B_{11}Tx+tB_{11}x+B_{12}x\\ B_{22}x\end{bmatrix}\in G(T+tI)$ $(\forall x\in\mathrm{Dom}(T),t\in\mathbf{C})$,所以对于任意的$x\in\mathrm{Dom}(T)$,$t\in\mathbf{C}$,有$B_{22}x\in\mathrm{Dom}(T)$,$B_{11}Tx+tB_{11}x+B_{12}x=(T+tI)B_{22}x$,所以$B_{11}x=B_{22}x\in\mathrm{Dom}(T)$,$B_{11}Tx+B_{12}x=TB_{22}x$.而$\mathrm{Dom}(T)$在$X$中稠密,$B_{11},B_{22}\in B(X)$,所以$B_{11}=B_{22}$.令$A_0=\alpha^{-1}(B_{11})$,则$\alpha(A_0)\cdot(\mathrm{Dom}(T))=B_{11}(\mathrm{Dom}(T))\subseteq\mathrm{Dom}(T)$,且在$\mathrm{Dom}(T)$上有$B_{12}=T\alpha(A_0)-\alpha(A_0)T$成立.因此,$B_{12}=T\alpha(A_0)-\alpha(A_0)T$在$\mathrm{Dom}(T)$有界.这样,有$A_0\in\mathrm{Dom}(\Delta_T^{(\alpha,\alpha)})$而且$B_{12}=\Delta_T^{(\alpha,\alpha)}(A_0)$.即$\boldsymbol{B}_2=\begin{bmatrix}\alpha(A_0) & \Delta_T^{(\alpha,\alpha)}(A_0)\\ 0 & \alpha(A_0)\end{bmatrix}\in\mathscr{A}_{\Delta_T^{(\alpha,\alpha)}}$.由此推出,$\mathscr{A}_{\Delta_T^{(\alpha,\alpha)}}$是自反的算子代数.所以$\Delta_T^{(\alpha,\alpha)}$是自反的、传递的$(\alpha,\alpha)$-导子.证毕.

3 主要结果

命题2 设X是Banach空间,$\mathscr{A}$是$B(X)$的子代数,α和β是$B(X)$上的自同构.如果δ是从$\mathscr{A}(\mathrm{Dom}(\delta)=\mathscr{A})$到$B(X)$的自反的、传递的$(\alpha,\beta)$-导子,则$\delta$是拟空间实现的.

证明 首先有断言:如果δ是从$\mathscr{A}$到$B(X)$的传递的(α,β)-导子,则

$$\mathrm{Lat}(\mathscr{A}_{\delta(\alpha,\beta)})=\{\{0\}\oplus\{0\},X\oplus\{0\},X\oplus X,G(T):T\in\mathrm{Imp}(\delta)\} \tag{9}$$

其中$G(T)=\left\{\begin{pmatrix}T(x)\\ x\end{pmatrix}:x\in\mathrm{Dom}(T)\right\}$是算子$T$的图像.

事实上,很容易证明$\{0\}\oplus\{0\}$,$X\oplus\{0\}$,$X\oplus X$和所有的$G(T)$都是$\mathscr{A}_{\delta(\alpha,\beta)}$的不变子空间.反之,假设$M\in\mathrm{Lat}(\mathscr{A}_{\delta(\alpha,\beta)})$而且$M\neq\{0\}\oplus\{0\}$,$M\neq X\oplus\{0\}$,$M\neq X\oplus X$.如果在$M$中存在一个形式为$\begin{pmatrix}x\\ 0\end{pmatrix}(x\neq0)$的向量,则$\begin{pmatrix}\alpha(A)x\\ 0\end{pmatrix}\in M$ $(\forall A\in\mathscr{A})$.由$\alpha(\mathrm{Dom}(\delta))$的传递性,有$X\oplus\{0\}\subseteq M$.如果在$M$中不存在形式为$\begin{pmatrix}0\\ x\end{pmatrix}(x\neq0)$的向量,则$M=X\oplus\{0\}$;如果在$M$中

存在一个形式为$\begin{pmatrix}0\\x\end{pmatrix}(x\neq0)$的向量，则$M=X\oplus X$.

因此，如果$\begin{pmatrix}x\\0\end{pmatrix}\in M$，则$x=0$，所以存在一个闭算子$T$使得

$$M=G(T)=\left\{\begin{pmatrix}T(x)\\x\end{pmatrix}:x\in \mathrm{Dom}(T)\right\}$$

所以对于任意的$x\in\mathrm{Dom}(T)$，有

$$\begin{pmatrix}\alpha(A)&\delta(A)\\0&\beta(A)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}T(x)\\x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha(A)T(x)+\delta(A)x\\\beta(A)x\end{pmatrix}\in G(T)$$

这样，得到$\beta(A)x\in\mathrm{Dom}(T)$而且$\delta(A)x=T\beta(A)x-\alpha(A)T(x)$，即$T\in\mathrm{Imp}(\delta)$.

如果$\mathrm{Imp}(\delta)=\varnothing$，则由式(9)，有

$$\mathrm{Alg\ Lat}(\mathscr{A}_{\delta(\alpha,\beta)})=\left\{\begin{pmatrix}A&B\\0&C\end{pmatrix}:A,B,C\in B(X)\right\}\neq \mathscr{A}_{\delta(\alpha,\beta)}=\left\{\begin{pmatrix}\alpha(A)&\delta(A)\\0&\beta(A)\end{pmatrix}:A\in\mathrm{Dom}(\delta)\right\}$$

这与“δ是自反的”矛盾，这样就有

$$\mathrm{Imp}(\delta)\neq\varnothing \tag{10}$$

也就是说，δ是拟空间实现的. 证毕.

定理1 设X是Banach空间，$\mathscr{A}$是$B(X)$的子代数，$\mathscr{A}$的范数闭包$\bar{\mathscr{A}}$包含一个非零极小左理想$\mathscr{I}$，α是$B(X)$上的自同构. 如果δ是从$\mathscr{A}$到$B(X)$的自反的、传递的有界(α,α)-导子，则δ是空间实现的，而且δ的实现元是惟一的. 具体地说，存在$T\in B(X)$，使得$\delta(A)=T\alpha(A)-\alpha(A)T$对于任意的$A\in\mathscr{A}$成立，而且$\delta$的实现元$T$在相差一个常数的情况下是惟一的.

在此证明一些引理，逐步完成定理1的证明.

引理1 设X是Banach空间，$\mathscr{A}$是$B(X)$的子代数，α是$B(X)$上的自同构. 如果δ是从$\mathscr{A}$到$B(X)$的自反的、传递的(α,α)-导子，则$\delta=\delta_{\mathrm{Imp}(\delta)}^{(\alpha,\alpha)}$.

证明 由式(10)，$\mathrm{Imp}(\delta)\neq\varnothing$. 显然，$\delta_{\mathrm{Imp}(\delta)}^{(\alpha,\alpha)}$是自反的$(\alpha,\alpha)$-导子，而且由式(8)，有

$$\mathrm{Imp}(\delta)\subseteq\mathrm{Imp}(\delta_{\mathrm{Imp}(\delta)}^{(\alpha,\alpha)}) \tag{11}$$

另一方面，由于$\delta_{\mathrm{Imp}(\delta)}^{(\alpha,\alpha)}$是$\delta$的延拓，所以

$$\mathrm{Imp}(\delta_{\mathrm{Imp}(\delta)}^{(\alpha,\alpha)})\subseteq\mathrm{Imp}(\delta) \tag{12}$$

结合上面两式，得到

$$\mathrm{Imp}(\delta)=\mathrm{Imp}(\delta_{\mathrm{Imp}(\delta)}^{(\alpha,\alpha)}) \tag{13}$$

由于δ和$\delta_{\mathrm{Imp}(\delta)}^{(\alpha,\alpha)}$都是传递的导子，由式(9)，有$\mathrm{Lat}\ \mathscr{A}_{\delta(\alpha,\alpha)}=\mathrm{Lat}\ \mathscr{A}_{\delta_{\mathrm{Imp}(\delta)}^{(\alpha,\alpha)}}$. 由命题1，这两个导子是自反的，所以有

$$\mathscr{A}_{\delta(\alpha,\alpha)}=\mathrm{Alg\ Lat}\ \mathscr{A}_{\delta(\alpha,\alpha)}=\mathrm{Alg\ Lat}\ \mathscr{A}_{\delta_{\mathrm{Imp}(\delta)}^{(\alpha,\alpha)}}=\mathscr{A}_{\delta_{\mathrm{Imp}(\delta)}^{(\alpha,\alpha)}} \tag{14}$$

因此，由式(4)有

$$\delta=\delta_{\mathrm{Imp}(\delta)}^{(\alpha,\alpha)} \tag{15}$$

证毕.

引理2 设X是Banach空间，$\mathscr{A}$是$B(X)$的传递子代数，$\bar{\mathscr{A}}$包含一个极小左理想$\mathscr{I}$，则

(1) $\bar{\mathscr{A}}\supseteq\{y\otimes f:y\in X\}$，其中$f$是$X$上的一个有界线性泛函.

(2) 与$\bar{\mathscr{A}}$交换的算子是平凡的. 具体地说，如果T是稠定义的闭算子，$A(\mathrm{Dom}(T))\subseteq\mathrm{Dom}(T)$，而且对于任意的$A\in\bar{\mathscr{A}}$，$\xi\in\mathrm{Dom}(T)$都有$AT\xi=TA\xi$成立，则存在一个复数$\mu$使得$T=\mu I$.

证明 文献[10]已经证明了这个引理. 为了完整，给出其简要证明.

步骤1：有

$$\mathscr{I}^2=\{B_1B_2:B_1,B_2\in\mathscr{I}\}\neq\{0\} \tag{16}$$

步骤2：由于$\mathscr{I}^2\neq\{0\}$，根据文献[11]中的引理2.1.5和推论2.1.6，在$\bar{\mathscr{A}}$中存在幂等元P，使得$\mathscr{I}=\bar{\mathscr{A}}P$，而且$P\bar{\mathscr{A}}P$是由$P$的倍数组成的可除代数($P$是其单位元)，也就是说

$$P\bar{\mathscr{A}}P=\{\mu P:\mu\text{是一个复数}\} \tag{17}$$

则P是一秩算子，即存在向量$x_1\in X$，$f\in X^*$使得

$$P=x_1\otimes f\in\bar{\mathscr{A}}\text{，而且}f(x_1)=1 \tag{18}$$

步骤3：对于任意的$y\in X$，由$\mathscr{A}$的传递性，存在一列算子$\{A_\lambda\}\subseteq\mathscr{A}$使得$\lim\limits_{\lambda}A_\lambda(x_1)=y$. 由式(18)，$P=x_1\otimes f\in\bar{\mathscr{A}}$，$\bar{\mathscr{A}}\ni A_\lambda(x_1\otimes f)=A_\lambda(x_1)\otimes f\xrightarrow{\|\cdot\|}y\otimes f$，所以

$$y\otimes f\in\bar{\mathscr{A}}\text{，对于任意的}y\in X \tag{19}$$

假设T是稠定义的闭算子，而且T与$\bar{\mathscr{A}}$交换. 若$y\in X$，则$S=(y\otimes f)\in\bar{\mathscr{A}}$. 对于任意的$\xi\in\mathrm{Dom}(T)$，有$(y\otimes f)(\xi)\in\mathrm{Dom}(T)$以及$(y\otimes f)T\xi=T(y\otimes f)\xi$. 因为$\mathrm{Dom}(T)$在$X$中稠密，并且$f\neq0$，所以存在$\xi_0\in\mathrm{Dom}(T)$使得$f(\xi_0)\neq0$

$$(y\otimes f)(\xi_0)=f(\xi_0)y\in\mathrm{Dom}(T)\text{以及}f(T\xi_0)y=f(\xi_0)T(y)$$

这样，$y\in\mathrm{Dom}(T)$，所以$\mathrm{Dom}(T)=X$. 令$\mu=\dfrac{f(T\xi_0)}{f(\xi_0)}$，则$T=\mu I$. 结论得证. 证毕.

引理3 设$\mathscr{A}$是$B(X)$的子代数，$\bar{\mathscr{A}}$是$\mathscr{A}$的范数

闭包. 则

$$\mathrm{Lat}(\mathscr{A}) = \mathrm{Lat}(\bar{\mathscr{A}}) \tag{20}$$

设 X 是 Banach 空间，$\mathscr{A}$ 是 $B(X)$ 的子代数，α,β 是 $B(X)$ 上的自同构，δ 是从 $\mathscr{A}(\mathscr{A}=\mathrm{Dom}(\delta))$ 到 $B(X)$ 的(α,β)-导子. 对于任意的 $B\in\bar{\mathscr{A}}$，存在一列算子$\{A_\lambda\}\subseteq\mathscr{A}$ 使得 $A_\lambda \xrightarrow{\|\cdot\|} B$. 如果$\{A_\lambda\}$按范数收敛，因为 $\|\delta(A_{\lambda_1})-\delta(A_{\lambda_2})\|\leqslant\|\delta\|\ \|A_{\lambda_1}-A_{\lambda_2}\|$，所以$\{\delta(A_\lambda)\}$按范数也收敛. 因为 $\|\delta(A_\lambda^{(1)})-\delta(A_\lambda^{(2)})\|\leqslant\|\delta\|\ \|A_\lambda^{(1)}-A_\lambda^{(2)}\|$，所以如果 $\mathscr{A}$ 中的两列算子$\{A_\lambda^{(1)}\}$，$\{A_\lambda^{(2)}\}$按范数收敛到同一极限，则$\{\delta(A_\lambda^{(1)})\}$，$\{\delta(A_\lambda^{(2)})\}$按范数收敛到同一极限. 这样可以定义一个线性映射$\bar{\delta}$为

$$\mathrm{Dom}(\bar{\delta}) = \overline{\mathrm{Dom}(\delta)} = \bar{\mathscr{A}}, \text{而且} \bar{\delta}(B) = \lim_{\lambda}\ \delta(A_\lambda) \tag{21}$$

其中 $B\in\bar{\mathscr{A}}$而且$\{A_\lambda\}$是 $\mathscr{A}$ 中的任意算子列，使得 $A_\lambda \xrightarrow{\|\cdot\|} B$，$\bar{\delta}(B)$是 $\delta(A_\lambda)$在范数拓扑中的极限. 显然，如果 δ 是有界的，则$\bar{\delta}$也是有界的，且 $\|\bar{\delta}\|=\|\delta\|$.

命题 3　设 X 是 Banach 空间，$\mathscr{A}$ 是 $B(X)$ 的子代数，α 和 β 是 $B(X)$ 上的自同构，δ 是从 $\mathscr{A}(\mathscr{A}=\mathrm{Dom}(\delta))$ 到 $B(X)$ 的传递的有界(α,β)-导子，则$\bar{\delta}$是从$\bar{\mathscr{A}}$到 $B(X)$ 的传递的有界(α,β)-导子，而且

$$\mathrm{Imp}(\bar{\delta}) = \mathrm{Imp}(\delta) \tag{22}$$

证明　因为 $\alpha(\mathscr{A})$，$\beta(\mathscr{A})$是传递的，所以 $\alpha(\bar{\mathscr{A}})$，$\beta(\bar{\mathscr{A}})$也是传递的. 显然$\bar{\delta}$是一个线性映射，对于任意 $B_1,B_2\in\bar{\mathscr{A}}$，存在 $\mathscr{A}$ 中两列算子$\{A_\lambda^{(1)}\}$，$\{A_\lambda^{(2)}\}$，使得 $A_\lambda^{(i)} \xrightarrow{\|\cdot\|} B_i\ (i=1,2)$，这样得到 $A_\lambda^{(1)}A_\lambda^{(2)} \xrightarrow{\|\cdot\|} B_1B_2$，$\beta(A_\lambda^{(2)}) \xrightarrow{\|\cdot\|} \beta(B_2)$，$\alpha(A_\lambda^{(1)}) \xrightarrow{\|\cdot\|} \alpha(B_1)$，$\bar{\delta}(B_1B_2)=\lim\limits_{\lambda}\ \delta(A_\lambda^{(1)}A_\lambda^{(2)})=\lim\limits_{\lambda}\ \delta(A_\lambda^{(1)})\beta(A_\lambda^{(2)})+\lim\limits_{\lambda}\ \alpha(A_\lambda^{(1)})\delta(A_\lambda^{(2)})=\bar{\delta}(B_1)\beta(B_2)+\alpha(B_1)\bar{\delta}(B_2)$. 所以$\bar{\delta}$是从$\bar{\mathscr{A}}$到 $B(X)$ 的传递的(α,β)-导子.

由式(5)，$\mathscr{A}_{\delta(\alpha,\beta)}=\left\{\begin{pmatrix}\alpha(A) & \delta(A)\\ 0 & \beta(A)\end{pmatrix}: A\in\mathscr{A}\right\}$，$\mathscr{A}_{\bar{\delta}(\alpha,\beta)}=\left\{\begin{bmatrix}\alpha(B) & \bar{\delta}(B)\\ 0 & \beta(B)\end{bmatrix}: B\in\bar{\mathscr{A}}\right\}$，由式(21)，有 $\mathscr{A}_{\bar{\delta}(\alpha,\beta)}=\overline{\mathscr{A}_{\delta(\alpha,\beta)}}$，结合引理 3，得到 $\mathrm{Lat}(\mathscr{A}_{\bar{\delta}(\alpha,\beta)})=\mathrm{Lat}(\mathscr{A}_{\delta(\alpha,\beta)})$. 由式(9)

$$\mathrm{Lat}(\mathscr{A}_{\delta(\alpha,\beta)})=\{\{0\}\oplus\{0\}, X\oplus\{0\}, X\oplus X, G(F): F\in\mathrm{Imp}(\delta)\}$$

$$\mathrm{Lat}(\mathscr{A}_{\bar{\delta}(\alpha,\beta)})=\{\{0\}\oplus\{0\}, X\oplus\{0\}, X\oplus X, G(F_1): F_1\in\mathrm{Imp}(\bar{\delta})\}$$

因此，$\mathrm{Imp}(\bar{\delta})=\mathrm{Imp}(\delta)$. 证毕.

定理 2 的证明　由式(10)，$\mathrm{Imp}(\delta)\neq\varnothing$，不妨假设 $T\in\mathrm{Imp}(\delta)$，则 T 是 X 上的稠定义的闭算子，而且

$$\{(T+\mu I): \mu\text{ 是一个复数}\}\subseteq\mathrm{Imp}(\delta) \tag{23}$$

设 T_1 是 δ 的任意的实现元，则 T_1 是 X 上的稠定义的闭算子，而且 $T_i\in\mathrm{Imp}(\delta)$，由式(22)，$T_1\in\mathrm{Imp}(\bar{\delta})$，由式(3)，$\mathrm{Dom}(T_1)$是 X 的 $\alpha(\mathrm{Dom}(\bar{\delta}))$-不变线性流形，因此，对于任意的 $A\in\bar{\mathscr{A}}$ 都有 $\alpha(A)(\mathrm{Dom}(T_1))\subseteq\mathrm{Dom}(T_1)$成立. 因为 $\mathscr{A}$ 的范数闭包$\bar{\mathscr{A}}$包含一个非零极小左理想 $\mathscr{I}$，所以 $\alpha(\mathscr{I})$是 $\alpha(\bar{\mathscr{A}})$的一个非零极小左理想，将引理 2 应用于 $\alpha(\bar{\mathscr{A}})$，则存在 $f\in X^*$，使得：如果 $y\in X$，则 $y\otimes f\in\alpha(\bar{\mathscr{A}})$，$(y\otimes f)\xi=f(\xi)y\in\mathrm{Dom}(T_1)\ (\forall\xi\in\mathrm{Dom}(T_1))$. 因为 $\mathrm{Dom}(T_1)$在 X 中稠密而且 $f\neq0$，所以存在 $\xi_0\in\mathrm{Dom}(T_1)$使得 $f(\xi_0)\neq0$，这样 $y\in\mathrm{Dom}(T_1)$. 由 y 的任意性，得到 $\mathrm{Dom}(T_1)=X$. 由于 T_1 是 δ 的任意实现元，$\mathrm{Dom}(T)=X$ 也成立. 所以 $\mathrm{Dom}(T_1-T)=(\mathrm{Dom}(T)\cap\mathrm{Dom}(T_1))=X$，这样，算子 T_1-T 处处有定义.

断言：令 $T_2=T_1-T$，则 T_2 是可闭算子.

事实上，设 $\xi_n\in X$，$\xi_n\to0$，$T_2(\xi_n)\to\eta$. 由于 $T,T_1\in\mathrm{Imp}(\bar{\delta})$，有 $\bar{\delta}(A)x=(T_1\alpha(A)-\alpha(A)T_1)x$，$\bar{\delta}(A)X=(T\alpha(A)-\alpha(A)T)x\ (\forall A\in\mathrm{Dom}(\bar{\delta}),\forall x\in X)$. 因此，对于任意的 $A\in\bar{\mathscr{A}}$都有 $T_2\alpha(A)\xi_n=\alpha(A)T_2\xi_n$成立. 由式(18)，在向量 $x_1\in X$，$f\in X^*$，使得$P=x_1\otimes f\in\alpha(\bar{\mathscr{A}})$，而 $\alpha(\bar{\mathscr{A}})$是一个代数，$T_2P\alpha(A)\xi_n=P\alpha(A)T_2\xi_n$ 对于任意的$A\in\bar{\mathscr{A}}$成立. 因此，对于任意的 $A\in\bar{\mathscr{A}}$都有

$$\begin{aligned}f(\alpha(A)\eta)x_1 &= (x_1\otimes f)\alpha(A)\eta=P\alpha(A)\eta=\\ &\lim_{n\to\infty}\ P\alpha(A)T_2\xi_n=\lim_{n\to\infty}\ T_2P\alpha(A)\xi_n=\\ &\lim_{n\to\infty}T_2(x_1\otimes f)\alpha(A)\xi_n=\\ &\lim_{n\to\infty}f(\alpha(A)\xi_n)T_2x_1=0\end{aligned} \tag{24}$$

成立. 因为 $x_1\neq0$，所以 $f(\alpha(A)\eta)=0\ (\forall A\in\bar{\mathscr{A}})$，$f$ 在线性流形 $\alpha(\bar{\mathscr{A}})\eta=\{\alpha(A)\eta: A\in\bar{\mathscr{A}}\}$消失. 由 $\alpha(\bar{\mathscr{A}})$的传递性，有 $\alpha(\bar{\mathscr{A}})\eta=\{0\}$，或者 $\alpha(\bar{\mathscr{A}})\eta$ 在 X 中稠密. 而 $f\neq0$，所以 $\alpha(\bar{\mathscr{A}})\eta=\{0\}$，$\eta=0$.

这样，T_2 是一个可闭算子，且其定义域是整个

空间，$\mathrm{Dom}(T_2)=X$，因此 T_2 是一个闭算子. 而 $T_2=T_1-T$ 和 $\alpha(\bar{\mathscr{A}})$ 交换，由引理 3，存在数 μ 使得 $T_1-T=\mu I$，$T_1=T+\mu I$

$$\mathrm{Imp}(\delta)=\{(T+\mu I):\mu \text{ 是一个复数}\} \quad (25)$$

因为 $\Delta_T^{(\alpha,\alpha)}=\Delta_{T+\mu I}^{(\alpha,\alpha)}$，由式(13)

$$\delta=\delta_{\mathrm{Imp}(\delta)}^{(\alpha,\alpha)}=\Delta_T^{(\alpha,\alpha)} \quad (26)$$

由于 T 是闭算子，且 $\mathrm{Dom}(T)=X$，由闭图像定理，得到 T 是有界算子. 由式(6)，(25)和(26)有 $\delta(A)=T\alpha(A)-\alpha(A)T$ ($\forall A\in\mathscr{A}$)，而且实现元 T 在相差一个常数的情况下是惟一的. 证毕.

推论 1[7] 设 $\mathscr{A}$ 是 $B(H)$ 的传递子代数，$\mathscr{A}$ 的范数闭包 $\bar{\mathscr{A}}$ 包含 H 上的紧算子理想 $C(H)$ ($C(H)\subseteq\bar{\mathscr{A}}$). 如果 δ 是从 $\mathscr{A}$ 到 $B(H)$ 的自反传递的有界导子，则 δ 是空间实现的，而且 δ 的实现元 T 在相差一个常数的情况下是惟一的.

证明 由于 $C(H)\subseteq\bar{\mathscr{A}}$，固定向量 $f\in H$，则

$$\mathscr{J}=\{x\otimes f \mid x\in H\}$$

是 $\bar{\mathscr{A}}$ 的一个极小左理想，其中 $x\otimes f$ 是作用在 H 上的一秩算子：$(x\otimes f)h=(h,f)x$ ($h\in H$). 由定理 1，存在有界算子 $T\in B(H)$ 使得 $\delta(A)=TA-AT$ ($\forall A\in\mathscr{A}$)，而且 δ 的实现元 T 在相差一个常数的情况下是惟一的. 证毕.

注：如果一个 Banach 空间不具有近似性质(这样的 Banach 空间确实存在，例如文献[12])，并不是所有的紧算子可以依范数拓扑由有限秩算子逼近，所以本文的定理 1 推广了文献[8]的命题 2.11.

参考文献：

[1] Sakai S. C^*-algebra and W^*-algebra[M]. Berlin: Springer, 1971.

[2] Davidson K. Nest algebras[M]. Harlow: Longman Scientific and Technical, 1988.

[3] Li P T, Ma J P. Derivtions, local derivations and atomic Boolean subspace lattices [J]. Bulletin of Australian Mathematical Society, 2002,66:477.

[4] Lu F Y. Derivations of CDC algebras [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2006,323:179.

[5] Moore R. Derivations of CSL algebras[J]. Indiana University Mathematics Journal, 2005,54:1739.

[6] Larson D, Sourour A. Local derivations and local automorphisms of B(X)[J]. Proceedings of Symposium Pure Mathematics,1990,51:187.

[7] Chernoff P. Representations, automorphisms, and derivations of some operator algebras[J]. Journal of Functional Analysis, 1973,12:275.

[8] Kissin E. Reflexive*-derivations and lattices of invariant subspaces of operator algebras associated with them [J]. Journal of Functional Analysis,2006:232:56.

[9] Wu J. Topological reflexivity of the spaces of (α, β)-derivations on operator algebras [J]. Studia Mathematics, 2003,156:121.

[10] Chen Q Y, Fang X C. Spatiality of derivations of operator algebras in banach spaces[J]. Abstract and Applied Analysis, 2011, Article ID 813723,1-13,doi:10.1155/2011/813723.

[11] Rickart C. General theory of Banach algebras[M]. Princeton: [s.n.],1960.

[12] Enflo P. A counter example to the approximation problem in Banach spaces[J]. Acta Mathematical,1973,130:309.

(上接第 292 页)

(2) 假定产生的点列 $\{x_k\}$ 趋向于 $\boldsymbol{x}_*$，在 Wolfe 条件下是否有

$$\lim_{k\to+\infty}\inf\|\boldsymbol{g}_k\|=0$$

或

$$\lim_{k\to+\infty}\boldsymbol{g}_k=0$$

希望这些问题能被解决.

参考文献：

[1] Broyden C G. The convergence of a class of double-rank minimization algorithms [J]. Journal of the Institute of Mathematics and Its Applications, 1970, 6(3):222.

[2] Powell M J D. On the convergence of the variable metric algorithm [J]. Journal of the Institute of Mathematics and Its Applications, 1971, 7(1):21.

[3] Powell M J D. Some global convergence properties of the variable metric algorithm for minimization without exact line searches[M]. NewYork: SIAM Publications, 1987.

[4] Byrd R H, Nocedal J, Yuan Y. Global convergence of a class of quasi-newton methods on convex problems [J]. SIAM Journal on Numerical Analysis, 1987, 24(5):1171.

[5] Pu D. A class of DFP algorithm without exact linear search [J]. Asia-Pacific Journal of Operation Research, 1992, 9:207.

[6] Mascarenhas W. The BFGS method with exact line searches fails for non convex objective functions [J]. Journal of Mathematical Programming, 2004, 99(1):49.

[7] Pu D, Yu W. On the convergence property of the DFP algorithm [J]. Annals of Operations Research, 1990, 24(1):175.

[8] Fletcher R. Practical methods of optimization [M]. New York: John Wiley and Sons, 1987.

[9] Pu D, Gui S, Tian W. A class of revised Broyden algorithms without exact line search [J]. Journal of Computational Mathematics, 2004, 22(1):11.

[10] Powell M J D. Some properties of the variable metric algorithm[C]//Numerical Methods for Nonlinear Optimization, London: Academic Press, 1972: 1-17.