文章编号：0253-374X(2013)04-0637-04　　DOI：10.3969/j.issn.0253-374x.2013.04.026

奇异线性二次最优控制的线性迭代计算方法

周佳妮，朱经浩
(同济大学 数学系，上海 200092)

摘要：利用经典线性二次最优控制的 Riccati 方程的线性迭代法研究一类奇异线性二次最优控制问题. 对于线性迭代序列的收敛性进行了分析并且给出了算法. 该算法通过 3 个例子得到验证.

关键词：奇异线性二次最优控制；经典线性二次最优控制；Riccati 矩阵微分方程
中图分类号：O151　　**文献标志码**：A

Computation of Singular Linear Quadratic Optimal Control

ZHOU Jiani, *ZHU Jinghao*
(Department of Mathematics, Tongji University, Shanghai 200092, China)

Abstract: A class of linear quadratic (LQ) singular optimal control problems is investigated by an iteration process of Riccati differential equation for classical LQ optimal control problem. The convergence result is obtained to give an algorithm for computing the optimal value of this kind of problem. Moreover, three examples are given to illustrate the iteration process.

Key words: singular linear quadratic (LQ) optimal control; classical LQ optimal control; matrix differential Riccati equation

本文考虑如下有穷闭区间$[0,T]$上的奇异线性二次最优控制问题：

$$\min J(u(\cdot))=\int_0^T[\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{W}(t)\boldsymbol{x}(t)]\mathrm{d}t+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(T)\boldsymbol{H}\boldsymbol{x}(T)$$
$$\text{s.t. }\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{u}(t),\ \boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}_0 \tag{1}$$

其中$\boldsymbol{A}(\cdot):[0,T]\to\mathbf{R}^{n\times n}$，$\boldsymbol{B}(\cdot):[0,T]\to\mathbf{R}^{n\times m}$都是连续的矩阵函数，$\boldsymbol{u}(\cdot):[0,T]\to\mathbf{R}^n$是平方可积的，$\boldsymbol{x}_0\in\mathbf{R}^n$是给定的. 又设$\boldsymbol{W}(\cdot):[0,T]\to\mathbf{R}^{n\times n}$是连续的，并且在$[0,T]$上满足$\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}(t)=\boldsymbol{W}(t)\geqslant 0$. 再设$\boldsymbol{H}\in\mathbf{R}^{n\times n}$是半正定的对称矩阵. 奇异线性二次最优控制问题在理论研究和实际应用中广泛存在，是最优控制研究领域的一个重要组成部分，同时也是控制论的一个研究热点，得到众多学者的广泛关注[1-2].

对于奇异线性二次最优控制问题，按照经典的奇异最优控制方法[3-4]，对于小参数$\varepsilon>0$，考虑以下经典的线性二次最优控制问题：

$$\min J_\varepsilon(\boldsymbol{u}(\cdot))=\int_0^T[\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{W}(t)\boldsymbol{x}(t)+\varepsilon\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{u}(t)]\mathrm{d}t+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(T)\boldsymbol{H}\boldsymbol{x}(T)$$
$$\text{s.t. }\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{u}(t),\quad \boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}_0,t\in[0,T] \tag{2}$$

如果奇异线性二次最优控制问题有解，可通过求解最优控制问题得到原问题的近似解. 由于$\varepsilon>0$，最优控制问题属于经典的线性二次最优控制问题，其解可由以下倒向 Riccati 矩阵微分方程[5]得到

$$\dot{\boldsymbol{P}}+\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}-\varepsilon^{-1}\boldsymbol{P}\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}+\boldsymbol{W}=0,\quad \boldsymbol{P}(T)=\boldsymbol{H},\ t\in[0,T] \tag{3}$$

如果$\boldsymbol{P}(\cdot):[0,T]\to\mathbf{R}^{n\times n}$满足上述倒向 Riccati 矩阵微分方程[5]，则线性二次最优控制问题的最优控制$\boldsymbol{u}(\cdot)$和相应的线性系统的轨道$\boldsymbol{x}(\cdot)$之间满足以下反馈关系式：

$$\boldsymbol{u}(t)=-\varepsilon^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}(t) \tag{4}$$

关于上述 Riccati 矩阵微分方程的数值解得到了学术界和实际工作者的重视. 近年来，关于 Riccati 矩阵微分方程的线性迭代算法得到充分发展[5-6]，所得到的迭代序列具有平方阶收敛速度. 本文则把 Riccati 矩阵微分方程迭代法和经典奇异最优控制的小参数逼近方法结合起来，基于线性

收稿日期：2012-06-23
第一作者：周佳妮(1987—)，女，博士生，主要研究方向为最优控制理论与应用. E-mail：jennyzhou@yahoo.cn
通讯作者：朱经浩(1949—)，男，教授，博士生导师，理学博士，主要研究方向为最优控制理论与应用. E-mail：jinghaok@online.sh.cn

Laypunov 微分方程，建立一种奇异线性二次最优控制问题的线性迭代计算方法.

1 线性二次最优控制问题的线性迭代解

引用文献[5-6]的相关结果，对于给定的连续矩阵函数 $k(t):[0,T]\to\mathbf{R}^{m\times n}$，有以下 Lyapunov 矩阵微分方程：

$$\dot{\boldsymbol{P}}+\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{k})+(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{k})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}+\boldsymbol{W}+\varepsilon\,\boldsymbol{k}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{k}=0,\quad \boldsymbol{P}(T)=\boldsymbol{H} \tag{5}$$

容易得到上述 Laypunov 微分方程的解的积分表达式为

$$\boldsymbol{P}_k(t)=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}(T,t)\boldsymbol{H}\boldsymbol{X}(T,t)+\int_t^T\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}(s,t)\cdot(\boldsymbol{W}(s)+\varepsilon\,\boldsymbol{k}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{k})\boldsymbol{X}(s,t)\mathrm{d}s \tag{6}$$

其中 $\boldsymbol{X}(s,t)$，$0\leqslant s<t\leqslant T$ 是线性系统 $\dot{\boldsymbol{x}}=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{k})\boldsymbol{x}$ 的基本解矩阵. 由上述 Laypunov 微分方程的解可定义连续矩阵函数 $\boldsymbol{K}(t)=-\varepsilon^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}(t)\cdot\boldsymbol{P}_k(t)$，而由其产生的 Laypunov 微分方程的解记为 $\boldsymbol{P}_K(t)$. 文献[5-6]指出 $\boldsymbol{P}_k(t)$ 与 $\boldsymbol{P}_K(t)$ 之间的关系.

定理 1[5-6] 对于给定的 $\boldsymbol{k}(t)\in C([0,T],\mathbf{R}^{n\times n})$，当 $t\in[0,T]$ 时，有

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_k(t)\boldsymbol{x}\geqslant\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_K(t)\boldsymbol{x} \tag{7}$$

由上述定理，可建立如下倒向 Riccati 矩阵微分方程(3)或最优控制问题的迭代解法. 对于给定 $\boldsymbol{k}_0(t)\in C([0,T],\mathbf{R}^{n\times n})$，计算矩阵函数

$$\boldsymbol{P}_0(t)=\boldsymbol{X}_0^{\mathrm{T}}(T,t)\boldsymbol{H}\boldsymbol{X}_0(T,t)+\int_t^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}_0^{\mathrm{T}}(s,t)\cdot(\boldsymbol{W}+\varepsilon\,\boldsymbol{k}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{k}_0)\boldsymbol{X}_0(s,t)\mathrm{d}s$$

其中 $\boldsymbol{X}_0(s,t)$，$0\leqslant s<t\leqslant T$ 是线性系统 $\dot{\boldsymbol{x}}=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{k}_0)\boldsymbol{x}$ 的基本解矩阵，对于以 $(t,\boldsymbol{x})$ 为初值的解 $\boldsymbol{x}(\cdot)$，满足 $\boldsymbol{x}(s)=\boldsymbol{X}_0(s,t)\boldsymbol{x}$. 进而取 $\boldsymbol{k}_1(t)=-\varepsilon^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_0$，得到

$$\boldsymbol{P}_1(t)=\boldsymbol{X}_1^{\mathrm{T}}(T,t)\boldsymbol{H}\boldsymbol{X}_1(T,t)+\int_t^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}_1^{\mathrm{T}}(s,t)\cdot(\boldsymbol{W}(s)+\varepsilon\,\boldsymbol{k}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{k}_1)\boldsymbol{X}_1(s,t)\mathrm{d}s$$

其中 $\boldsymbol{X}_1(s,t)$，$0\leqslant s<t\leqslant T$ 是线性系统 $\dot{\boldsymbol{x}}=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{k}_1)\boldsymbol{x}$ 的基本解矩阵，对于以 $(t,\boldsymbol{x})$ 为初值的解 $\boldsymbol{x}(\cdot)$，满足 $\boldsymbol{x}(s)=\boldsymbol{X}_1(s,t)\boldsymbol{x}$. 一般地，当 $i\geqslant1$ 时，取 $\boldsymbol{k}_i(t)=-\varepsilon^{-1}\boldsymbol{B}(t)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_{i-1}(t)$，得到

$$\boldsymbol{P}_i(t)=\boldsymbol{X}_i^{\mathrm{T}}(T,t)\boldsymbol{H}\boldsymbol{X}_i(T,t)+\int_t^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}_i^{\mathrm{T}}(s,t)\cdot(\boldsymbol{W}(s)+\varepsilon\,\boldsymbol{k}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{k}_i)\boldsymbol{X}_i(s,t)\mathrm{d}s$$

其中 $\boldsymbol{X}_i(s,t)$，$0\leqslant s<t\leqslant T$ 是线性系统 $\dot{\boldsymbol{x}}=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{k}_i)\boldsymbol{x}$ 的基本解矩阵，对于以 $(t,\boldsymbol{x})$ 为初值的解 $\boldsymbol{x}(\cdot)$，满足 $\boldsymbol{x}(s)=\boldsymbol{X}_i(s,t)\boldsymbol{x}$. 由此得到关于线性时变系统二次最优控制问题的倒向 Riccati 矩阵微分方程的一个迭代序列 $\{\boldsymbol{P}_i(t)\}$，$t\in[0,T]$，$i=1,2,\cdots,n$.

利用定理 1，由文献[5-6]利用同样的方法可得到以下关于序列 $\{\boldsymbol{P}_i(t)\}$ 的单调性、一致收敛性及平方阶收敛性等基本结论.

定理 2(单调性) 对于给定 $k_0(t)\in C([0,T],\mathbf{R}^{n\times n})$ 和小参数 $\varepsilon>0$，序列 $\{\boldsymbol{P}_i(t)\}$，$t\in[0,T]$，$i=1,2,\cdots,n$ 是单调递减的半正定矩阵函数序列，即对每个 $t\in[0,T]$，有

$$0\leqslant\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_{i+1}(t)\boldsymbol{x}\leqslant\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_i(t)\boldsymbol{x},\ i=1,2,\cdots,n \tag{8}$$

定理 3(一致收敛性) 矩阵函数序列 $\{\boldsymbol{P}_i(t)\}$，$t\in[0,T]$，$i=1,2,\cdots,n$ 在 $[0,T]$ 上一致收敛到半正定矩阵函数 $\boldsymbol{P}(t)$，而 $\boldsymbol{P}(t)$ 满足以下倒向 Riccati 矩阵微分方程

$$\dot{\boldsymbol{P}}+\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}-\varepsilon^{-1}\boldsymbol{P}\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}+\boldsymbol{W}=0,\quad \boldsymbol{P}(T)=\boldsymbol{H} \tag{9}$$

为了讨论矩阵函数序列 $\{\boldsymbol{P}_i(t)\}$ 的收敛速度，这里引入 $[0,T]$ 上的连续矩阵函数 $Q(\cdot)$ 的范数

$$\|Q\|=\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|Q(t)\|_2 \tag{10}$$

定理 4(平方阶收敛速度) 对于矩阵函数序列 $\{\boldsymbol{P}_i(t)\}$，$t\in[0,T]$，$i=1,2,\cdots,n$ 存在常数 C 使得

$$\|\boldsymbol{P}_{i+1}-\boldsymbol{P}\|\leqslant C\|\boldsymbol{P}_i-\boldsymbol{P}\|^2,\ i=1,2,\cdots,n \tag{11}$$

2 奇异线性二次最优控制问题的线性迭代算法

设奇异线性二次最优控制问题存在最优控制 $\boldsymbol{u}^*(\cdot)\in L^2([0,T];\mathbf{R}^n)$，使得

$$J(\boldsymbol{u}^*)=\min_{L^2([0,T];\mathbf{R}^n)}J(\boldsymbol{u})=v_P>-\infty.$$

又由经典的线性二次最优控制[3]可知，最优控制问题的解是存在且唯一的，而且若 $\boldsymbol{P}_\varepsilon(\cdot):[0,T]\to\mathbf{R}^{n\times n}$ 满足倒向矩阵微分方程

$$\dot{\boldsymbol{P}}+\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}-\varepsilon^{-1}\boldsymbol{P}\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}+\boldsymbol{W}=0,\quad \boldsymbol{P}(T)=\boldsymbol{H},t\in[0,T] \tag{12}$$

则线性二次最优控制问题的解 $\hat{\boldsymbol{u}}_\varepsilon(\cdot)$ 和相应的轨道 $\hat{\boldsymbol{x}}_\varepsilon(\cdot)$ 之间满足关系式

$$\hat{\boldsymbol{u}}_\varepsilon(t)=-\varepsilon^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_\varepsilon\hat{\boldsymbol{x}}_\varepsilon(t) \tag{13}$$

且问题的最优值满足

$$J_\varepsilon(\hat{\boldsymbol{u}}_\varepsilon)=\min_{L^2([0,T];\mathbf{R}^n)}J_\varepsilon(\boldsymbol{u})=\boldsymbol{x}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_\varepsilon(0)\boldsymbol{x}_0 \tag{14}$$

引理 1　若奇异线性二次最优控制问题满足 $\min\limits_{L^2([0,T];\mathbf{R}^n)} J(\boldsymbol{u})=v_P>-\infty$，则存在 $M>0$，使得

$$|J_\varepsilon(\hat{\boldsymbol{u}}_\varepsilon(\cdot))-v_P|\leqslant\varepsilon M \tag{15}$$

或

$$|\boldsymbol{x}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_\varepsilon(0)\boldsymbol{x}_0-v_P|\leqslant\varepsilon M \tag{16}$$

证明　由假设奇异线性二次最优控制问题存在最优控制 $\boldsymbol{u}^*(\cdot)\in L^2([0,T];\mathbf{R}^n)$，取 $M>0$，使得

$$M=\int_0^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{u}^*(t))^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}^*(t)\mathrm{d}t$$

那么，由于 $\boldsymbol{u}_\varepsilon(\cdot)$ 为线性二次最优控制问题的最优控制，由式(14)及 $J_\varepsilon(\hat{\boldsymbol{u}}_\varepsilon)$ 的表达式，有

$$0\leqslant\boldsymbol{x}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_\varepsilon(0)\boldsymbol{x}_0=J_\varepsilon(\hat{\boldsymbol{u}}_\varepsilon)\leqslant J_\varepsilon(\boldsymbol{u}^*(\cdot))=J(\boldsymbol{u}^*(\cdot))+\varepsilon\int_0^T\boldsymbol{u}^*(t)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}^*(t)\mathrm{d}t=v_P+\varepsilon M \tag{17}$$

即得到式(16)。

另一方面，由于 $\boldsymbol{u}^*(\cdot)$ 为奇异线性二次最优控制问题的最优控制，并由 $J(\boldsymbol{u}(\cdot))$ 和 $J_\varepsilon(\boldsymbol{u}(\cdot))$ 的表达式，有

$$J(\boldsymbol{u}^*)\leqslant J(\hat{\boldsymbol{u}}_\varepsilon)\leqslant J_\varepsilon(\hat{\boldsymbol{u}}_\varepsilon) \tag{18}$$

从而有

$$J_\varepsilon(\hat{\boldsymbol{u}}_\varepsilon(\cdot))\geqslant v_P \tag{19}$$

因此由式(17)，(19)，(14)得到

$$|J_\varepsilon(\hat{\boldsymbol{u}}_\varepsilon(\cdot))-v_0|\leqslant\varepsilon M$$

或

$$|\boldsymbol{x}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_\varepsilon(0)\boldsymbol{x}_0-v_P|\leqslant\varepsilon M$$

定理 5　设 $\boldsymbol{P}_\varepsilon(\cdot):[0,T]\to\mathbf{R}^{n\times n}$ 满足倒向 Riccati 矩阵微分方程

$$\dot{\boldsymbol{P}}+\boldsymbol{PA}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}-\varepsilon^{-1}\boldsymbol{PBB}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}+\boldsymbol{W}=0,\ \boldsymbol{P}(T)=\boldsymbol{H},\quad t\in[0,T]$$

又设矩阵函数序列 $\{\boldsymbol{P}_i^{(\varepsilon)}(t)\}$ 是关于线性二次最优控制问题的线性迭代序列，则存在 $M>0$，对于充分大的正整数 i_ε，满足

$$|\boldsymbol{x}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_{i_\varepsilon}^{(\varepsilon)}(t)\boldsymbol{x}_0-v_P|\leqslant(\|\boldsymbol{x}_0\|^2+M)\varepsilon \tag{20}$$

证明　由引理 1 和式(14)，存在 $M>0$，使得

$$|J_\varepsilon(\hat{\boldsymbol{u}}_\varepsilon(\cdot))-v_P|=|\boldsymbol{x}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_\varepsilon(0)\boldsymbol{x}_0-v_P|\leqslant\varepsilon M \tag{21}$$

另一方面，由于矩阵函数序列 $\{\boldsymbol{P}_i^{(\varepsilon)}(t)\}$ 一致收敛到 $\boldsymbol{P}_\varepsilon(t)$，所以存在矩阵函数 $\boldsymbol{P}_{i_\varepsilon}^{(\varepsilon)}(t)$，使得

$$\|\boldsymbol{P}_{i_\varepsilon}^{(\varepsilon)}(0)-\boldsymbol{P}_\varepsilon(0)\|\leqslant\varepsilon$$

从而有

$$|\boldsymbol{x}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_{i_\varepsilon}^{(\varepsilon)}(0)\boldsymbol{x}_0-J_\varepsilon(\hat{\boldsymbol{u}}_\varepsilon(\cdot))|=|\boldsymbol{x}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_{i_\varepsilon}^{(\varepsilon)}(0)\cdot\boldsymbol{x}_0-\boldsymbol{x}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_\varepsilon(0)\boldsymbol{x}_0|\leqslant\|\boldsymbol{x}_0^{\mathrm{T}}\|\|\boldsymbol{P}_{i_\varepsilon}^{(\varepsilon)}(0)-\boldsymbol{P}_\varepsilon(0)\|\cdot\|\boldsymbol{x}_0\|\leqslant\varepsilon\|\boldsymbol{x}_0\|^2$$

由三角不等式，并且注意到 $J_\varepsilon(\hat{\boldsymbol{u}}_\varepsilon(\cdot))=\boldsymbol{x}_0^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{P}_\varepsilon(0)\boldsymbol{x}_0$，可得

$$|\boldsymbol{x}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_{i_\varepsilon}^{(\varepsilon)}(0)\boldsymbol{x}_0-v_P|\leqslant|\boldsymbol{x}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_{i_\varepsilon}^{(\varepsilon)}(0)\boldsymbol{x}_0-J_\varepsilon(\hat{\boldsymbol{u}}_\varepsilon(\cdot))|+|J_\varepsilon(\hat{\boldsymbol{u}}_\varepsilon(\cdot))-v_P|\leqslant(\|\boldsymbol{x}_0\|^2+M)\varepsilon$$

由上述定理，可建立奇异线性二次最优控制问题的迭代算法。

第 1 步：给定精度 $\varepsilon>0$，以及 $K_0(\cdot)=0$，令 $i=0$。

第 2 步：计算 $\boldsymbol{P}_i^{(\varepsilon)}(t)$。

第 3 步：若 $|\boldsymbol{x}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_{i+1}^{(\varepsilon)}(0)\boldsymbol{x}_0-\boldsymbol{x}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_i^{(\varepsilon)}(0)\boldsymbol{x}_0|<\varepsilon$，则迭代停止，给出近似最优值 $\boldsymbol{x}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_i(0)\boldsymbol{x}_0$，否则，令 $i=i+1$，转第 2 步。

3　算例

例 1　在计算精度为 $\varepsilon=0.001$ 的情况下，考虑以下 $\mathbf{R}^1$ 上的奇异线性二次最优控制问题：

$$\min J(u)=\int_0^2 x^2(t)\mathrm{d}t$$

$$\text{s.t.}\ \dot{x}(t)=x(t)+u(t),\ 0\leqslant t\leqslant 2$$

$$x(0)=1$$

采用本文算法求解该问题。首先取定 $\varepsilon=0.001$，由题设可知 $W=1,A=1,B=1,T=2,H=0$。对于给定的 $k_0(t)=0$，解如下微分方程：

$$\dot{P}+PA+AP+W=0\quad P(2)=0$$

可推得

$$P_0(t)=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{2(2-t)}-1)$$

本文算法迭代后得到的数据见表 1。

由表 1 可知

$$P_{10^{-3}}(0)\approx 0.000\,86$$

由于 $x(0)P_{10^{-3}}(0)x(0)=0.000\,86$，且

$$|x(0)P_{10^{-3}}(0)x(0)-v|<\varepsilon$$

可知以上奇异线性二次最优控制问题的近似最优值为 $x(0)P_{10^{-3}}(0)x(0)=0.000\,86$。

表 1　例 1 的迭代数据表

Tab.1　Iterative data table for Numerical Example 1.

迭代次数 i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$P_{i_{10^{-3}}}(0)$	6.700 0	3.350 0	1.670 0	0.837 5	0.418 7	0.209 4	0.104 7	0.052 3	0.026 2	0.013 1	0.006 5	0.003 4	0.001 7	0.000 9

例2 在计算精度为 $\varepsilon=0.01$ 的情况下,考虑以下 $\mathbf{R}^2$ 上的奇异线性二次最优控制问题:

$$\min J(\boldsymbol{u})=\int_0^1 \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{4}\\ \frac{1}{4} & 1\end{pmatrix}\boldsymbol{x}(t)\,\mathrm{d}t+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(1)\boldsymbol{x}(1)$$

$$\text{s.t. } \dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{u}(t),\ 0\leqslant t\leqslant 1$$

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(0)=(1\quad 1)$$

采用本文算法求解该问题. 首先取定 $\varepsilon=0.01$,由题设可知 $W=\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{4}\\ \frac{1}{4} & 1\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{A}=0,\boldsymbol{B}=\boldsymbol{I},\boldsymbol{T}=1,\boldsymbol{H}=I$. 对于给定的 $\boldsymbol{k}_0(t)=0$,解如下微分方程:

$$\dot{\boldsymbol{P}}+\boldsymbol{W}=0,\ \boldsymbol{P}(T)=\boldsymbol{I}$$

可得到

$$\boldsymbol{P}_0(t)=\boldsymbol{I}+\boldsymbol{W}(T-t)=\begin{pmatrix}2-t & \frac{1}{4}(1-t)\\ \frac{1}{4}(1-t) & 2-t\end{pmatrix}$$

按本文算法迭代后得到表2.

表2 例2的迭代数据表

Tab.2 Iterative data table for Numerical Example 2

迭代次数 i	$P_{11}(0)$	$P_{12}(0)$	$P_{21}(0)$	$P_{22}(0)$
1	0.050 043	0.006 256	0.050 043	0.006 256
2	0.025 108	0.003 139	0.025 108	0.003 139
3	0.012 738	0.001 593	0.012 738	0.001 593
4	0.006 744	0.000 845	0.006 744	0.000 845
5	0.004 093	0.000 515	0.004 093	0.000 515
6	0.003 246	0.000 411	0.003 246	0.000 411
7	0.003 139	0.000 399	0.003 139	0.000 399
8	0.003 137	0.000 399	0.003 137	0.000 398
9	0.003 137	0.000 399	0.003 137	0.000 399

由表2可知

$$\boldsymbol{P}_{10^{-2}}(0)\approx\begin{pmatrix}0.003\,137 & 0.000\,399\\ 0.000\,399 & 0.003\,137\end{pmatrix}$$

由于 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(0)\boldsymbol{P}_{10^{-2}}(0)x(0)=0.007\,071$,而

$$|\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(0)\boldsymbol{P}_{10^{-2}}(0)\boldsymbol{x}(0)-\upsilon|<\varepsilon$$

由此可知原奇异线性二次最优控制问题的近似最优值为 0.007 071.

例3 在计算精度为 $\varepsilon=0.01$ 的情况下,考虑以下 $\mathbf{R}^2$ 上的奇异线性二次最优控制问题:

$$\min J(\boldsymbol{u})=\int_0^1 \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{4}\\ \frac{1}{4} & 1\end{pmatrix}\boldsymbol{x}(t)\,\mathrm{d}t+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(1)\boldsymbol{x}(1)$$

$$\text{s.t. } \dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{u}(t),\ 0\leqslant t\leqslant 1$$

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(0)=(1\quad 1)$$

采用本文算法求解该问题. 首先取定 $\varepsilon=0.01$,由题设可知 $W=\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{4}\\ \frac{1}{4} & 1\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I},\boldsymbol{B}=\boldsymbol{I},\boldsymbol{T}=1,\boldsymbol{H}=\boldsymbol{I}$. 对于给定的 $\boldsymbol{k}_0(t)=0$,解如下微分方程:

$$\dot{\boldsymbol{P}}+\boldsymbol{PA}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}+\boldsymbol{W}=0,\ \boldsymbol{P}(T)=\boldsymbol{I}$$

可得到

$$\boldsymbol{P}_0(t)=\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\mathrm{e}^{2-2t}-\frac{1}{2}, & \frac{1}{8}\mathrm{e}^{2-2t}-\frac{1}{8}\\ \frac{1}{8}\mathrm{e}^{2-2t}-\frac{1}{8}, & \frac{3}{2}\mathrm{e}^{2-2t}-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

按本文算法迭代后得到的数据见表3.

表3 例3的迭代数据表

Tab.3 Iterative data table for Numerical Example 3

迭代次数 i	$P_{11}(0)$	$P_{12}(0)$	$P_{21}(0)$	$P_{22}(0)$
1	2.699 547	0.203 987	2.699 547	0.203 987
2	1.376 754	0.104 152	1.376 754	0.104 152
3	0.701 269	0.053 064	0.701 269	0.053 064
4	0.356 105	0.026 897	0.356 105	0.026 897
5	0.183 400	0.011 974	0.183 400	0.011 974
6	0.126 023	0.001 683	0.126 023	0.001 683
7	0.121 847	0.000 008	0.121 847	0.000 008
8	0.121 837	0	0.121 837	0
9	0.121 837	0	0.121 837	0

由表3可知

$$\boldsymbol{P}_{10^{-2}}(0)\approx\begin{pmatrix}0.121\,837 & 0\\ 0 & 0.121\,837\end{pmatrix}$$

由于 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(0)\boldsymbol{P}_{10^{-2}}(0)\boldsymbol{x}(0)=0.243\,674$,而

$$|\boldsymbol{x}(0)\boldsymbol{P}_{10^{-2}}(0)\boldsymbol{x}(0)-\upsilon|<\varepsilon$$

由此可知原奇异线性二次最优控制问题的近似最优值为 0.243 674.

参考文献:

[1] Jacobson D, Gershwin S, Lele M. Computation of optimal singular controls [J]. Automatic Control, 1970, 15(1): 67.

[2] Kalman R. The theory of optimal control and the calculus of variations [M]. New York: University of California Press, 1963.

[3] Sontag E D. Mathematical control theory: deterministic finite dimensional systems[M]. 2nd ed. New York: Springer, 1998.

[4] Russell D L. Mathematics of finite dimensional control systems: theory and design [M]. New York: Marcel Dekker, 1979.

[5] ZHU Jinghao. On stochastic Riccati equations for the stochastic LQR problem[J]. Systems and Control Letters, 2005, 54(2): 119.

[6] 朱经浩. 最优控制中的数学方法[M]. 北京: 科学出版社, 2011.
ZHU Jinghao. The mathematical methods in optimal control [M]. Beijing: Science Press, 2011.