

# 高强钢筋混凝土梁短期变形计算方法研究

周建民<sup>1</sup>, 陈 硕<sup>1</sup>, 王晓锋<sup>2</sup>, 赵 勇<sup>1</sup>

(1. 同济大学 土木工程学院, 上海 200092; 2. 中国建筑科学研究院, 北京 100013)

**摘要:** 为推广和应用高强钢筋, 对配置高强钢筋的混凝土梁和预应力钢筋混凝土梁进行了一系列单调加载试验. 试验结果表明, 新规范 GB 50010—2010 对配置高强钢筋的混凝土梁在短期的刚度计算上是适用的; 影响混凝土梁变形性能的主要因素为初始刚度、配筋率与荷载. 在此基础上, 进一步推导出不仅适用于混凝土梁, 也适用于预应力混凝土梁短期变形计算的简化公式. 与国内外规范对比结果和试验结果表明, 文中建议公式计算精度高, 概念清晰, 简单实用.

**关键词:** 混凝土梁; 高强钢筋; 短期变形; 计算方法

**中图分类号:** TU378

**文献标志码:** A

## Calculation Methods of Short-term Deformation of Concrete Beams with High Strength Steel Bars

ZHOU Jianmin<sup>1</sup>, CHEN Shuo<sup>1</sup>, WANG Xiaofeng<sup>2</sup>, ZHAO Yong<sup>1</sup>

(1. College of Civil Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, China; 2. China Academy of Building Research, Beijing 100013, China)

**Abstract:** Tests of reinforced concrete (RC) and prestressed reinforced concrete (PRC) beams with 500MPa steel bars were carried out in Tongji University in order to promote the application of high strength steel bar. The results verifies the equations from new code GB 50010—2010 on calculating short term flexural stiffness of concrete beams with high strength steel bars. The deformational response of beams is mainly influenced by three parameters including initial elastic flexural stiffness, longitudinal reinforcement ratio and load level. Based on the tests, a simplified formula is proposed on the basis of the theoretical analyses of the prediction of the short term deformation of concrete beams with high strength steel bars. A comparison with the calculations of different codes at home and abroad exhibits that the proposed formula is precise and practical for both RC and PRC beams.

**Key words:** concrete beam; high strength steel bar; short term deformation; calculation method

2011 年 7 月 1 日, 由中国住建部颁布的混凝土结构设计新规范《GB 50010—2010》开始施行, 正式将 500 MPa 高强钢筋纳入推广范围. 然而, 高强钢筋的使用是否会导致正常使用阶段混凝土梁的挠度和裂缝宽度过大, 有待进一步论证. 我国混凝土规范对钢筋混凝土受弯构件和预应力钢筋混凝土受弯构件分别采用两种不同的模式计算开裂后的刚度, 与国际上通行的做法不符; 国内外关于刚度的规范公式大多计算复杂, 不便于工程实际应用. 近年来, 同济大学及相关高校根据规范课题组的要求, 对配置高强钢筋的混凝土梁和预应力混凝土梁进行了一系列试验, 提出了一种精度较高、便于工程应用的高强钢筋混凝土梁短期变形计算的简化方法.

## 1 试验

### 1.1 试验概况

试验采用的加载装置见图 1. 设计试件综合考虑了以下因素的影响: 混凝土强度等级、构件长度、截面尺寸与形式、受拉钢筋面积、混凝土保护层厚度以及预应力效应, 具体数值见表 1 和表 2. 试件共分 3 组进行, 各组试件的截面形式见图 2(其中, 第 1 组为矩形截面, 第二组为矩形、T 形两种截面, 第三组为矩形截面). 前两组均为高强钢筋混凝土梁, 反向加载, 荷载的施加以纯弯段的设计计算弯矩  $M_u$  为参照(相应地, 计算极限荷载为  $P_u$ ), 荷载级差为  $0.1P_u$ , 每级荷载持荷 10 min, 加载至  $0.9P_u$  时荷载级差改为  $0.05P_u$  直至破坏; 第 3 组为配置高强钢筋的预应力混凝土梁, 正向加载, 试验梁开裂前荷载级差为

0.05 $P_u$ , 每级荷载持荷 30 min, 试验梁开裂后, 荷载级差增至 0.1 $P_u$ .

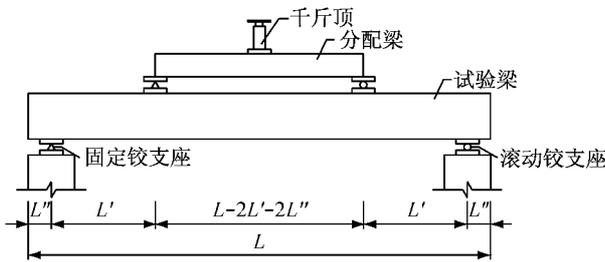


图 1 试验加载(正向)示意图  
Fig.1 Positive loading setup

图 1 中,  $L$  为梁的总长;  $L''$  为构件边缘至支座的距离, 对于第 1 组取 200 mm, 第 2 组与第 3 组取 150 mm;  $L'$  为剪跨(该区段内配置箍筋), 对于第 1, 2 组取  $(L - 2L'')/4$ , 即四分点段, 对于第 3 组取 1 200 mm ( $L = 4\ 500$  mm 时) 或 1 650 mm ( $L = 6\ 000$  mm 时);  $L - 2L' - 2L''$  为纯弯段(该区段内, 第 1, 2 组均不配置箍筋, 第 3 组配置箍筋).

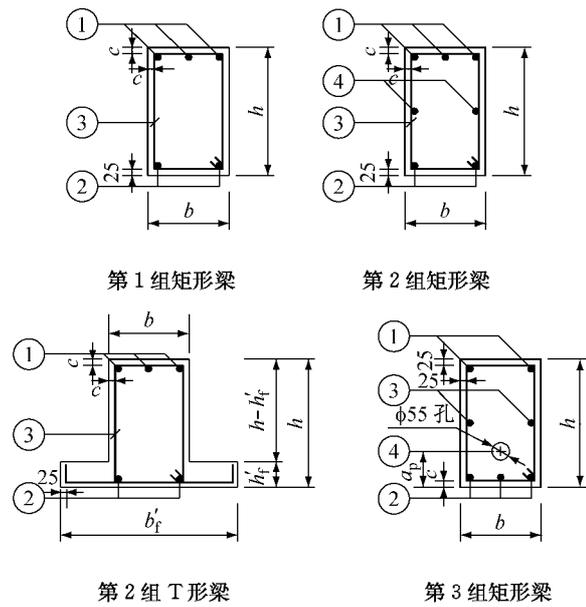


图 2 构件截面示意图  
Fig.2 Cross section

表 1 高强钢筋混凝土梁详情表(第 1, 2 组)

Tab.1 RC specimen with high strength steel bars properties (Group 1, 2)

第 1 组 试件 编号	$f_{cu}/$ MPa	$(b \times h \times L)/$ (mm $\times$ mm $\times$ mm)	$c/$ mm	受拉 筋①	第 2 组 试件 编号	$f_{cu}/$ MPa	$(b \times h \times L, b'_f \times h'_f)/$ (mm $\times$ mm $\times$ mm, mm $\times$ mm)	$c/$ mm	受拉 筋①
B5F1	34.0	251 $\times$ 403 $\times$ 4 000	25	3 $\Phi$ 16	JL1	28.7	250 $\times$ 400 $\times$ 4 500	30	3 $\Phi$ 20
B5F2	34.0	250 $\times$ 402 $\times$ 4 000	25	2 $\Phi$ 25	JL2	28.7	250 $\times$ 450 $\times$ 4 500	30	3 $\Phi$ 20
B5F3	56.2	253 $\times$ 403 $\times$ 4 000	25	3 $\Phi$ 16	JL3	28.7	250 $\times$ 450 $\times$ 4 500	30	2 $\Phi$ 25
B5F4	56.2	249 $\times$ 401 $\times$ 4 000	25	2 $\Phi$ 25	JL4	28.7	250 $\times$ 450 $\times$ 4 500	40	3 $\Phi$ 25
CB5-1	34.0	251 $\times$ 402 $\times$ 4 000	60	2 $\Phi$ 25	JL5	28.7	250 $\times$ 500 $\times$ 4 500	40	5 $\Phi$ 20
CB5-2	34.0	303 $\times$ 454 $\times$ 4 000	60	2 $\Phi$ 32	JL6	44.0	250 $\times$ 400 $\times$ 4 500	50	2 $\Phi$ 25
CB5-3	56.2	255 $\times$ 406 $\times$ 4 000	60	3 $\Phi$ 25	JL7	44.0	250 $\times$ 450 $\times$ 4 500	30	3 $\Phi$ 20
CB5-4	56.2	254 $\times$ 403 $\times$ 4 000	60	2 $\Phi$ 32	JL8	44.0	250 $\times$ 450 $\times$ 4 500	40	3 $\Phi$ 25
SB5F1	34.0	250 $\times$ 400 $\times$ 4 000	60	2 $\Phi$ 25	JL9	44.0	300 $\times$ 500 $\times$ 4 500	40	2 $\Phi$ 32 + 1 $\Phi$ 20
SB5F2	34.0	300 $\times$ 450 $\times$ 4 000	60	2 $\Phi$ 32	JL10	44.0	250 $\times$ 500 $\times$ 4 500	50	3 $\Phi$ 25
SB5F3	56.2	250 $\times$ 400 $\times$ 4 000	60	2 $\Phi$ 25	TL11	28.7	250 $\times$ 400 $\times$ 4 500, 500 $\times$ 80	30	3 $\Phi$ 25
SB5F4	56.2	300 $\times$ 450 $\times$ 4 000	60	2 $\Phi$ 32	TL12	28.7	250 $\times$ 450 $\times$ 4 500, 550 $\times$ 80	40	5 $\Phi$ 20
SB5F5	56.2	300 $\times$ 450 $\times$ 4 000	60	2 $\Phi$ 32	TL13	44.0	250 $\times$ 450 $\times$ 4 500, 550 $\times$ 80	40	2 $\Phi$ 32
SB5F6	34.0	250 $\times$ 400 $\times$ 4 000	60	2 $\Phi$ 25	TL14	44.0	300 $\times$ 500 $\times$ 4 500, 550 $\times$ 80	50	3 $\Phi$ 25

注:  $f_{cu}$  为混凝土立方体抗压强度; 第 1 组中的热轧钢筋  $\Phi$  16,  $\Phi$  25,  $\Phi$  32 屈服强度实测值分别为 549.5, 495.0, 529.0 MPa; 第 2 组中的热轧钢筋  $\Phi$  20,  $\Phi$  25,  $\Phi$  32 屈服强度实测值分别为 556.0, 569.0, 529.0 MPa; 钢筋弹性模量均取 200 GPa.

### 1.2 变形试验结果与分析

开始加载时, 截面未开裂, 试件表现为弹性变形, 挠度近似为线性增长; 当荷载增至  $(0.2 \sim 0.3)P_u$  时, 纯弯段梁底出现一条或多条裂缝, 开裂弯矩试验值与规范计算值符合较好, 开裂时应变与挠度均发

生突变, 表现为荷载-挠度曲线出现明显转折点, 随后变形恢复线性增长, 且增长幅度大于第一阶段; 随着荷载进一步增加, 纯弯段裂缝逐渐增多, 宽度逐渐加大, 开始出现斜裂缝, 当荷载增至约  $(0.4 \sim 0.5)P_u$  (对于预应力梁为  $0.6P_u$ ) 时, 裂缝基本出齐, 荷载-

表2 配置高强钢筋的预应力混凝土梁详情表(第3组)

Tab.2 PRC specimen with high strength steel bars properties (Group 3)

第3组 试件 编号	$(b \times h \times L) /$ (mm × mm × mm)	$f_{cu} /$ MPa	预应力筋				非预应力筋			$c /$ mm
			④	$a_p /$ mm	$\sigma_{con} /$ MPa	$\sigma_{pe} /$ MPa	受压 筋①	受拉 筋②	腰筋 ③	
PC-1	251 × 453 × 4 510	39.8	3 $\phi$ 15.2	91	1 149	822	2 $\phi$ 18	3 $\phi$ F20	2 $\phi$ 14	32
PC-2	252 × 452 × 4 509	39.8	3 $\phi$ 15.2	151	1 149	778	2 $\phi$ 18	3 $\phi$ F20	2 $\phi$ 14	33
PC-3	252 × 453 × 4 512	39.8	3 $\phi$ 15.2	89	1 149	748	2 $\phi$ 18	2 $\phi$ F25	2 $\phi$ 14	31
PC-4	251 × 452 × 4 513	39.8	3 $\phi$ 15.2	152	1 149	754	2 $\phi$ 18	2 $\phi$ F25	2 $\phi$ 14	33
PC-5	253 × 452 × 4 518	39.8	4 $\phi$ 15.2	92	1 149	752	2 $\phi$ 18	3 $\phi$ F20	2 $\phi$ 14	32
PC-6	252 × 452 × 4 515	38.4	4 $\phi$ 15.2	153	1 149	770	2 $\phi$ 18	2 $\phi$ F25	2 $\phi$ 14	33
PC-7	253 × 451 × 4 511	38.4	4 $\phi$ 15.2	88	764	389	2 $\phi$ 18	3 $\phi$ F20	2 $\phi$ 14	32
PC-8	252 × 452 × 4 518	38.4	4 $\phi$ 15.2	147	764	440	2 $\phi$ 18	2 $\phi$ F25	2 $\phi$ 14	31
PC-9	308 × 608 × 6 018	50.3	4 $\phi$ 15.2	116	1 150	835	2 $\phi$ 18	3 $\phi$ F20	4 $\phi$ 14	42
PC-10	304 × 604 × 6 015	50.3	4 $\phi$ 15.2	175	1 150	862	2 $\phi$ 18	3 $\phi$ F20	4 $\phi$ 14	43
PC-11	303 × 603 × 6 017	50.3	4 $\phi$ 15.2	118	1 150	862	2 $\phi$ 18	3 $\phi$ F25	4 $\phi$ 14	41
PC-12	306 × 602 × 6 019	50.3	4 $\phi$ 15.2	176	1 150	888	2 $\phi$ 18	3 $\phi$ F25	4 $\phi$ 14	39
RC-1	252 × 452 × 4 518	39.8	0	0	0	0	2 $\phi$ 18	3 $\phi$ F20	2 $\phi$ 14	32
RC-2	252 × 453 × 4 518	39.8	0	0	0	0	2 $\phi$ 18	2 $\phi$ F25	2 $\phi$ 14	32

注:  $\sigma_{con}$  与  $\sigma_{pe}$  分别为预应力筋的张拉控制应力与有效预应力; 钢筋 $\phi$ F20,  $\phi$ F25 的屈服强度实测值均为 545.6 MPa, 弹性模量取 200 GPa。

挠度曲线基本保持为直线; 当荷载接近  $P_u$  时, 混凝土梁中的钢筋与预应力梁中的非预应力筋均进入流塑状态(预应力梁中的钢绞线仍处于弹性状态), 荷载-挠度曲线发生第二次明显转折, 荷载和挠度均进一步增长直至梁顶混凝土被压碎而破坏。全过程弯矩-跨中挠度曲线基本呈三折线形状, 两个转折点分别对应混凝土开裂和高强钢筋受拉屈服的状态。根据试验, 混凝土梁与预应力梁跨中混凝土应变基本服从平截面假定, 试验梁临近破坏时, 受拉钢筋能够达到屈服, 故现行混凝土规范中规定的钢筋混凝土受弯构件正截面承载力计算公式仍然适用。

各试件的弯矩-挠度曲线如图 3 所示(图中, 荷载采用相对值, 即加载弯矩与极限弯矩之比  $M/M_u$ ;  $f$  为跨中挠度)。可以看出, 随着荷载的增加, 同一构件的变形迅速增长; 截面尺寸相同的试验梁 B5F1 与 B5F2, 开裂后其弯矩-挠度曲线出现明显差异, 主要原因是配筋率的不同影响着截面有效受压区高度, 从而对开裂后的刚度产生影响; 配筋率相同的梁 CB5-2 与 CB5-4 由于截面尺寸不同(进而初始刚度不同), 其弯矩-挠度曲线也不相同; 另外, 与普通钢筋混凝土梁 CB-1 与 CB-2<sup>[1]</sup> 相比, 高强钢筋混凝土梁的极限位移与屈服位移之比没有明显降低, 但是高强钢筋的配置大大提高了试验梁的极限位移, 表现出较为优越的变形性能。由以上分析可知, 荷载、配筋率与初始刚度是影响高强钢筋混凝土梁短期变形增长的 3 个基本因素。

## 2 短期变形计算方法

混凝土受弯构件的短期变形计算以平截面假定为基础, 主要有两种方法: 一种是曲率积分法, 该方法通过对截面曲率沿跨长积分得到跨中的挠度, 由结构力学分析可知跨中挠度  $f_s$  的积分公式为  $f_s = \int_{L_0} \frac{M(x)\bar{M}(x)}{B_s(x)} dx$ , 式中  $M(x)$ ,  $\bar{M}(x)$  分别表示由于外荷载  $P$  与单位荷载在距梁端  $x$  处引起的弯矩,  $B_s(x)$  为截面刚度,  $L_0$  为计算跨度, 由此求得的弯曲变形解答是精确的, 但是由于各个截面的曲率沿构件长度不断变化, 因而不易应用, 并且需要额外考虑剪切变形, 否则与实际挠度有较大差别。另一种方法是最小刚度法, 该方法假定不单独考虑剪切变形的影响, 认为在简支梁全跨长范围内, 都可按弯矩最大处的截面弯曲刚度来计算挠度, 即各截面的刚度  $B_s$  为恒定值, 从而挠度公式变为  $f_s = \frac{\beta M_m L_0^2}{B_s}$ , 其中,  $\beta$  为与荷载作用形式和作用位置有关的系数, 由静力分析得到, 对于两点集中荷载作用,  $\beta = \frac{1}{8} - \frac{1}{6} \left(\frac{L'}{L_0}\right)^2$  ( $L_0$  与  $L'$  分别为净跨、剪跨),  $M_m$  为跨中弯矩。由于第二种方法计算简便, 精度较高, 因而工程应用广泛, 已经成为国际上变形控制的主要计算方法。

最小刚度法大致分为三类: 解析刚度法(GB

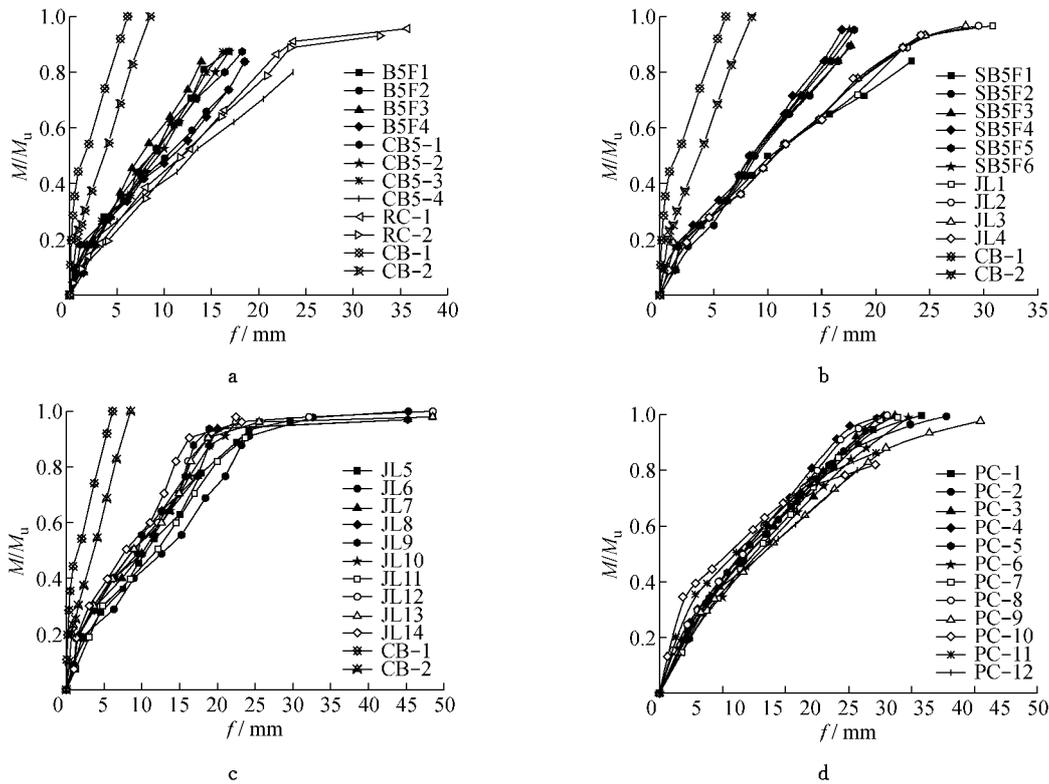
图 3 各试验构件  $M-f$  曲线汇总

Fig. 3 Relationship between loading moment and the observed deflection

50010—2010)、有效惯性矩法(ACI 318—08)和双直线法(JTG D62—2004, EN 1992-1-1: 2004). 现行各混凝土结构设计规范在短期抗弯刚度计算上主要考虑了两方面因素,外部因素为荷载,其变量为  $M_{cr}/M_k$ ,其中  $M_{cr}$ ,  $M_k$  分别为开裂弯矩与使用弯矩;内部因素在开裂前为弹性刚度  $B_0$ ,开裂后为配筋率  $\rho$ ,这与本文试验得到的结论类似. 以下利用  $B_0$ ,  $\rho$ ,  $M_{cr}/M_k$  推导出混凝土梁与预应力混凝土梁短期抗弯刚度计算的统一公式,并利用试验数据加以验证.

### 3 统一刚度计算公式的建立

根据试验结果,破坏前混凝土梁纯弯段的弯矩  $M$  与曲率  $\varphi$  变化关系可以简化为三个阶段,见图 4. 第一阶段,作用弯矩小于开裂弯矩,  $M-\varphi$  呈线性关系;构件开裂后,进入第二阶段,  $M-\varphi$  呈近似线性关系,倾斜度小于第一阶段,当配筋率不大时,在该阶段开始点处会出现类似“屈服”的平台;当作用弯矩大于使纵向受拉钢筋屈服的弯矩时,进入第三阶段,  $M-\varphi$  曲线倾斜度继续减小,甚至几乎呈水平状态.

开裂后截面短期平均曲率  $\varphi_s$  可以表示为

$$\varphi_s = \varphi_0 + \Delta\varphi \quad (1)$$

式中:  $\varphi_0$  开裂前弹性截面曲率;  $\Delta\varphi$  为曲率增量.

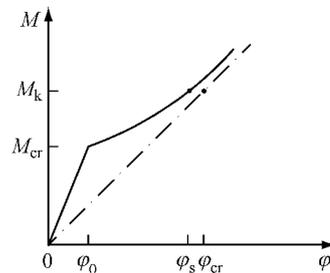


图 4 钢筋屈服前典型弯矩-曲率关系示意图

Fig. 4 Relationship between moment and curvature before the yielding of the steel

曲率增量  $\Delta\varphi$  与  $\varphi_{cr} - \varphi_0$  近似成正比( $\varphi_{cr}$  为完全开裂截面曲率),并且同  $M-\varphi$  曲线形式有关. 当假定构件完全开裂( $\varphi \rightarrow \infty$ )时,图 4 中的  $M-\varphi$  曲线将与倾斜的渐近线相交,即  $\Delta\varphi = \varphi_{cr} - \varphi_0$ ;在一般情况下,  $\Delta\varphi < \varphi_{cr} - \varphi_0$ ,即  $\Delta\varphi = \zeta(\varphi_{cr} - \varphi_0)$  ( $\zeta$  为小于 1 的折减系数). 试验研究表明,  $\zeta$  随  $M_{cr}/M_k$  减小而增大,即正常使用弯矩  $M_k$  越大,  $\Delta\varphi$  越大,构件越接近完全开裂的情况;另外,  $\zeta$  还与配筋率  $\rho$  和钢筋与混凝土弹性模量之比( $\alpha_E = E_s/E_c$ )的乘积  $\alpha_E\rho$  有关,即比例因子  $\zeta$  是  $M_{cr}/M_k$ ,  $\alpha_E\rho$  的函数:  $\zeta = \zeta(M_{cr}/M_k, \alpha_E\rho)$ ,  $\zeta$  的具体函数形式可以通过试验结果统计分析得到. 则开裂后的短期平均曲率表示为

$$\varphi_s = \varphi_0 + \zeta(\varphi_{cr} - \varphi_0) = \zeta\varphi_{cr} + (1 - \zeta)\varphi_0 \quad (2)$$

式(2)表明,开裂后截面平均曲率是完全开裂截面曲率  $\varphi_{cr}$  与开裂前的弹性截面曲率  $\varphi_0$  的加权平均,权重分别为  $\zeta, 1-\zeta$ . 根据曲率与截面刚度的关系,式(2)可以写成如下形式:

$$\frac{M_k}{B_s} = \zeta \frac{M_k}{B_{cr}} + (1-\zeta) \frac{M_{cr}}{B_0} \quad (3)$$

所以

$$B_s = \frac{B_0}{\zeta \frac{B_0}{B_{cr}} + (1-\zeta) \frac{M_{cr}}{M_k}} \quad (4)$$

式(4)表明,等效抗弯刚度  $B_s$  为  $B_0, B_{cr}, M_{cr}/M_k, \alpha_E \rho$  的函数. 由于开裂截面的刚度  $B_{cr}$  主要与  $B_0, \alpha_E \rho$  相关,故实际上  $B_s$  只与 3 个独立变量有关,即  $B_s = B(B_0, \alpha_E \rho, M_{cr}/M_k)$  或  $B_s = B(B_0, B_{cr}, M_{cr}/M_k)$ .  $B_s$  的具体函数形式可以通过试验结果统计分析得到,或者假定弯矩与曲率为某一个简单函数,对其中参数进行统计分析得到. 文献[2]根据弯矩与曲率关系提出的短期刚度近似统一计算式为

$$B_s = \left(\frac{M_{cr}}{M_k}\right)^n B_0 + \left[1 - \left(\frac{M_{cr}}{M_k}\right)^n\right] B_{cr} \quad (5)$$

本文对式(5)中的参数  $n$  进行试算,获得有效刚度的试验值与计算值之比( $B_{s,t}/B_{s,c}$ ),其均值  $\mu$  与变异系数  $\delta$  分别与参数  $n$  的关系如图 5 所示.

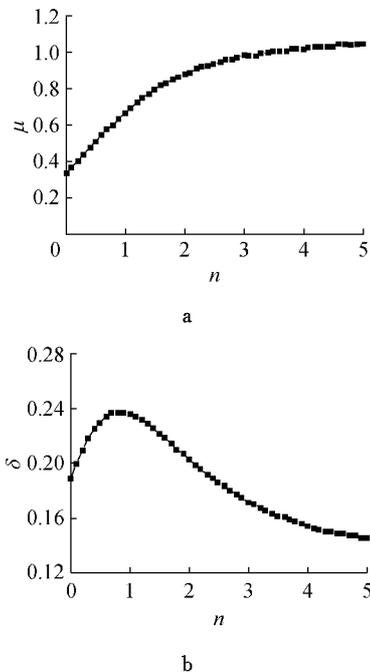


图 5  $B_{s,t}/B_{s,c}$  的数值特征与参数  $n$  的关系

Fig.5 Relationship of  $B_{s,t}/B_{s,c}$  with the parameter  $n$

从图 5 可见,当  $n \geq 3$  时,均值趋近于 1,且变异系数差别不大. 根据 Branson<sup>[3]</sup> 的检验结果,指数取 4 或者 3 的相对误差最大为 3%,即计算结果对指数

取 3 或者 4 并不特别敏感. 为简化计算,这里取  $n = 3$ . 此时,均值为 0.975,变异系数为 0.172,即各数值特征都较理想. 于是,式(5)变为

$$B_s = \left(\frac{M_{cr}}{M_k}\right)^3 B_0 + \left[1 - \left(\frac{M_{cr}}{M_k}\right)^3\right] B_{cr} \quad (6)$$

式(6)即为美国 ACI 318-08 规范采用的刚度计算公式. 对式(6)变换,得

$$\frac{B_s}{B_0} = 1 - \left[1 - \left(\frac{M_{cr}}{M_k}\right)^3\right] \frac{B_0 - B_{cr}}{B_0} \quad (7)$$

式(7)中  $B_{cr}$  的计算较复杂,其影响因素主要与初始刚度  $B_0$  和配筋率  $\rho$  有关. 考虑到钢筋与混凝土弹性模量之比为常数( $\alpha_E = E_s/E_c$ ),同时为了反映配筋率  $\rho$  的影响,这里采用相对刚度形式,即  $\Delta B/B_0 = (B_0 - B_{cr})/B_0$  应为  $\alpha_E \rho$  的函数.

式(7)也可以写成如下形式:

$$\frac{\Delta B}{B_0} = \frac{1 - \frac{B_s}{B_0}}{1 - \left(\frac{M_{cr}}{M_k}\right)^3} \quad (8)$$

为了得到  $\Delta B/B_0$  与  $\alpha_E \rho$  的数值关系,需要确定两个基本参量:  $B_s/B_0$  与  $M_{cr}/M_k$ .  $B_s$  可通过试验得到,但是鉴于试验成本较高,试验数据有限,也可以用被证实的、具有较高精度的计算公式产生的刚度模拟值来代替. 文献[4]建立了滑移、裂缝宽度、刚度相统一的计算公式

$$B_s = \frac{\beta_1 \bar{E}_s (A_s + A_p) h_0^2}{1.78 - 2.1\lambda_0 + 4\alpha_E \rho - (1.2 + 2.9\lambda_0 + 4.7\alpha_E \rho) \frac{\beta f_t h_0^2 \rho}{M_k \rho_{et}}} \quad (9)$$

式中:  $\beta_1$  为截面形状相关系数;  $\bar{E}_s$  为受拉区钢筋平均弹性模量,  $\bar{E}_s = (E_s + E_p)/2$ ,对钢筋混凝土梁取  $\bar{E}_s = E_s$ ,  $E_s$  与  $E_p$  分别为普通纵向受拉钢筋、预应力筋的弹性模量;  $A_s$  与  $A_p$  分别为普通纵向受拉钢筋、预应力筋的面积;  $h_0$  为混凝土受压区高度;  $\lambda_0$  为预应力度,  $\lambda_0 = M_0/M_k$ ,  $M_0$  为消压弯矩;  $\rho = (A_s + A_p)/bh_0$ ;  $\rho_{et} = (A_s + A_p)/0.5bh$ ; 系数  $\beta$  与钢筋应力、受力形式有关,反映了受拉区混凝土参与工作的程度,  $0 \leq \beta \leq 0.5$ ;  $f_t$  为混凝土抗拉强度. 公式(9)具有通用性,计算精度高,但计算较为复杂,为此本文按式(8)的模式对该式进一步简化.

考虑到  $\lambda_0 = M_0/M_k = (M_{cr} - \gamma f_{tk} W_0)/M_k = M_{cr}/M_k - \gamma f_{tk} W_0/M_k$  ( $\gamma$  为截面抵抗矩塑性影响系数,  $f_{tk}$  为混凝土抗拉强度,  $W_0$  为截面受拉边缘弹性抵抗矩),而  $\gamma f_{tk} W_0/M_k$  相当于无预应力混凝土时的  $M_{cr}/M_k$ ,由于预应力的影响,该项占预应力混凝

土梁中  $M_{cr}/M_k$  的比例较小. 同济大学已有的试验梁计算结果表明,  $\gamma f_{tk} W_0/M_k$  约为 0.11~0.17, 取  $\gamma f_{tk} W_0/M_k \approx 0.15$ , 则  $\lambda_0 = M_{cr}/M_k - 0.15$ . 同时, 为简化计算, 系数  $\beta$  取为 0.25.

公式(9)表明,  $B_s$  为配筋率  $\rho$  的函数(当  $M_{cr}/M_k$  确定后  $f_t b h_0^2/M_k$  为常数), 实际上由 ACI 规范也有相同结论. 故通过对  $M_{cr}/M_k$  赋值, 利用式(9)可以得到  $\Delta B/B_0$  与  $\alpha_E \rho$  的确定关系. 对于配置高强钢筋的混凝土梁, 经济配筋率  $\rho$  一般在 0.6%~1.5% 之间. 取正常使用弯矩  $M_k \approx (0.60 \sim 0.80) M_u$ , 则混凝土梁  $M_{cr}/M_k \approx 0.12 \sim 0.50$  (相应地,  $M_{cr}/M_u \approx 0.1 \sim 0.3$ ); 预应力混凝土梁取  $M_{cr}/M_k \approx 0.25 \sim 0.65$  (相应地,  $M_{cr}/M_u \approx 0.20 \sim 0.40$ ). 计算结果见图 6 与图 7.

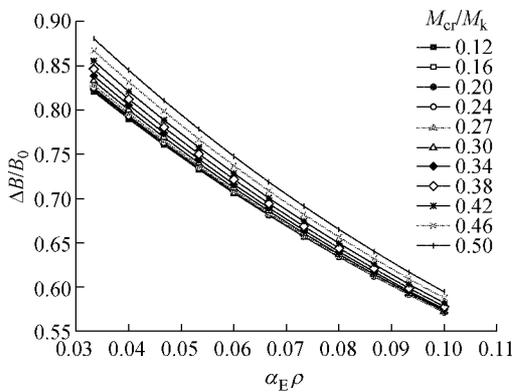


图 6 高强钢筋混凝土梁  $\Delta B/B_0 - \alpha_E \rho$  曲线  
Fig. 6  $\Delta B/B_0 - \alpha_E \rho$  curve of RC beam with high strength steel bars

从图 6 与图 7 可以看出,  $\Delta B/B_0$  与  $\alpha_E \rho$  基本呈线性关系; 预应力梁与普通高强钢筋混凝土梁的拟合结果差别不大. 现对两种情况下的均值拟合公式再进行一次平均运算, 并微调取整后得到以下公式:

$$\Delta B/B_0 = -4\alpha_E \rho + 0.98 \quad (10)$$

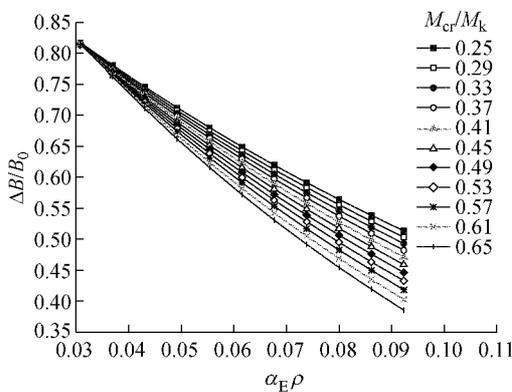


图 7 高强钢筋预应力混凝土梁  $\Delta B/B_0 - \alpha_E \rho$  曲线  
Fig. 7  $\Delta B/B_0 - \alpha_E \rho$  curve of PRC beam with high strength steel bars

将式(10)代入式(8), 即得到高强钢筋混凝土梁短期抗弯刚度统一计算模式

$$B_s = B_0 \left\{ 1 - \left( 1 - \left( \frac{M_{cr}}{M_k} \right)^3 \right) (-4\alpha_E \rho + 0.98) \right\} \quad (11)$$

### 4 计算公式的验证

为了验证式(11), 除本文试验数据以外, 还收集整理了国内其他高校相关试验结果<sup>[1,5-18]</sup>. 表 3 为试验挠度与计算挠度之比 ( $f_{s,t}/f_{s,c}$ ) 的统计结果, 其中,  $\mu$  为均值,  $\delta$  为变异系数. 为了比较, 本文也给出了由 GB 50010—2010, ACI 318—08, JTG D62—2004, EN 1992-1-1:2004 等规范公式以及式(9)得到的计算结果.

表 3 各公式 ( $f_{s,t}/f_{s,c}$ ) 计算精度对比

公式来源	混凝土梁		预应力混凝土梁	
	$\mu$	$\delta$	$\mu$	$\delta$
GB 50010—2010	1.060	0.165	0.964	0.238
JTG D62—2004	0.941	0.224	0.850	0.278
ACI 318—08	1.079	0.282	1.082	0.152
EN 1992-1-1:2004	0.943	0.225	0.853	0.278
式(9)	1.060	0.201	1.038	0.265
式(11)	1.065	0.258	0.961	0.224

从表 3 可以看出, 根据国内公路桥涵规范和欧洲规范计算得到的挠度对于普通混凝土梁和预应力混凝土梁都明显偏大, 按中国 GB 50010—2010 规范、美国 ACI 318—08 规范、文献[4]和式(11)计算出的结果与试验值比较接近, 表明现行新规范适用于高强钢筋混凝土部分. 无论是美国 ACI 318—08 规范公式, 还是文献[4]提出的公式其计算都比较复杂, 物理概念不够直观. 本文建议公式对预应力混凝土梁和钢筋混凝土梁采用统一的表达式, 不仅计算精度较高, 而且形式简单, 其物理概念也十分明确, 反映了影响刚度的主要因素.

### 5 结论

(1) 对配置 500 MPa 钢筋的混凝土梁与预应力混凝土梁的试验结果表明, 混凝土梁的挠度主要与荷载、配筋率、初始刚度有关; 同时, 新规范 GB 50010—2010 对配置高强钢筋的混凝土梁在短期挠度计算上是适用的.

(2) 基于混凝土梁抗弯刚度与裂缝宽度计算的统一模式, 推导出钢筋混凝土梁短期变形计算的简

化建议式。

(3)将建议公式与国内外规范在变形计算上的精度进行对比,结果表明,建议公式不仅适用于高强钢筋混凝土梁,也适用于预应力混凝土梁,而且计算精度高,形式简单,物理含义明确,工程应用性强。

#### 参考文献:

- [1] 丁振坤,邱洪兴,胡涛,等. HRB500级钢筋混凝土梁受弯刚度试验[J]. 建筑科学与工程学报, 2009, 26(1): 115.  
DING Zhenkun, QIU Hongxing, HU Tao, et al. Experiment on flexural stiffness of reinforced concrete beams with HRB500 reinforcement bars [J]. Journal of Architecture and Civil Engineering, 2009, 26(1): 115.
- [2] 白生翔,王晓锋. 混凝土受弯构件短期弯曲刚度统一模式[C]//第十四届全国混凝土及预应力混凝土学术会议论文. 长沙:中国土木工程学会, 2007: 312-318.  
BAI Shengxiang, WANG Xiaofeng. A unified model for short-term flexural stiffness of concrete bending members [C]//The 14th National Concrete and Prestressed Concrete Conference. Changsha: China Civil Engineering Society, 2007: 312-318.
- [3] Dan Earle Branson. Deformation of concrete structures [M]. New York: McGraw-Hill, 1976.
- [4] 周建民,朱军,朱顺宪. 混凝土梁裂缝宽度、刚度的统一计算方法及应用[J]. 铁道学报, 2000, 22: 62.  
ZHOU Jianmin, ZHU Jun, ZHU Shunxian. A unified computing model for the crack width and the flexural stiffness in concrete members and its application [J]. Journal of The China Railway Society, 2000, 22: 62.
- [5] 丁振坤. 混凝土受弯构件抗弯刚度计算方法研究[D]. 南京:东南大学土木工程学院, 2008.  
DING Zhenkun. Study on flexural stiffness calculation method of concrete members [D]. Nanjing: School of Civil Engineering of Southeast University, 2008.
- [6] 蒋永生,梁书亭,陈德文,等. 高强钢筋高强混凝土受弯构件的变形性能试验研究[J]. 建筑结构学报, 1998, 19(2): 37.  
JIANG Yongsheng, LIANG Shuting, CHEN Dewen, et al. Experiment research for deformation behavior of high-strength flexural member with high-strength rebars [J]. Journal of Building Structures, 1998, 19(2): 37.
- [7] 李艳艳. 配置 500 MPa 钢筋的混凝土梁受力性能的试验研究[D]. 天津:天津大学建筑工程学院, 2007.  
LI Yanyan. Experiment research on behaviors of reinforced concrete beams with 500MPa steel bars [D]. Tianjin: School of Civil Engineering of Tianjin University, 2007.
- [8] 肖红菊. HRB400级钢筋混凝土梁受弯性能研究[D]. 郑州:郑州大学土木工程学院, 2006.  
XIAO Hongju. Experiment research on the bend behavior of HRB400 reinforced concrete beams [D]. Zhengzhou: School of Civil Engineering of Zhengzhou University, 2006.
- [9] 李美云. HRB400级钢筋混凝土构件受力性能的试验研究[D]. 郑州:郑州大学土木工程学院, 2003.  
LI Meiyun. The study of the mechanical property of HRB400 reinforced concrete members [D]. Zhengzhou: School of Civil Engineering of Zhengzhou University, 2003.
- [10] 张艇. HRB500级钢筋混凝土构件受力性能的试验研究[D]. 郑州:郑州大学土木工程学院, 2004.  
ZHANG Ting. The study of the mechanical property of HRB500 reinforced concrete members [D]. Zhengzhou: School of Civil Engineering of Zhengzhou University, 2004.
- [11] 王全凤,刘凤谊,杨勇新,等. HRB500级钢筋混凝土简支梁受弯试验[J]. 华侨大学学报, 2007, 28(3): 300.  
WANG Quanfeng, LIU Fengyi, YANG Yongxin, et al. Experimental investigation on flexural behavior of simple supported RC beams with grade HRB500 reinforcement [J]. Journal of Huaqiao University, 2007, 28(3): 300.
- [12] 于秋波,刘立新,胡丹丹,等. HRB500级钢筋部分预应力混凝土梁受力性能的试验研究[J]. 建筑结构, 2009, 39: 527.  
YU Qiubo, LIU Lixin, HU Dandan, et al. Experiment study on flexural behavior of prestressed concrete beams using the HRB500 steel bars as nonprestressed reinforcement [J]. Building Structure, 2009, 39: 527.
- [13] 于秋波,刘立新,谢丽丽,等. HRB500级钢筋用于先张预应力梁的非预应力筋试验研究[J]. 四川建筑科学研究, 2009, 35(1): 6.  
YU Qiubo, LIU Lixin, XIE Lili, et al. Experiment research of the prestressed concrete structure behavior with HRB500 steel bars [J]. Sichuan Building Science, 2009, 35(1): 6.
- [14] 于秋波. HRB500级钢筋部分预应力混凝土梁受力性能研究[D]. 郑州:郑州大学土木工程学院, 2008.  
YU Qiubo. Study on stress behavior of partially prestressed concrete beams with HRB500 steel bars [D]. Zhengzhou: School of Civil Engineering of Zhengzhou University, 2008.
- [15] 冯辉. 配 HRB500 级钢筋后张法预应力混凝土梁受力性能的研究[D]. 郑州:郑州大学土木工程学院, 2007.  
FENG Hui. The study about the mechanical property of post-tensioned prestressed flexural members with HRB500 steel bars [D]. Zhengzhou: School of Civil Engineering of Zhengzhou University, 2007.
- [16] 胡丹丹. 配 500 MPa 钢筋折线先张法预应力混凝土梁受力性能的研究[D]. 郑州:郑州大学土木工程学院, 2007.  
HU Dandan. The experiment of research on fold-line pre-tension pre-stressed beam with 500 MPa high strength steel bars [D]. Zhengzhou: School of Civil Engineering of Zhengzhou University, 2007.
- [17] 杜毛毛,苏小卒,赵勇. 配 500 MPa 钢筋后张有粘结预应力混凝土梁受弯试验[J]. 沈阳建筑大学学报, 2009, 25(2): 211.  
DU Maomao, SU Xiaozu, ZHAO Yong. Flexural test of post-tensioned bonded prestressed concrete beams with 500MPa steel bars [J]. Journal of Shenyang Jianzhu University, 2009, 25(2): 211.
- [18] 张利梅,赵顺波,黄承逵. 高性能预应力混凝土梁挠度试验与计算方法[J]. 大连理工大学学报, 2005, 45(1): 96.  
ZHANG Limei, ZHAO Shunbo, HUANG Chengkui. Experimentation and calculation of deflection of prestressed high-performed concrete beams [J]. Journal of Dalian University of Technology, 2005, 45(1): 96.