

考虑相关性的第三方担保价值的评估

刘 易,任学敏,花 虹

(同济大学 应用数学系,上海 200092)

摘要: 在结构化模型的框架下,考虑到担保公司与被担保公司之间存在相关性时,因预付担保债务而导致资不抵债而违约的情况,得到有相关性的第三方担保的公司债券价格所满足的偏微分方程终边值问题. 利用数值计算分析了公司资产值、资产相关性、资产波动率、公司回收率和债券发行量等因素对于债券价格的影响.

关键词: 公司债券; 第三方担保; 信用风险; 结构化方法
中图分类号: F832.48 **文献标志码:** A

Evaluation of Firm Bond with Correlated Third Party Guarantee

LIU Yi, REN Xuemin, HUA Hong

(Department of Mathematics, Tongji University, Shanghai 200092, China)

Abstract: This paper presents the pricing model for firm bond with the correlated third party guarantee in structural approach, which considers that the guarantor may default due to the immediate future payment caused by the default of the secured party. With the proposed model, a terminal boundary-value problem of partial differential equation (PDE) is derived. A numerical analysis is made of the impacts of the firm asset, asset correlation, asset volatility and some other factors on the bond prices.

Key words: firm bond; third party guarantee; credit risk; structural model

近年来我国公司债券市场得到迅速发展. 相较于国债,公司债券收益较高,但存在着信用风险,其价格依赖于公司的信用等级. 以往公司债券主要通过商业银行担保对信用增级,提高债券的价格. 这一模式得到债券市场主要投资者的认可,但也导致公司债券的评级单一,基本都是 AAA 评级. 2007 年 10

月 12 日,银监会颁布了《关于有效防范企业债担保风险的意见》,叫停了银行为公司债券提供担保. 从而国内公司债券的信用增级方式从单一模式走向了多样化,如第三方担保、抵押担保、质押担保、财政增信等. 其中第三方担保是指由第三方公司对发行主体发行的公司债券的偿还提供担保,以提升债券的信用等级. 第三方担保作为常见的手段之一,得到了广泛的应用. 然而随着债券信用增级业务的迅速发展,市场规模逐步扩大,信用风险日益积累且类型不断增加. 特别的,由于担保公司和被担保公司之间存在相关性,从而可能导致他们公司违约时间的聚集性,加大了公司债券违约时损失,识别和防范各种信用风险成为投资者面临的重要问题. 2011 年 9 月作为“洛阳最佳担保公司”的洛阳盛归来投资担保有限公司破产,导致了被担保公司违约风险的急剧上升,投资者可能的风险敞口加大.

对公司债券的定价主要有两种方法:约化方法和结构化方法. 在约化方法中,违约时间是由一个外生的跳过程来刻画的,用 Poisson 过程来描述,如 Jarrow 和 Turnbull^[1]、Duffie 和 Singleton^[2]等的研究. 结构化方法是以期权定价理论为基础的, Merton^[3]通过公司的资本和负债的变动过程来刻画违约. Black 和 Cox^[4]对其进行推广提出了首次通过模型,当公司资产值下降到事先约定的违约边界时发生违约. Zhou^[5]引入了跳扩散过程,使得即使临近到期日公司也可能由其资产的大幅下降而造成违约.

尽管第三方担保为提升公司债券价格主要途径之一,但对有第三方担保的公司债券的定价模型研究相对较少. 任学敏等^[6]在约化模型的框架下,用偏微分方程的方法得到了第三方担保的公司债券的定价公式,讨论了担保公司的违约可能性大小等因素对债券定价的影响. 然而约化模型尽管在数据拟合

收稿日期: 2012-01-02

基金项目: 国家“九七三”重点基础研究发展计划(2007CB814903); 国家社会科学基金(12BJY011)

第一作者: 刘 易(1984—),女,博士生,主要研究方向为金融数学. E-mail: l7_yi@163.com

通讯作者: 任学敏(1962—),男,副教授,理学博士,主要研究方向为金融数学. E-mail: renxuemin@citiz.net

等方面存在着优势,但其主要的不足在于低估了公司的违约时间相关性^[7-8],而违约时间的相关性导致了公司违约的聚集性,加大投资者的损失,这对第三方担保债券的定价中有重要的影响.而结构化模型则能较好地刻画违约时间相关性,反映债券发行公司和担保公司可能的违约相关对于债券价格的影响.另外,约化方法难以处理被担保公司破产直接导致担保公司破产即同时违约的情形,这也是本文采用结构化方法的原因.

本文在结构化模型的框架下对第三方担保的公司债券定价. A、B 公司均发行债券,且 A 公司为 B 公司发行的债券进行担保. 考虑到当 B 公司违约时, A 公司由于预付担保债务的增加,而导致其违约状况的变化,即当 A 公司资产不足以支付自身的债务及所负担的 B 公司的剩余债务时, A 公司也因违约被清算,导致对 B 公司债券的担保能力下降. 本文推导出了第三方担保公司债券所满足的偏微分方程定解问题,通过数值计算分析了公司资产值、资产相关性、资产波动率等因素对于债券价格的影响.

1 基本假设

假设 1(市场)考虑带流概率空间 $(\Omega, F, \{F_t\}_{t \geq 0}, P)$, P 为市场的风险中性测度, $F = \{F_t\}_{t \geq 0}$ 为公司信息流. r 为无风险利率, 为正常数. 市场上存在 A、B 两家公司, 两家公司均发行公司债券, 且 A 公司为 B 公司发行的债券进行担保.

假设 2(公司债券)A 公司发行了 m_A 份到期日为 T_A 的零息票公司债券, 债券价值为 U_t ; B 公司发行了 m_B 份到期日为 T_B 的零息票公司债券, 其中 $T_B < T_A$, 债券价值为 V_t . 不失一般性, 假设债券的面值均为 1.

假设 3(公司) X_i 为第 i 家公司资产, 满足几何布朗运动:

$$\begin{cases} dX_i = rX_i dt + \sigma_i X_i dW_i \\ X_i(0) = x_i \end{cases}, i = A, B \quad (1)$$

式中: W_i 为标准布朗运动; $\text{Cov}(dW_A, dW_B) = \rho dt$, 常数 ρ 为公司资产的相关性, $0 \leq |\rho| \leq 1$; $X_i(0)$ 为第 i 家公司在初始时刻(即零时刻)的资产值; σ_i 为第 i 家公司资产的波动率.

在首次通过模型中, 第 i 家公司($i = A, B$)的违约时刻 τ_i 为其公司资产首次下降至违约边界 $b_i(t)$ 的时刻, 即

$$\tau_i = \inf\{t \mid X_i = b_i(t), t \in (0, T_i]\} \quad (2)$$

式中: $b_i(t)$ 为公司的违约边界, 采用与文献[4]中的假设, 将 $b_i(t)$ 设为相应公司负债值的贴现, 即 $b_i(t) = m_i e^{-r(T_i - t)}$, 假设公司除所发行的公司债券外无其他债务. 公司违约后的回收率分别为常数 $R_i, i = A, B$.

假设 4(担保机制)当 A 公司为 B 公司发行的债券担保时, 若 B 公司先于 A 公司及其债券到期日之前违约, A 公司向 B 公司债券持有者赔付债券的损失部分, 即 $(1 - R_B)m_B e^{-r(T_B - \tau_B)}$, 则 A 公司的总债务为 $K(\tau_B) = m_A e^{-r(T_A - \tau_B)} + (1 - R_B)m_B e^{-r(T_B - \tau_B)}$. 此时根据 A 公司的资产状况, 可能导致两种情况的发生:

(1) 若 A 公司的资产足以支付自身及因担保而引起的预付债务之和, 即 $X_A(\tau_B) > K(\tau_B)$, 则 B 公司债券持有者收到 B 公司的回收部分及 A 公司的赔付之和, 即为 B 公司债券面值在 τ_B 时刻的贴现, $m_B e^{-r(T_B - \tau_B)}$

(2) 若 A 公司的资产不足以支付自身及因担保而引起的预付债务之和, 即: $X_A(\tau_B) \leq K(\tau_B)$, 则 A 公司会因即将预付 B 公司违约的担保赔付而导致自身资不抵债而违约. 这时假设将 A 公司资产清算后的价值平均分配于自身债务和担保债务, 则可得:

$$(2.1) \text{ 每一份 A 公司债券持有者在 } \tau_B \text{ 时刻得分} \frac{m_A e^{-r(T_A - \tau_B)}}{m_A} \cdot \frac{R_A X_A(\tau_B)}{K(\tau_B)} = \frac{R_A X_A(\tau_B) e^{-r(T_A - \tau_B)}}{K(\tau_B)}$$

$$(2.2) \text{ 每一份 B 公司债券持有者在 } \tau_B \text{ 时刻得分} \frac{(1 - R_B)m_B e^{-r(T_B - \tau_B)}}{m_B} \cdot \frac{R_A X_A(\tau_B)}{K(\tau_B)} = \frac{(1 - R_B)R_A X_A(\tau_B) e^{-r(T_B - \tau_B)}}{K(\tau_B)}$$

2 模型建立

2.1 现金流分析

在 t 时刻, 不同情况下每一份 B 公司债券持有者的现金流为

(1) 当 A 公司和 B 公司在 B 公司债券到期日之前均未违约, 即 $\tau_A > T_B, \tau_B > T_B$, 则 B 公司可在到期日自行支付所有债券面值, B 公司债券持有者可得到: $e^{-r(T_B - \tau_B)} e^{-r(\tau_B - t)} = e^{-r(T_B - t)}$.

(2) 当 A 公司先于 B 公司及 B 公司债券到期日之前违约, 即 $\tau_A < \tau_B, t < \tau_A \leq T_B$, 则 B 公司债券失去担保, 为一份普通公司债券, B 公司债券持有者可得到: $P_B(\tau_B, T_B) e^{-r(\tau_B - t)}$. 其中: $P_B(\tau_B, T_B)$ 为 τ_B 时刻, 到期日为 T_B 的无担保的 B 公司债券的价值.

(3) 当 B 公司先于 A 公司及 B 公司债券到期日之前违约, 即 $\tau_B < \tau_A, t < \tau_B \leq T_B$, 则

(3.1) 当 $X_A(\tau_B) > K(\tau_B)$ 时, B 公司债券持有者可得到:

$$e^{-r(T_B - \tau_B)} e^{-r(\tau_B - t)} = e^{-r(T_B - t)}$$

(3.2) 当 $X_A(\tau_B) \leq K(\tau_B)$ 时, B 公司债券持有者可得到:

$$e^{-r(\tau_B - t)} \left(R_B + \frac{(1 - R_B) R_A X_A(\tau_B)}{K(\tau_B)} \right)$$

定义 t 时刻, B 公司债券的价值为 $V_t = E[\Pi | F_t]$, 其中:

$$\begin{aligned} \Pi = & I_{\tau_A > T_B} I_{\tau_B > T_B} e^{-r(T_B - t)} + I_{\tau_A < \tau_B} I_{t < \tau_A \leq T_B} P_B(\tau_B, T_B) e^{-r(\tau_B - t)} + I_{\tau_B < \tau_A} I_{t < \tau_B \leq T_B} I_{X_A(\tau_B) > K(\tau_B)} e^{-r(T_B - t)} + \\ & I_{\tau_B < \tau_A} I_{t < \tau_B \leq T_B} I_{X_A(\tau_B) \leq K(\tau_B)} \cdot \\ & e^{-r(\tau_B - t)} \left(R_B + \frac{(1 - R_B) R_A X_A(\tau_B)}{K(\tau_B)} \right) \end{aligned} \quad (3)$$

设 b_A, b_B 分别为 A, B 两家公司的违约边界, 当 A, B 两家公司的资产分别下降碰到违约边界 b_A, b_B 时, 公司即因资不抵债而违约. 由 Feynman-Kac 公式, 每张 B 公司债券的价值式(3)满足如下偏微分方程终边值问题:

$$\begin{cases} LV - rV = 0 \\ X_A \in (b_A, \infty), X_B \in (b_B, \infty), t \in [0, T_B) \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} V(b_A, X_B, t) = P_B(t, T_B) \\ X_B \in (b_B, \infty), t \in [0, T_B) \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} V(X_A, b_B, t) = f(X_A, t) \\ X_A \in (b_A, \infty), t \in [0, T_B) \end{cases} \quad (6)$$

$$\begin{cases} V(X_A, X_B, T_B) = 1 \\ X_A \in (b_A, \infty), X_B \in (b_B, \infty) \end{cases} \quad (7)$$

其中: $f(X_A, t) = I_{X_A(t) > K(t)} e^{-r(T_B - t)} + I_{X_A(t) \leq K(t)} \cdot e^{-r(\tau_B - t)} \left(R_B + \frac{(1 - R_B) R_A X_A(t)}{K(t)} \right)$, $L = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2} \left(\sigma_A^2 X_A^2 \cdot \frac{\partial^2}{\partial X_A^2} + 2\rho\sigma_A\sigma_B X_A X_B \frac{\partial^2}{\partial X_A \partial X_B} + \sigma_B^2 X_B^2 \frac{\partial^2}{\partial X_B^2} \right) + rX_A \cdot \frac{\partial}{\partial X_A} + rX_B \frac{\partial}{\partial X_B}$.

偏微分方程终边值问题式(4)~(7)表明:

(1) 当 A 公司和 B 公司均未发生违约时, B 公司债券的价值满足偏微分方程(4).

(2) 当担保 A 公司先发生违约时, B 公司失去了担保, 为一份相应的到期日为 T_B 的普通无担保债券 $P_B(t, T_B)$, B 公司债券的价值满足边界条件(5).

(3) 当被担保 B 公司先发生违约时, 根据此时 A 公司的资产情况可分为两种, 若 A 公司资产值大于赔付额与其违约边界之和, B 公司债券持有者可

得到债券的全部价值; 反之则 A 公司资产将被平均分配给 A、B 公司债券持有者, 综合两者 B 公司债券的价值满足边界条件(6).

(4) 当在 B 公司债券到期日, A、B 公司均未发生违约, 则 B 公司债券持有者可得到债券的面值, B 公司债券的价值满足终值条件(7).

到期日为 T_B , 无担保的 B 公司债券的价值 $P_B(t, T_B)$ 满足如下偏微分方程终边值问题^[9]:

$$\begin{cases} \frac{\partial P_B}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma_B^2 X_B^2 \frac{\partial^2 P_B}{\partial X_B^2} + rX_B \frac{\partial P_B}{\partial X_B} - rP_B = 0 \\ X_B \in (b_B, \infty), t \in [0, T_B) \end{cases} \quad (8)$$

$$P_B(b_B, t) = R_B b_B \quad t \in [0, T_B) \quad (9)$$

$$P_B(X_B, T) = 1 \quad X_B \in (b_B, \infty) \quad (10)$$

3 数值计算

采用有限元方法对偏微分方程终边值问题式(4)~(7)及式(8)~(10)进行离散, 计算得到数值结果包含: ①有担保和无担保情况下公司债券的比较; ②公司违约后回收率对于 B 公司债券的影响; ③公司资产相关性对于 B 公司债券的影响; ④公司资产波动率对于 B 公司债券的影响; ⑤公司债券发行量对于 B 公司债券的影响.

其中参数取值为: $\sigma_A = 0.1, \sigma_B = 0.3, \rho = 0.3, r = 0.05, R_A = 0.6, R_B = 0.4, b_A = 50$ 万份, $b_B = 50$ 万份, $T_A = 2, T_B = 1, m_A = 50$ 万份, $m_B = 10$ 万份.

图 1 为有相关性的第三方担保的公司债券和无担保的公司债券的比较. 有第三方担保的公司债券的价格要高于无担保的公司债券价格, 但低于无相关性的第三方担保的公司债券的价格. 这是因为第三方担保在公司违约时给予了公司债券一定的保

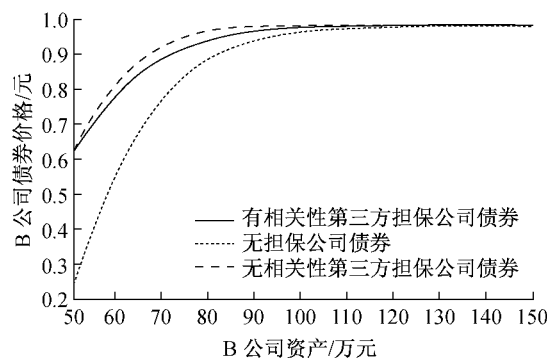


图1 存在第三方担保的公司债券和普通的公司债券价格的比较

Fig.1 The comparison of bond prices of the firms with and without third party guarantee

护,从而降低了债券持有者的可能损失,其差异值即为担保的价值.并且由于通常存在正相关性,则担保公司在被担保公司违约时,可能无法全额支付赔付,因而有正相关性情况下的公司债券价格较低.

图2为公司资产相关性对B公司债券价格的影响.随着资产相关性的上升,B公司债券价格下降.这是因为资产相关性的上升可能导致B公司的违约

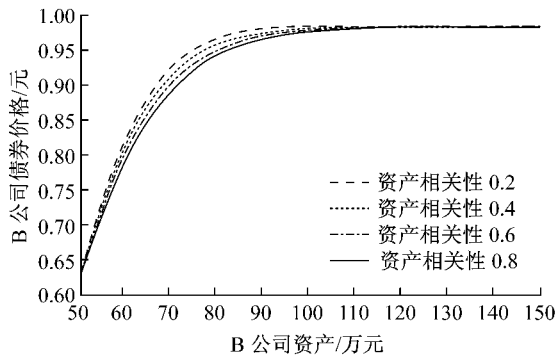


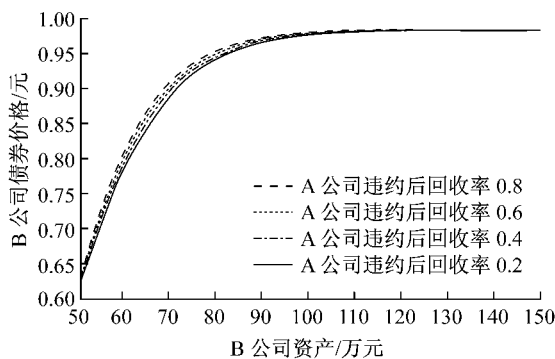
图2 公司资产相关性对于B公司债券价格的影响
Fig.2 The impact of firm asset correlation on bond price of Firm B

概率与为其担保的A公司的违约概率同时上升.这种担保作用的降低会导致B公司债券价格的下降.

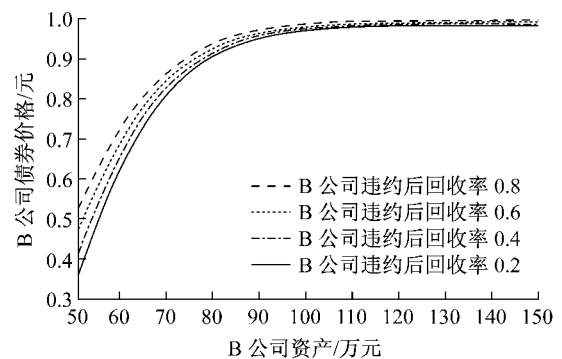
图3a和3b分别为A公司和B公司不同违约后回收率情况下,B公司债券的价格.从中可知随着A公司或B公司违约后回收率的上升,B公司债券的价格上升.这是因为违约后回收率的上升降低了债券持有者在公司违约后的可能损失.当B公司资产很大时,其违约的可能性很小,此时回收率的变化对B公司债券价格的影响也较小.

图4a和4b分别为A公司和B公司不同资产波动率情况下,B公司债券的价格.随着公司资产波动率的上升,B公司债券的价格下降.这是因为,波动率的上升导致公司违约风险的加大,债券持有者可能的损失加大.

图5为A、B公司债券发行量不同比率情况下,B公司债券价格的比较.A公司债券发行量的上升导致B公司债券价格的下降.这是因为A公司自身的负债随着其债券发行量上升而上升,此时对B公司债券的担保能力下降.



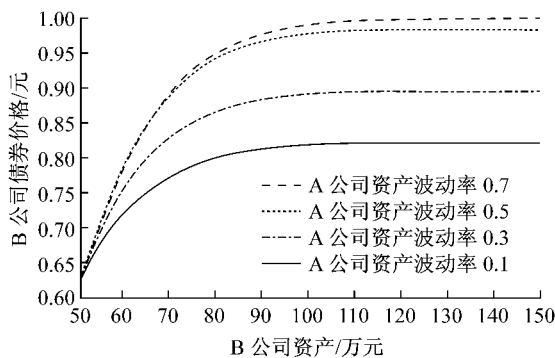
a A公司不同违约后回收率情况



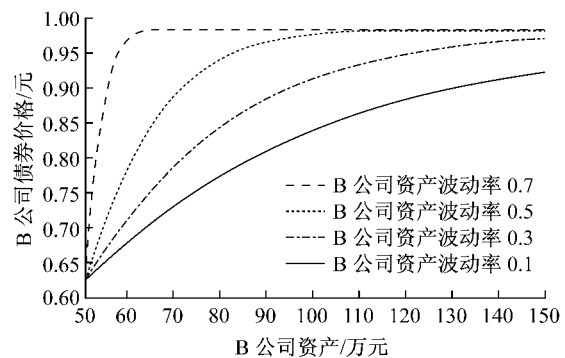
b B公司不同违约后回收率情况

图3 A、B公司不同违约后回收率情况下,B公司债券的价格的比较

Fig.3 The comparison of bond price of Firm B at different recovery rates of Firm A and B



a A公司不同资产波动率情况



b B公司不同资产波动率情况

图4 A、B公司不同资产波动率情况下,B公司债券的价格

Fig.4 The effect of asset volatility of Firm B on Firm A and B bonds

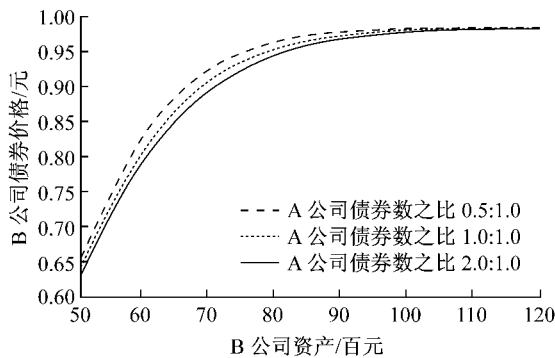


图5 A、B公司债券发行量不同比率情况下，
B公司债券价格的比较

Fig.5 The comparison of bond price of Firm B on
different issue volume ratios of Firm A and B

4 结论

本文在结构化模型的框架下,得到了有相关性的第三方担保的公司债券价格所满足的偏微分方程终边值问题,其中特别考虑了担保公司因预付担保债务而导致资不抵债而违约的情况.数值计算的结果表明了有相关性的第三方担保的公司债券价格要高于无担保的公司债券价格,但低于无相关性情况下有第三方担保的公司债券价格.并重点考虑了担保公司和被担保公司之间的资产相关性对于债券价格负向的影响,以及资产波动率、公司回收率和债券发行量等与债券价格的关系.本文针对有相关性的

第三方担保的公司债券给出了更为符合市场实际的模型,为金融机构提供了计算担保价值和为此类债券定价的方法和模型.

参考文献:

- [1] Jarrow R, Lando D, Turnbull S. A Markov model for the term structure of credit risk spreads [J]. Review of Financial Studies, 1997, 10: 481.
- [2] Duffie D, Singleton K J. Modeling term structure of defaultable bonds[J]. Review of Financial Studies, 1999, 12: 687.
- [3] Merton R. On the pricing of corporate debt: the risk structure of interest rates[J]. Journal of Finance, 1974, 29: 449.
- [4] Black F, Cox J C. Valuing corporate securities: some effects of bond indenture provisions[J]. Journal of Finance, 1976, 31: 351.
- [5] Zhou C. A jump-diffusion approach to modeling credit risk and valuing defaultable securities[R]. Washington D C: Federal Reserve Bora, 1997.
- [6] 任学敏, 万凝. 用约化方法对有第三方担保的企业债券定价[J]. 同济大学学报:自然科学版, 2009, 37(7): 989.
REN Xuemin, WAN Ning. Pricing of firm bond with third party surety by reduced form approach [J]. Journal of Tongji University: Natural Science, 2009, 37(7): 989
- [7] Hull J, White A. Valuing credit default swaps II: modeling default correlations [J]. Journal of Derivatives, 2001, 8(3): 12.
- [8] Schonbucher P, Schubert D. Copula-dependent default risk in intensity models [R]. Bonn: Bonn University Economics Department, 2001.
- [9] Bielecki T, Rutkowski M. Credit risk: modeling, valuation and hedging [M]. New York: Springer, 2002.