文章编号: 0253-374X(2013)06-0932-04

DOI: 10.3969/j.issn.0253-374x.2013.06.022

关于一类球约束下的 LQ 奇异最优控制问题

赵尚睿,朱经浩

(同济大学 数学系,上海 200092)

摘要: 研究一类有约束的 LQ 奇异最优控制问题. 利用 Pontryagin 极值原理和倒向微分流的方法,通过伴随变量直接给出最优控制的解析表达式,避免了传统方法因引入小摄动量进行逼近而带来的大量计算.

关键词: 球约束 LQ 奇异最优控制; Pontryagin 极值原理; 典范倒向微分流

中图分类号: O232　　**文献标志码**: A

Solution to Constrained Linear Quadratic Singular Optimal Control

ZHAO Shangrui, *ZHU Jinghao*

(Department of Mathematics, Tongji University, Shanghai 200092, China)

Abstract: This paper is devoted to solving a constrained linear quadratic (LQ) singular optimal control problem. The optimal control of this problem is given explicitly with the co-state variable by the Pontryagin maximum principle and the canonical backward differential flow. Differing from the traditional way, it avoids adding a small perturbation for an approximation process.

Key words: LQ singular optimal control problem; Pontryagin maximum principle; canonical backward differential flows

考虑以下约束线性二次最优控制问题(P)

$$\begin{aligned} \min J &= \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f} \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{W}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{R}\boldsymbol{u}(t)\,\mathrm{d}t \\ \text{s. t. } & \dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t) \\ & \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0 \\ & \boldsymbol{u}(t) \in U = \{\boldsymbol{u} \mid \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u} \leqslant 1\}, \quad t \in [t_0, t_f] \end{aligned} \tag{1}$$

式中: $\boldsymbol{W}\in\mathbf{R}^{n\times n}$, $\boldsymbol{R}\in\mathbf{R}^{m\times m}$ 都为半正定对称矩阵,且矩阵 $\boldsymbol{R}$ 至少有一个特征值为零,而 $\boldsymbol{A}\in\mathbf{R}^{n\times n}$, $\boldsymbol{B}\in\mathbf{R}^{n\times m}$ 都为定常矩阵; $\boldsymbol{x}(t)\in\mathbf{R}^n$ 为状态变量, $\boldsymbol{u}(t)\in\mathbf{R}^m$ 为控制变量. 一个允许控制 $\boldsymbol{u}(\cdot)$ 是指在区间 $[t_0,t_f]$ 上有界可积并取值于 $U=\{\boldsymbol{u}|\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}\leqslant 1\}$ 上的向量函数. 最优控制问题(P)在系统科学和工程等领域有着十分广泛的应用. 最优控制问题(P)的 Hamilton 函数为

$$H(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\boldsymbol{\lambda}) = \boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}) + \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}\boldsymbol{x} + \frac{1}{2}\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}\boldsymbol{u} \tag{2}$$

由于 $H_{uu}=\boldsymbol{R}$ 为奇异矩阵(注意到 $\boldsymbol{R}$ 至少有一个特征值为零),可见原问题是奇异最优控制问题. 对于奇异最优控制问题,经典的方法[1]是在评价泛函的被积函数中加上一个小摄动量,对于 $\varepsilon>0$ 得到非奇异最优控制问题(P_ε)

$$\begin{aligned} \min J_\varepsilon &= \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f} \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{W}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}(t)(\boldsymbol{R}+\varepsilon\boldsymbol{I})\boldsymbol{u}(t)\,\mathrm{d}t \\ \text{s. t. } & \dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t) \\ & \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0 \\ & \boldsymbol{u}(t) \in U = \{\boldsymbol{u} \mid \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u} \leqslant 1\}, \quad t \in [t_0, t_f] \end{aligned} \tag{3}$$

进而求解非奇异的约束线性二次最优控制问题(P_ε),令 $\varepsilon\to 0$,以逼近原问题的最优值[2]. 由此产生了大量数值计算的研究[3]. 本文则避免引入小摄动量,利用典范倒向微分流方法[4]求解关于 Hamilton 函数的全局优化问题,进而直接求解线性二次奇异最优控制问题(P). 结合 Pontryagin 极值原理和倒向微分流方法给出最优控制问题(P)的极值控制的解析表达式,并证明了其最优性.

1 Pontryagin 极值控制和典范倒向微分流

在最优控制理论中,Pontryagin 极值原理[5]指出,最优控制必为极值控制. 本节利用典范微分流方

收稿日期: 2012-05-16
基金项目: 国家自然科学基金(10671145)
第一作者: 赵尚睿(1989—),女,博士生,主要研究方向为最优控制理论. E-mail: sophie.2008@163.com
通讯作者: 朱经浩(1949—),男,教授,博士生导师,理学博士,主要研究方向为最优控制、数学规划. E-mail: jinghaok@tongji.edu.cn

法[4]得到问题(P)的极值控制函数的表达式.

对于问题(P)，Hamilton 函数为

$$H(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\boldsymbol{\lambda})=\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Ax}+\boldsymbol{Bu})+\frac{1}{2}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Wx}+\frac{1}{2}\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ru} \tag{4}$$

一个极值控制函数 $\hat{\boldsymbol{u}}(\cdot)$，与相应的状态函数 $\hat{\boldsymbol{x}}(\cdot)$ 及伴随函数 $\hat{\boldsymbol{\lambda}}(\cdot)$满足

$$\dot{\hat{\boldsymbol{x}}}=H_{\lambda}(t,\hat{\boldsymbol{x}},\hat{\boldsymbol{u}},\hat{\boldsymbol{\lambda}})=\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}}+\boldsymbol{B}\hat{\boldsymbol{u}},\quad \hat{\boldsymbol{x}}(t_0)=\boldsymbol{x}_0 \tag{5}$$

$$\dot{\hat{\boldsymbol{\lambda}}}=-H_x(t,\hat{\boldsymbol{x}},\hat{\boldsymbol{u}},\hat{\boldsymbol{\lambda}})=-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{\lambda}}-\boldsymbol{W}\hat{\boldsymbol{x}},\quad \hat{\boldsymbol{\lambda}}(t_f)=0 \tag{6}$$

同时，对 $t\in[t_0,t_f]$，a. e.，

$$H(t,\hat{\boldsymbol{x}}(t),\hat{\boldsymbol{u}}(t),\hat{\boldsymbol{\lambda}}(t))=\min_{\boldsymbol{u}\in U}H(t,\hat{\boldsymbol{x}}(t),\boldsymbol{u},\hat{\boldsymbol{\lambda}}(t)) \tag{7}$$

由 Hamilton 函数的表达式(4)可知，上述优化问题(7)相当于对给定的向量 $\boldsymbol{\lambda}$，求解以下约束半正定二次优化问题(P_1)

$$\begin{aligned}&\min P(\boldsymbol{u})=\frac{1}{2}\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ru}+\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Bu}\\&\text{s. t. }\ \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}\leqslant 1\end{aligned} \tag{8}$$

以下引入关于半正定二次优化问题(P_1)的典范微分流[6]. 因 $\boldsymbol{R}\geqslant 0$，当 $\rho>0$ 时，有 $\boldsymbol{R}+\rho\boldsymbol{I}>0$，若 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda}\neq 0$，则存在 $\rho^*>0$ 满足

$$0<\|(\boldsymbol{R}+\rho^*\boldsymbol{I})^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda}\|<1 \tag{9}$$

令 $\boldsymbol{u}^*=-(\boldsymbol{R}+\rho^*\boldsymbol{I})^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda}$，则当 $\rho>0$ 时，微分方程

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}\rho}+[\boldsymbol{R}+\rho\boldsymbol{I}]^{-1}\boldsymbol{u}=0,\ \boldsymbol{u}(\rho^*)=\boldsymbol{u}^* \tag{10}$$

定义了关于半正定二次优化问题(P_1)的典范微分流

$$\hat{\boldsymbol{u}}(\rho)=-(\boldsymbol{R}+\rho\boldsymbol{I})^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda} \tag{11}$$

容易验证，当 $\rho>0$ 时，

$$\begin{aligned}&\nabla_u\left\{P(\hat{\boldsymbol{u}}(\rho))+\frac{\rho}{2}[\hat{\boldsymbol{u}}^{\mathrm{T}}(\rho)\hat{\boldsymbol{u}}(\rho)-1]\right\}=\\&\nabla_u P(\hat{\boldsymbol{u}}(\rho))+\rho\hat{\boldsymbol{u}}(\rho)=\\&\boldsymbol{R}\hat{\boldsymbol{u}}(\rho)+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda}+\rho\hat{\boldsymbol{u}}(\rho)=0\end{aligned} \tag{12}$$

$$\nabla_{uu}^2\left\{P(\hat{\boldsymbol{u}}(\rho))+\frac{\rho}{2}[\hat{\boldsymbol{u}}^{T}(\rho)\hat{\boldsymbol{u}}(\rho)-1]\right\}=\boldsymbol{R}+\rho\boldsymbol{I}>0 \tag{13}$$

引理 1：$\|\hat{\boldsymbol{u}}(\rho)\|$在 $\rho\in(0,+\infty)$内单调递减.

证：由于当 $\rho>0$ 时

$$\|\hat{\boldsymbol{u}}(\rho)\|^2=\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{R}+\rho\boldsymbol{I})^{-2}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda} \tag{14}$$

以及 $\boldsymbol{R}+\rho\boldsymbol{I}>0$，可得到，当 $\rho>0$ 时，

$$\frac{\mathrm{d}\|\hat{\boldsymbol{u}}(\rho)\|^2}{\mathrm{d}\rho}=-2\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{R}+\rho\boldsymbol{I})^{-3}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda}\leqslant 0 \tag{15}$$

所以，$\|\hat{\boldsymbol{u}}(\rho)\|$在 $\rho\in(0,+\infty)$单调递减. 证毕.

引理 2：若在 $(0,+\infty)$内，$\|\hat{\boldsymbol{u}}(\rho)\|$有界，则 $\lim\limits_{\rho\to 0^+}\hat{\boldsymbol{u}}(\rho)$存在且有穷；若在 $(0,+\infty)$内，$\|\hat{\boldsymbol{u}}(\rho)\|$无界，则 $\lim\limits_{\rho\to 0^+}\|\hat{\boldsymbol{u}}(\rho)\|=+\infty$.

证：由引理 1 知，$\|\hat{\boldsymbol{u}}(\rho)\|$在 $(0,+\infty)$内单调递减. 这样，若在 $(0,+\infty)$内，$\|\hat{\boldsymbol{u}}(\rho)\|$有界，则当 $\rho\to 0^+$ 时，数集 $\{\|\hat{\boldsymbol{u}}(\rho)\|\}$有界. 从而其在 $[0,+\infty)$上连续，所以 $\lim\limits_{\rho\to 0^+}\|\hat{\boldsymbol{u}}(\rho)\|$存在且有穷. 又因为 $\hat{\boldsymbol{u}}(\rho)$是微分方程(10)的解，所以 $\lim\limits_{\rho\to 0^+}\hat{\boldsymbol{u}}(\rho)$存在且有穷；而若在 $(0,+\infty)$内，$\|\hat{\boldsymbol{u}}(\rho)\|$无界，则由引理 1 易见，当 $\rho\to 0^+$ 时，$\lim\limits_{\rho\to 0^+}\|\hat{\boldsymbol{u}}(\rho)\|=+\infty$. 证毕.

注：由引理 2 可以知道，在广义规定下，$\lim\limits_{\rho\to 0^+}\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}[\boldsymbol{R}+\rho\boldsymbol{I}]^{-2}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda}$ 总是存在的，以下把 $\lim\limits_{\rho\to 0^+}\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}[\boldsymbol{R}+\rho\boldsymbol{I}]^{-2}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda}$ 理解为广义极限，即可为有穷值，也可为$+\infty$.

2　全局优化问题(P_1)的最优解

定理 1：关于全局优化问题(P_1)，在 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda}\neq 0$ 的情形下，有下述结论：

(1)若 $\lim\limits_{\rho\to 0^+}\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}[\boldsymbol{R}+\rho\boldsymbol{I}]^{-2}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda}>1$，则问题($P_1$)有最优解

$$\hat{\boldsymbol{u}}_{\lambda}=-[\boldsymbol{R}+\rho_{\lambda}\boldsymbol{I}]^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda} \tag{16}$$

其中 ρ_λ 是方程 $\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}[\boldsymbol{R}+\rho\boldsymbol{I}]^{-2}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda}=1$ 的惟一正根.

(2)若 $\lim\limits_{\rho\to 0^+}\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}[\boldsymbol{R}+\rho\boldsymbol{I}]^{-2}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda}\leqslant 1$，则($P_1$)有最优解

$$\hat{\boldsymbol{u}}_{\lambda}=\lim_{\rho\to 0^+}(-[\boldsymbol{R}+\rho\boldsymbol{I}]^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda}) \tag{17}$$

证：(1)在 $\lim\limits_{\rho\to 0^+}\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}[\boldsymbol{R}+\rho\boldsymbol{I}]^{-2}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda}>1$ 的情形，注意到当 $\rho>0$ 时，$\|\hat{\boldsymbol{u}}(\rho)\|^2=\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}[\boldsymbol{R}+\rho\boldsymbol{I}]^{-2}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda}$，由引理 1 及引理 2 可知，存在惟一的 $\rho_\lambda>0$ 满足

$$\|\hat{\boldsymbol{u}}(\rho_\lambda)\|^2=\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}[\boldsymbol{R}+\rho_\lambda\boldsymbol{I}]^{-2}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda}=1 \tag{18}$$

令 $\hat{\boldsymbol{u}}_\lambda=\hat{\boldsymbol{u}}(\rho_\lambda)=-[\boldsymbol{R}+\rho_\lambda\boldsymbol{I}]^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda}$，因

$$\begin{aligned}&\nabla_u[P(\boldsymbol{u})+\frac{\rho_\lambda}{2}(\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}-1)]=\nabla P(\boldsymbol{u})+\rho_\lambda\boldsymbol{u}=\\&(\boldsymbol{R}+\rho_\lambda\boldsymbol{I})\boldsymbol{u}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda}\end{aligned}$$

得到

$$\nabla_u\left[P(\hat{\boldsymbol{u}}_\lambda)+\frac{\rho_\lambda}{2}(\hat{\boldsymbol{u}}_\lambda^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{u}}_\lambda-1)\right]=0 \tag{19}$$

又有

$$\nabla_{uu}^2\left[P(\hat{\boldsymbol{u}}_\lambda)+\frac{\rho_\lambda}{2}(\hat{\boldsymbol{u}}_\lambda^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{u}}_\lambda-1)\right]=\boldsymbol{R}+\rho_\lambda\boldsymbol{I}>0$$

再注意到式(19)，从而对任意一个 $\boldsymbol{u}\in U=\{\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}\leqslant 1\}$，有

$$P(\boldsymbol{u})\geqslant P(\boldsymbol{u})+\frac{\rho_\lambda}{2}(\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}-1)\geqslant$$

$$P(\hat{\boldsymbol{u}}_\lambda^{\mathrm{T}})+\frac{\rho_\lambda}{2}(\hat{\boldsymbol{u}}_\lambda^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{u}}_\lambda-1)=P(\hat{\boldsymbol{u}}_\lambda)\quad(20)$$

所以在此情形(1)，优化问题(P_1)有最优解 $\hat{\boldsymbol{u}}_\lambda=-(\boldsymbol{R}+\rho_\lambda\boldsymbol{I})^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda}$.

(2) 在 $\lim\limits_{\rho\to0^+}\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}[\boldsymbol{R}+\rho\boldsymbol{I}]^{-2}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda}\leqslant 1$ 的情形，$\|\hat{\boldsymbol{u}}(\rho)\|$ 在 $(0,+\infty)$ 内有界，由引理 2 可知，存在 $\boldsymbol{u}^*\in U$，使得

$$\boldsymbol{u}^*=\lim_{\rho\to0^+}\hat{\boldsymbol{u}}(\rho)=\lim_{\rho\to0^+}(-(\boldsymbol{R}+\rho\boldsymbol{I})^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda})\quad(21)$$

注意到式(12)和(13)，对任意一个 $\boldsymbol{u}\in U$ 和任意一个 $\rho>0$，有

$$P(\boldsymbol{u})\geqslant P(\boldsymbol{u})+\frac{\rho}{2}(\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}-1)\geqslant$$

$$P(\hat{\boldsymbol{u}}(\rho))+\frac{\rho}{2}[\hat{\boldsymbol{u}}(\rho)^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{u}}(\rho)-1]\quad(22)$$

令 $\rho\to0^+$，有

$$P(\boldsymbol{u})\geqslant\lim_{\rho\to0^+}P(\hat{\boldsymbol{u}}(\rho))+\lim_{\rho\to0^+}\frac{\rho}{2}[\hat{\boldsymbol{u}}(\rho)^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{u}}(\rho)-1]\geqslant$$

$$P(\boldsymbol{u}^*)+\frac{0}{2}(\boldsymbol{u}^{*\mathrm{T}}\boldsymbol{u}^*-1)=P(\boldsymbol{u}^*)$$

所以在情形(2)，优化问题(P_1)有最优解 $\hat{\boldsymbol{u}}_\lambda=\boldsymbol{u}^*=\lim\limits_{\rho\to0^+}(-[\boldsymbol{R}+\rho\boldsymbol{I}]^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda})$. 证毕.

3 半正定二次奇异最优控制问题(P)的最优解

下面用 $\arg\{f(\rho)=0,\rho>0\}$ 表示方程 $f(\rho)=0$ 的正实根. 对于伴随函数 $\boldsymbol{\lambda}(t)$，当 $t\in[t_0,t_f]$，若 $\lim\limits_{\rho\to0^+}\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{B}[\boldsymbol{R}+\rho\boldsymbol{I}]^{-2}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda}(t)>1$，记

$$\rho_\lambda(t)=\arg\{\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{B}[\boldsymbol{R}+\rho\boldsymbol{I}]^{-2}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda}(t)=1,\rho>0\}$$

借助伴随函数，以下直接应用定理 1，给出约束线性二次最优控制问题(P)的极值控制表达式.

首先对约束线性二次最优控制问题(P)，定义如下关于伴随变量 $\boldsymbol{\lambda}(t)$ 的控制函数 $\boldsymbol{u}(t)$.

定义 1：当 $t\in[t_0,t_f]$，若 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda}(t)=0$，则定义 $\boldsymbol{u}(t)=0$；若 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda}(t)\neq0$，则定义

$$\boldsymbol{u}(t)=\begin{cases}-[\boldsymbol{R}+\rho_\lambda(t)\boldsymbol{I}]^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda}(t),\\ \quad\lim\limits_{\rho\to0^+}\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{B}(\boldsymbol{R}+\rho\boldsymbol{I})^{-2}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda}(t)>1\\ \lim\limits_{\rho\to0^+}[-(\boldsymbol{R}+\rho\boldsymbol{I})^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda}(t)],\\ \quad\lim\limits_{\rho\to0^+}\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{B}[\boldsymbol{R}+\rho\boldsymbol{I}]^{-2}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda}(t)\leqslant1\end{cases}\quad(23)$$

以下说明若由定义 1 给出的控制为一个 Pontryagin 极值控制，则其也是球约束线性二次最优控制问题(P)的一个最优控制.

事实上，由定理 1，对给定的 $\boldsymbol{\lambda}$，若 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda}\neq0$，约束半正定二次优化问题($\mathrm{P}_1$)的最优解仅依赖于 $\boldsymbol{\lambda}$，而当 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda}=0$ 时，显然可取约束半正定二次优化问题(P_1)的最优解为零. 这样由定义 1 给出的控制 $\boldsymbol{u}$ 的取值就仅依赖于伴随变量 $\boldsymbol{\lambda}$，而不依赖于状态变量 $\boldsymbol{x}$. 可把极值控制变量表示为伴随变量的函数

$$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}(\boldsymbol{\lambda})\quad(24)$$

定理 2：若由定义 1 给出的控制函数 $\boldsymbol{u}(t)$ 为 Pontryagin 极值控制，则其必为球约束线性二次奇异最优控制问题(P)的一个最优控制.

证：由定理 1 和定义 1，把极值控制变量表示为伴随变量的函数，$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}(\boldsymbol{\lambda})$，再代入 Hamilton 函数，有

$$H(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}(\boldsymbol{\lambda}),\boldsymbol{\lambda})=\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{\lambda})]+$$

$$\frac{1}{2}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}\boldsymbol{x}+\frac{1}{2}\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\lambda})\boldsymbol{R}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{\lambda})\quad(25)$$

由于 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{\lambda})$ 与状态变量无关，而 $\boldsymbol{W}\geqslant0$，所以 $H(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}(\boldsymbol{\lambda}),\boldsymbol{\lambda})$ 是关于 $\boldsymbol{x}$ 的凸函数，由文献[4]中引理 6.1 及其证明可知，$\boldsymbol{u}(t)$ 为球约束线性二次奇异最优控制问题(P)的一个最优控制. 证毕.

4 例子

例 1 考虑以下球约束线性二次最优控制问题(P_2)：

$$\min J=\frac{1}{2}\int_0^2 x^2(t)+(u_1(t)\quad u_2(t))\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1(t)\\u_2(t)\end{bmatrix}\mathrm{d}t$$

$$\text{s. t. }\dot{x}=4x+u_1(t)+u_2(t),\quad x(0)=2,$$

$$u_1^2(t)+u_2^2(t)\leqslant1,\quad t\in[0,2]$$

式中：状态变量 $x\in\mathbf{R}^1$，$\boldsymbol{u}=(u_1\quad u_2)^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^2$.

上述问题(P_2)的 Hamilton 函数为

$$H(t,x,\boldsymbol{u},\lambda)=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}u_1^2+\lambda(4x+u_1+u_2)$$

由于

$$H_{uu}=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}$$

上述问题(P_2)是一个奇异最优控制问题.

由 Pontryagin 极值原理，极值控制函数 $\hat{\boldsymbol{u}}(\cdot)$ 与相应的状态函数 $\hat{x}(\cdot)$ 及伴随函数 $\hat{\lambda}(\cdot)$ 需满足

$$\dot{\hat{x}}=4\hat{x}+\hat{u}_1+\hat{u}_2,\quad\hat{x}(0)=2$$

$$\dot{\hat{\lambda}}=-4\hat{\lambda}-\hat{x},\quad\hat{\lambda}(2)=0$$

$$H(t,\hat{x},\hat{\boldsymbol{u}},\hat{\lambda}) = \min_{\boldsymbol{u}\in U} H(t,\hat{x},\boldsymbol{u},\hat{\lambda})$$

由定义 1 中给出的候选极值控制表达式可得到

$$\hat{\boldsymbol{u}} = (\hat{u}_1 \quad \hat{u}_2)^{\mathrm{T}} = \begin{cases} [0 \quad 0]^{\mathrm{T}}, \hat{\lambda}(t) = 0, t \in [0,2] \\ \left[-\dfrac{\hat{\lambda}(t)}{1+\rho_{\hat{\lambda}}(t)} \quad -\dfrac{\hat{\lambda}(t)}{\rho_{\hat{\lambda}}(t)}\right]^{\mathrm{T}}, \\ \hat{\lambda}(t) \neq 0,\ t \in [0,2] \end{cases}$$

其中

$$\rho_{\hat{\lambda}} = \arg\left\{\frac{\hat{\lambda}^2}{(1+\rho)^2} + \frac{\hat{\lambda}^2}{\rho^2} = 1,\ \hat{\lambda} \neq 0,\ \rho > 0\right\}$$

由于 $\rho_{\hat{\lambda}} > 0$,可得到:$\rho_{\hat{\lambda}} = \sqrt{\sqrt{\hat{\lambda}^2(\hat{\lambda}^2+1)} + \hat{\lambda}^2 + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2}$.

这样,问题(P_2)的最优控制就可以由求解下列常微分方程边值问题而得到

$$\dot{\hat{x}} = 4\hat{x} + \hat{u}_1 + \hat{u}_2,\quad \hat{x}(0) = 2$$

$$\dot{\hat{\lambda}} = -4\hat{\lambda} - \hat{x},\quad \hat{\lambda}(2) = 0$$

其中

$$\hat{\boldsymbol{u}} = (\hat{u}_1 \quad \hat{u}_2)^{\mathrm{T}} = \begin{cases} [0 \quad 0]^{\mathrm{T}},\ \hat{\lambda}(t) = 0, t \in [0,2] \\ \left[-\dfrac{\hat{\lambda}(t)}{1+\rho_{\hat{\lambda}}(t)} \quad -\dfrac{\hat{\lambda}(t)}{\rho_{\hat{\lambda}}(t)}\right]^{\mathrm{T}}, \\ \hat{\lambda}(t) \neq 0, t \in [0,2] \end{cases}$$

$$\rho_{\hat{\lambda}} = \sqrt{\sqrt{\hat{\lambda}^2(\hat{\lambda}^2+1)} + \hat{\lambda}^2 + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2}$$

求解以上常微分方程边值问题,表 1 给出了问题(P_2)的最优控制 $\hat{u}$,以及相应的最优轨道 $\hat{x}$ 和伴随轨道 $\hat{\lambda}$ 的部分数值. 同时可得到最优控制问题(P_2)的评价泛函的最小值 $\min J = 1.555 \times 10^6$.

表 1　例 1 中的部分计算结果

Tab.1　Some of the calculation results of Example 1

t	$\hat{\lambda}$	$\rho_{\hat{\lambda}}$	$\hat{u}_1$	$\hat{u}_2$	$\hat{x}$
0.000 0	1 827 395.397 0	2 584 326.854 3	−0.707 1	−0.707 1	2.000 0
0.221 1	754 646.491 3	1 067 230.802 7	−0.707 1	−0.707 1	4.340 5
0.442 2	311 640.138 1	440 725.209 8	−0.707 1	−0.707 1	10.007 9
0.663 3	128 693.416 8	181 999.475 4	−0.707 1	−0.707 1	23.731 9
0.884 4	53 139.717 1	75 150.408 6	−0.707 1	−0.707 1	56.964 8
1.124 0	20 370.284 0	28 807.431 9	−0.707 1	−0.707 1	147.920 2
1.363 5	7 773.622 5	10 993.062 3	−0.707 1	−0.707 1	385.010 8
1.584 6	3 113.591 8	4 402.783 8	−0.707 0	−0.707 2	931.810 2
1.805 7	1 051.885 9	1 487.091 6	−0.706 9	−0.707 3	2 255.897 7
1.953 7	228.656 0	322.869 5	−0.706 0	−0.708 2	4 076.053 4
1.991 4	41.988 7	58.887 3	−0.701 1	−0.713 0	4 741.016 8
1.992 5	36.912 8	51.709 7	−0.700 3	−0.713 8	4 760.666 5
1.993 4	32.395 1	45.321 8	−0.699 3	−0.714 8	4 778.225 4
1.994 3	27.877 9	38.934 8	−0.698 1	−0.716 0	4 795.849 1
1.995 2	23.361 1	32.548 9	−0.696 3	−0.717 7	4 813.537 8
1.996 2	18.844 6	26.164 3	−0.693 7	−0.720 2	4 831.291 7
1.997 1	14.328 3	19.781 8	−0.689 5	−0.724 3	4 849.111 1
1.998 0	9.812 3	13.403 6	−0.681 2	−0.732 1	4 866.996 3
1.998 9	5.296 4	7.039 8	−0.658 8	−0.752 3	4 884.947 4
1.999 8	1.003 5	1.136 7	−0.469 7	−0.882 8	4 902.073 4
2.000 0	0.055 8	0.055 8	−0.052 8	−0.998 6	4 905.862 6
2.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	4 906.085 6

参考文献:

[1] Russell L D. Mathematics of finite dimensional control systems: theory and design[M]. New York: Marcel Dekker, 1979.

[2] Bardi M, Capuzzo-Dolcetta I. Optimal control and viscosity solutions of Hamilton-Jacobi-Bellman Equations[M]. Boston: Birkhauser, 1997.

[3] Hang C S, Wang S, Teo K L. Solving Hamilton-Jacobi-Bellman Equations by a modified method of characteristics[J]. Nonlinear Analysis, Series A: Theory Methods, 2000, 40(1/8):279.

[4] 朱经浩.最优控制中的数学方法[M].北京:科学出版社,2011. ZHU Jinghao. Mathematical methods in optimal control[M]. Beijing: Science Press, 2011.

[5] Pontryagin L S. The mathematical theory of optimal processes[M]. Oxford: Pergamon Press, 1964.

[6] ZHU Jinghao, WU Dan, GAO David. Applying the canonical dual theory in optimal control problems[J]. Journal of Global Optimization, 2012, 54(2):221.